

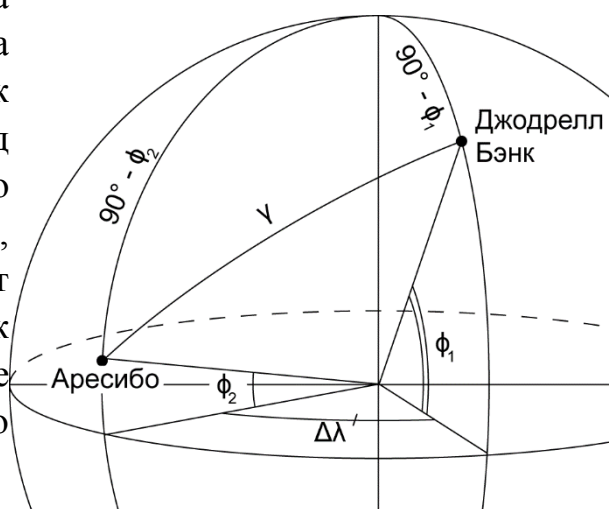
**МОСКОВСКАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2015–2016 уч. г.
ОЧНЫЙ ЭТАП
10–11 классы**

Критерии оценивания

Задание 1

Условие. Радиотелескопы в Аресибо (18° с. ш., 67° з. д.) и в Джодрелл Бэнк (53° с. ш., 2° в. д.) проводят совместные радиоинтерферометрические наблюдения. Для Аресибо источник находится в зените. Оцените, на каком зенитном расстоянии находится источник для Джодрелл Бэнк. Увеличивается или уменьшается зенитное расстояние источника в этих пунктах в процессе наблюдений?

Решение. Аресибо располагается на $\Delta\lambda = 69^\circ$ западнее Джодрелл Бэнк и на $\Delta\varphi = 35^\circ$ южнее. Поэтому источник в Джодрелл Бэнк будет виден над западной (точнее, юго-западной) частью горизонта и, разумеется, будет заходить, т. е. его зенитное расстояние будет увеличиваться. В Аресибо источник находится в зените, а значит, его зенитное расстояние равно нулю и может только увеличиваться.



Поскольку космические радиоисточники располагаются на расстояниях, много бóльших размера Земли, зенитное расстояние наблюдаемого источника в Джодрелл Бэнк равно угловому расстоянию между антеннами γ . Из сферического треугольника (см. рисунок) получаем

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right)\cos\Delta\lambda = \\ &= \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Delta\lambda \approx 0,45, \end{aligned}$$

Следовательно, $\gamma \approx 63^\circ$.

Рекомендации для жюри. Ответ на вопрос, как меняется зенитное расстояние в процессе наблюдений, оценивается в 2 балла. Правильное решение сферического треугольника оценивается в 6 баллов. Для решения учащиеся могут строить другие треугольники. Важно, что известные формулы сферической тригонометрии, например использованная теорема косинусов, справедливы только для треугольников, стороны которых образованы большими кругами

небесной сферы. Применение этих формул к иным сферическим треугольникам приводит к снижению оценки за этот этап не менее чем на 4 балла. Также можно решать эту задачу различными приближёнными методами. При правильном применении этих методов оценка не должна снижаться. Если способ определения угла γ слишком грубый, то оценка должна быть снижена. Максимум за задачу – 8 баллов.

Задание 2

Условие. Долгопериодическая комета с периодом 500 лет в перигелии орбиты, пролетая мимо Юпитера, получила дополнительную скорость 1 км/с (без изменения направления). Через какой промежуток времени эта комета снова пройдёт перигелий?

Решение. Период кометы очень велик. Он превосходит периоды обращения многих объектов пояса Койпера. При этом перигелий орбиты расположен внутри Солнечной системы. Значит, комета движется по сильно вытянутому эллипсу, а её скорость в перигелии близка к параболической, но всё же меньше её. В таком случае даже небольшая добавка скорости может изменить тип орбиты, и комета навсегда улетит из Солнечной системы. Проверим это.

Из третьего закона Кеплера, выражая период в земных годах, а большую полуось в астрономических единицах, получаем

$$a = T^{2/3} \approx 63 \text{ а. е.}$$

Зная расстояние в перигелии (5.2 а. е.) мы можем определить эксцентриситет орбиты:

$$e = 1 - \frac{r_p}{a} \approx 0,917.$$

Скорость движения по круговой орбите радиуса a равна

$$v_0 = \frac{2\pi a}{T} \approx 3,76 \text{ км/с.}$$

Наконец, скорость кометы в перигелии равна

$$v_p = v_0 \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 18,1 \text{ км/с.}$$

Параболическая скорость на этом же расстоянии от Солнца равна

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{GM}{r_p}} = v_0 \sqrt{\frac{2}{1-e}} \approx 18,5 \text{ км/с.}$$

Отсюда делаем вывод, что после пролёта мимо Юпитера комета оказалась на гиперболической орбите и вновь к перигелию она больше не вернётся никогда.

Рекомендации для жюри. Для того чтобы сделать вывод о судьбе кометы, необходимо определить её скорость в перигелии. Этот этап оценивается в 5 баллов, из них 2 балла за определение большой полуоси, 1 балл за определение эксцентриситета орбиты и 2 балла за определение самой скорости. Вычисление 2-й космической скорости на орбите Юпитера оценивается в 2 балла. Вывод о том, что конечная скорость кометы после сближения с Юпитером больше параболической и комета не вернется, оценивается в 1 балл. Максимум за задачу – 8 баллов.

Задание 3

Условие. Известно, что Плутон в течение своего периода обращения вокруг Солнца 20 лет проводит внутри орбиты Нептуна. Определите, какое время Нептун проводит вне орбиты Плутона. Считайте, что обе орбиты лежат в одной плоскости, а орбита Нептуна круговая. Решение дополните чертежом.

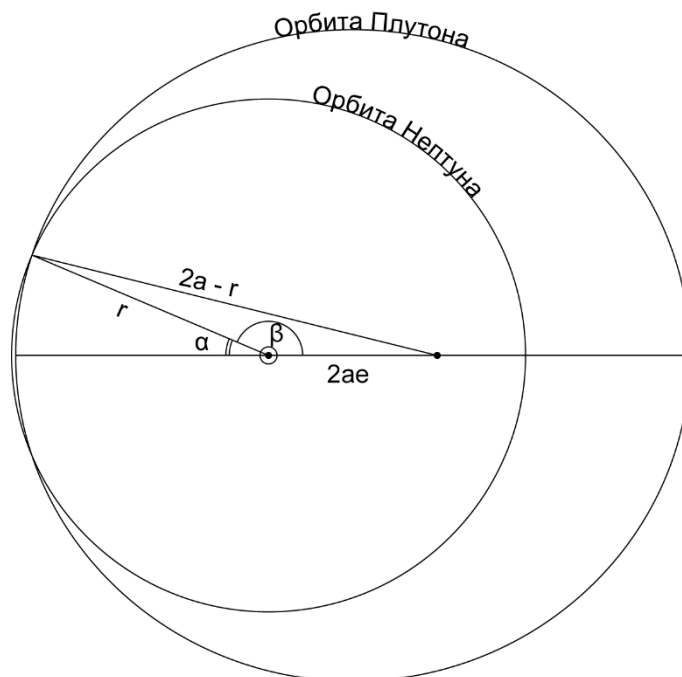
Решение. *Условие данной задачи оказалось несогласованным. Дело в том, что орбиты Плутона и Нептуна в исследуемом участке близки друг к другу. Поэтому, слегка изменив расстояние Нептуна от Солнца, мы получаем значительно различающиеся интервалы времени нахождения Нептуна внутри орбиты Плутона и, разумеется, Плутона вне орбиты Нептуна. Как ни мал эксцентриситет орбиты Нептуна, он вносит значительный вклад в решение. Если бы Нептун двигался по абсолютно круговой орбите, то Плутон вне орбиты Нептуна находился бы не 20 лет, как это было в XX в., а всего немногим больше 17 лет.*

По этой причине ниже приводятся два совершенно правильных решения, которые дают в итоге несколько разные ответы.

Пусть r – радиус орбиты Нептуна, а a и e – большая полуось и эксцентриситет орбиты Плутона. Определим угол между направлением на перигелий орбиты Плутона и на точку, где расстояние Плутона равно радиусу орбиты Нептуна. Смежный угол β можно найти из теоремы косинусов:

$$(2a - r)^2 = r^2 + (2ae)^2 - 4aer \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{r^2 + 4a^2e^2 - 4a^2 - r^2 + 4ar}{4aer} = \frac{r - a(1 - e^2)}{er} \approx -0,9328$$



Отсюда получаем, что $\beta \approx 158,87^\circ$, а искомый угол $\alpha = 180^\circ - \beta = 21,13^\circ$.

Значит, Нептун оказывается вне орбиты Плутона в течение $2\alpha/360^\circ \approx 0,117$ части своего оборота вокруг Солнца, или 19,3 года. Сидерический период Нептуна можно взять в таблице или рассчитать по 3-му закону Кеплера.

Для решения можно воспользоваться также уравнением эллипса в полярных координатах:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \alpha}.$$

Отсюда сразу можно определить угол α .

Легко заметить, что получившееся время меньше 20 лет, что указывает на ошибочность решения, поскольку на данном участке орбиты Нептун должен двигаться медленнее. На самом деле, проблема именно в том, что в данной модели (заданной в условии) ошибочно значение 20 лет.

Можно предложить более простое и «астрономическое» решение. Пути Плутона и Нептуна между точками пересечения их орбит будем считать одинаковыми. Значит, время, за которое планеты проходят это расстояние, различается во столько раз, во сколько раз различаются их орбитальные скорости. Для Плутона учтём эксцентриситет и получим

$$\frac{V_H}{V_{\Pi}} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \times \sqrt{\frac{a_{\Pi}}{a_H}} = 0,889.$$

Отсюда искомое время 22,5 года.

Рекомендации для жюри. Данную задачу можно решать разными методами, которые могут отличаться от приведённых выше. Если участник олимпиады выбрал точный геометрический метод, то максимальная оценка за задачу составляет 8 баллов. Из них 2 балла за правильное понимание геометрической модели задачи, 3 балла за вычисление угла α (если этот угол вычисляется в несколько шагов, то эти баллы делятся в соответствии с числом шагов и их сложностью), 1 балл за вычисление доли орбиты Нептуна на, которой он ближе к Солнцу, и 2 балла за правильное определение искомого времени. Надо иметь в виду, что, при использовании малого числа значащих цифр при вычислении, ответ может получаться вплоть до 22,5 лет. Снижать балл за это не надо.

При использовании «астрономического» метода, подобного приведённому выше, максимальная оценка также составляет 8 баллов. Если при этом не учтено, что скорость Плутона на этом участке орбиты больше средней (не учитывается эксцентриситет), то оценка не может превышать 2 балла.

Задание 4

Условие. Представьте себе, что на Луне построили сквозной тоннель от северного полюса до южного. Какую минимальную скорость нужно придать телу, находящемуся в центре Луны, чтобы оно навсегда улетело? За какое время в этом случае тело достигнет лунного полюса? Влиянием Земли и Солнца пренебречь. Считать, что плотность Луны распределена равномерно.

Решение. Как известно, гравитационное ускорение, действующее на тело, равно

$$a = -G \frac{M(r)}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная, r – расстояние до центра Луны, $M(r)$ – масса заключённая в сферу радиуса r . Поскольку $M(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$,

$$a = -\frac{4}{3} \pi G \rho r = -kr.$$

Мы получили уравнение гармонических колебаний. Точно такое же уравнение описывает колебания пружинного маятника.

Потенциальная энергия пружинного маятника равна $\frac{mkr^2}{2}$, а кинетическая $\frac{mv^2}{2}$.

Тело, запущенное из центра Луны, в начальный момент времени обладает только кинетической энергией. Для того чтобы оно навсегда улетело от Луны, на поверхности Луны его скорость должна быть равна второй космической или больше. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_{II}^2}{2} + \frac{mkR}{2},$$

где R – радиус Луны, а v_{II} – вторая космическая скорость для Луны. Отсюда находим v :

$$v = \sqrt{v_{II}^2 + kR^2} = \sqrt{\frac{2GM}{R} + \frac{4}{3} \pi G \rho R^2} = \sqrt{3 \frac{GM}{R}} = 2,9 \text{ км/с.}$$

Следует заметить, что величина $\frac{mkR}{2}$ – это энергия, которая необходима телу, чтобы из центра Луны долететь до её поверхности. Поэтому допустимо сначала определить скорость тела v_0 , необходимую для достижения поверхности, а затем рассчитать искомую скорость по формуле

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_{II}^2}.$$

Известно, что уравнение гармонических колебаний имеет решение в виде

$$r = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right),$$

а скорость в каждой точке описывается уравнением

$$v = A \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Период колебаний можно вычислить по такой же формуле, как и период

колебаний пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{k^{-1}} \approx 6500 \text{ с} \approx 1,8 \text{ часа.}$$

В начальный момент времени $t = 0$ скорость тела равна 2,9 км/с. Отсюда получаем амплитуду колебаний, т. е. высоту, на которую взлетело бы тело, если бы Луна была гораздо больше и тело за её пределы не вылетало:

$$A = \frac{vT}{2\pi} = 3000 \text{ км.}$$

Зная амплитуду и приравнивая $r = R$, получаем

$$t = \frac{T}{2\pi} \arcsin\left(\frac{R}{A}\right) \approx 640 \text{ с.}$$

Рекомендации для жюри. За правильное определение характера движения тела внутри Луны выставляется 1 балл. Правильное вычисление искомой скорости – 3 балла. При этом ученик может отдельно вычислить скорость, необходимую для достижения поверхности Луны (1 балл), вторую космическую скорость (1 балл) и уже после этого вычислить искомую скорость, как это показано в решении (1 балл). Если же для вычисления искомой скорости ученик складывает полученные скорости v_0 и v_{II} , то оценка за этот этап задачи снижается на 2 балла (1 балл вместо 3). Вычисление периода колебаний оценивается ещё в 1 балл. Использование зависимости расстояния и скорости тела от времени оценивается в 1 балл, определение амплитуды колебаний – 1 балл. Определение времени достижения поверхности – ещё 1 балл. Максимум за задачу – 8 баллов.

Задание 5

Условие. Известно, что за время жизни на главной последовательности звёзды расходуют около 10% содержащегося в них водорода. Время жизни Солнца на главной последовательности составляет 10^{10} лет. Оцените минимально возможную массу красных гигантов, которые могут существовать на текущий момент.

Решение. Для ответа на вопрос надо оценить массу самых маломассивных звёзд, которые могли пройти стадию главной последовательности за время жизни Вселенной. Пусть E – энергия, излучаемая звездой за всё её время жизни на главной последовательности T . Эта энергия возникает из-за наличия дефекта массы, а именно, масса четырёх протонов превышает массу образованного ими ядра атома гелия. Значит, выделяемая энергия прямо пропорциональна израсходованной массе, которая прямо пропорциональна полной массе звезды, т. е. $E \propto M$. Отсюда время жизни на главной последовательности

составляет $T = E / L$, где L – светимость звезды.

Для звёзд на главной последовательности существует зависимость между массой звезды и её светимостью в виде $L \propto M^\alpha$, где α близко к 4 для звёзд с массой, меньшей солнечной вплоть до $0,1M_0$. Тогда

$$T \propto \frac{M}{M^4} = M^{-3}.$$

Сравнивая звезду с Солнцем и предполагая возраст звезды равным возрасту Вселенной, получаем

$$M = M_0 \sqrt[3]{\frac{T_0}{T}} = 0,9M_0.$$

Здесь T_0 – возраст Вселенной.

Рекомендации для жюри. В принципе, задачу можно решить несколько проще, указав, что время жизни Солнца несколько меньше современного возраста Вселенной, поэтому масса красных гигантов будет несколько меньше массы Солнца. Такое решение следует оценивать не более чем в 4 балла.

Определение зависимости запасов энергии звезды от массы оценивается в 2 балла. Указание зависимости масса-светимость – ещё в 2 балла. Значение коэффициента α в литературе приводится несколько различным, поэтому небольшие отклонения от 4 (± 0.5) не должны влиять на оценку. Величина 2,6, получаемая в другой задаче данного комплекта, здесь не подходит, поскольку получена по совершенно другой группе звёзд. Окончательный вывод оценивается в 4 балла. Максимум за задачу – 8 баллов.

Задание 6

Условие. Телескоп с диаметром объектива 3 м и относительным отверстием $f/10$ оснащён ПЗС-матрицей размером 2048×2048 пикселей при размере одного пикселя 9×9 мкм. Можно ли с помощью этого телескопа сфотографировать двойную звезду, расстояние между компонентами которой равно $1,5''$? $2,5''$? $3,5''$?

Решение. Угловые размеры указанных двойных звёзд близки к пределу разрешения человеческого глаза. Диаметр объектива телескопа многократно больше, поэтому он гарантированно разрешит эти звёзды. Атмосферное качество изображения может составлять до $1''$, так что тоже не мешает получить качественное изображение в фокальной плоскости.

Относительное отверстие – это отношение диаметра объектива к его фокусному расстоянию. Отсюда фокусное расстояние этого телескопа $F = 10D = 30$ м (D – диаметр телескопа). Масштаб в фокальной плоскости равен 30 м/рад $\approx 8,7$ мм/'. Тогда линейное расстояние между звёздами составляет 13 мм, 22 мм и 31 мм.

Линейный размер матрицы равен $18,4 \times 18,4$ мм, а её диагональ 26 мм.

Получается, что при расстоянии между компонентами двойной звезды 1,5' и 2,5' её можно заснять на один кадр (в последнем случае потребуется удачная ориентация матрицы), а при расстоянии 3,5' оба компонента двойной на матрицу одновременно попасть не смогут.

Рекомендации для жюри. Определение габаритов матрицы в линейных единицах стоит 1 балл. Определение величины фокусного расстояния телескопа оценивается в 2 балла. Масштаб и вычисление линейного расстояния между звёздами в фокальной плоскости оцениваются в 2 балла. Окончательный вывод о возможности/невозможности фотографирования – по 1 баллу за каждое расстояние. Максимум за задачу – 8 баллов.

Задание 7

Условие. Известно, что для звёзд главной последовательности существует зависимость между массой звезды и её светимостью в виде $L \propto M^\alpha$. На основании данных характеристик 20 звёзд определите величину α .

| № | M/M_0 | $\pi, ''$ | m_v | Спектральный класс |
|----|---------|-----------|-------|--------------------|
| 1 | 0,49 | 0,170 | 8,0 | M1V |
| 2 | 0,49 | 0,105 | 8,9 | M1V |
| 3 | 0,49 | 0,129 | 8,5 | M1V |
| 4 | 0,43 | 0,114 | 11,0 | M2V |
| 5 | 0,43 | 0,104 | 9,4 | M2V |
| 6 | 0,43 | 0,129 | 10,5 | M2V |
| 7 | 0,36 | 0,123 | 11,0 | M3V |
| 8 | 0,2 | 0,207 | 11,2 | M4V |
| 9 | 0,28 | 0,180 | 11,1 | M4V |
| 10 | 0,28 | 0,141 | 11,7 | M4V |
| 11 | 0,18 | 0,224 | 12,3 | M5V |
| 12 | 0,16 | 0,105 | 12,8 | M5V |
| 13 | 0,14 | 0,115 | 13,3 | M6V |
| 14 | 0,10 | 0,145 | 13,6 | M6V |
| 15 | 0,10 | 0,387 | 12,5 | M6V |
| 16 | 0,09 | 0,387 | 13,0 | M4V |
| 17 | 0,08 | 0,278 | 14,8 | M8V |
| 18 | 0,09 | 0,192 | 14,1 | M7V |
| 19 | 0,09 | 0,230 | 13,4 | M7V |
| 20 | 0,08 | 0,246 | 14,5 | M8V |

Здесь M/M_0 – масса звезды в массах Солнца, π – тригонометрический параллакс в секундах дуги, m_v – видимая звёздная величина.

Решение. Для того чтобы можно было воспользоваться линейным приближением выразим все величины исходной формулы в солнечных единицах и прологарифмируем полученное выражение:

$$\lg\left(\frac{L}{L_0}\right) \propto \lg\left(\frac{M}{M_0}\right).$$

Отношение масс задано. Чтобы найти светимости, нужно сделать некоторые вычисления. Поскольку все исследуемые звёзды являются красными карликами с достаточно большой для красных карликов видимой звёздной величиной, все они расположены в пределах нескольких парсек, а значит, межзвёздное поглощение для них можно не учитывать. Тогда абсолютная звёздная величина в полосе V будет равна

$$m'_v = m_v + 5 + 5\lg\pi.$$

Для определения светимости нам нужна не видимая, а болометрическая звёздная величина. Для этого нужно воспользоваться болометрической поправкой:

$$m'_{bol} = m'_v + B.C. = m_v + 5 + 5\lg\pi + B.C.$$

Болометрические поправки даны в справочных материалах для звёзд спектральных классов $M0V$ и $M5V$. Для остальных спектральных классов болометрические поправки определяются интерполяцией/экстраполяцией указанных значений. Наконец, определим логарифм отношения светимостей из закона Погсона:

$$\lg\left(\frac{L}{L_0}\right) = -0.4(m'_{bol} - m'_0),$$

где m'_0 – болометрическая звёздная величина Солнца.

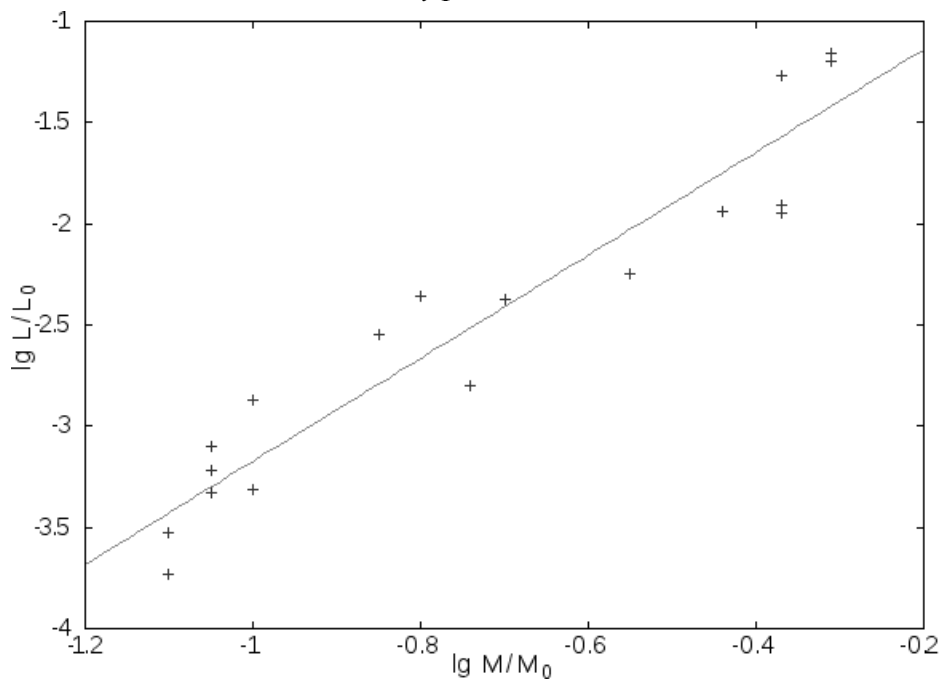
В таблице ниже приводятся вычисленные величины визуальной и болометрической звёздной величины и логарифм светимости звёзд в светимостях Солнца.

| № | m'_v | m'_{bol} | $\lg(L/L_0)$ | № | m'_v | m'_{bol} | $\lg(L/L_0)$ |
|---|--------|------------|--------------|----|--------|------------|--------------|
| 1 | 9,1 | 7,69 | -1,20 | 11 | 14,0 | 11,70 | -2,8 |
| 2 | 9,0 | 7,59 | -1,16 | 12 | 12,9 | 10,60 | -2,36 |
| 3 | 9,0 | 7,59 | -1,16 | 13 | 13,6 | 11,08 | -2,55 |
| 4 | 11,2 | 9,57 | -1,95 | 14 | 14,4 | 11,88 | -2,87 |
| 5 | 9,5 | 7,87 | -1,27 | 15 | 15,5 | 12,98 | -3,31 |
| 6 | 11,1 | 9,47 | -1,91 | 16 | 16,0 | 13,03 | -3,33 |

| | | | | | | | |
|----|------|-------|-------|----|------|-------|-------|
| 7 | 11,4 | 9,54 | -1,94 | 17 | 17,0 | 14,03 | -3,73 |
| 8 | 12,7 | 10,62 | -2,37 | 18 | 15,5 | 12,76 | -3,22 |
| 9 | 12,4 | 10,32 | -2,25 | 19 | 15,2 | 12,46 | -3,10 |
| 10 | 12,4 | 10,32 | -2,25 | 20 | 16,5 | 13,53 | -3,53 |

Легко можно убедиться, например, построив график зависимости $\lg(L/L_0)$ от $\lg(M/M_0)$, что экспериментальные точки не лежат на одной прямой, хотя и примерно придерживаются линейной зависимости. Провести прямую наилучшим образом можно с помощью метода наименьших квадратов (приведен в справочных данных). Принимая $\lg(M/M_0)$ за x , а $\lg(L/L_0)$ за y можно записать:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$



Здесь $N = 20$ – число экспериментальных точек, x_i и y_i – индивидуальные значения аргумента и функции, \bar{x} – среднее значение x_i .

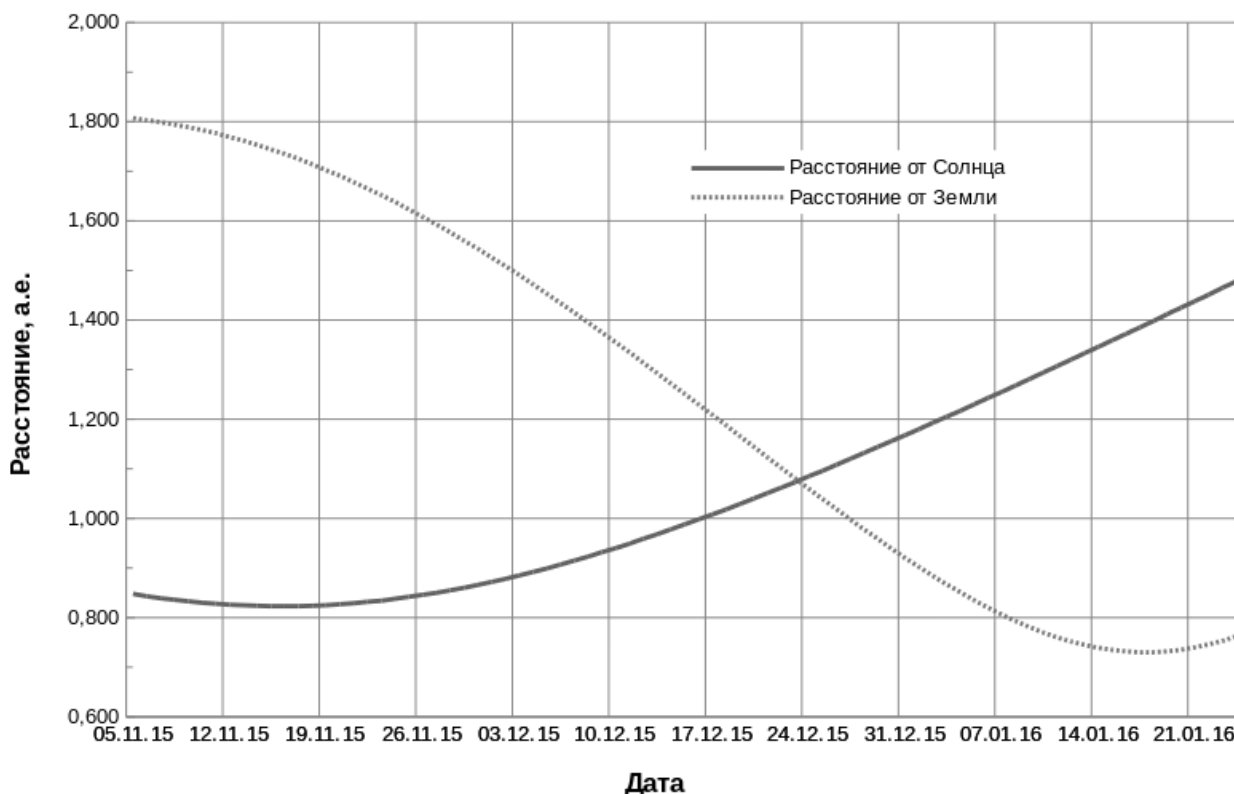
Среднее значение величины $\lg(M/M_0)$ равно $-0,7$, а для $\lg(L/L_0)$ оно равно $-2,4$. Величина α оказывается равной $2,6$. Полученная величина отличается от привычного значения, примерно равного 4 , поскольку определена на группе красных карликов.

Рекомендации для жюри. Основная идея задачи – это поиск коэффициента в линейной зависимости. Первый шаг здесь – это логарифмирование исходного выражения (2 балла). Определение абсолютной звёздной величины в полосе V

оценивается в 4 балла. Использование болометрической поправки – ещё 4 балла (без использования болометрической поправки получаем $\alpha = 3,2$). Верный переход от звёздной величины к светимости оценивается в 2 балла. Наконец, вычисление искомого коэффициента оценивается в 4 балла. Если аппроксимация наблюдательных точек проводится приблизительно, без использования МНК, то оценка за последний этап не более 1 балла. Максимум за задачу – 16 баллов.

Задание 8

Условие. На графике изображено изменение расстояния от кометы C/2013 US10 (Catalina) до Солнца и до Земли за период с начала ноября 2015 г. по конец января 2016 г. За это время блеск кометы практически не менялся, оставаясь всё время примерно равным 6.3^m . Считая, что частицы комы и хвоста кометы рассеивают свет одинаково во всех направлениях, определите относительную амплитуду изменения массы пылевых частиц за время наблюдения. Чему была равна максимальная масса комы и хвоста (т. е. пыли вокруг кометы)? Считайте пылинки круглыми с радиусом 1 мкм и плотностью 1 г/см^3 .



Решение. Комета сама не излучает, а лишь переизлучает солнечный свет. Создаваемая ей освещённость есть

$$E = \frac{L_0}{4\pi R^2} \frac{\alpha}{4\pi D^2},$$

где L_0 – светимость Солнца, R и D – расстояния до Солнца и Земли соответственно. Величина α представляет собой некую эффективную отражающую площадь. Пылевые оболочки кометы крайне разреженные, будем считать, что в отражении участвуют все частицы. Значит, $\alpha \propto \pi r^2 \cdot N$, где r и N – радиус пылинки и их число. Пылинки поступают с ядра кометы, которое очень чёрное, с альбедо 2÷3 %. Такое же альбедо можно приписать и пылинкам. Тогда примем $\alpha = 0,02 \cdot \pi r^2 \cdot N$. Поскольку масса всех пылинок M равна ρVN , где ρ и V – плотность и объём одной пылинки,

$$\alpha = 0,02 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot N \frac{3}{4r\rho} = \frac{0,015}{r\rho} M.$$

Если блеск кометы не изменяется, создаваемая ею освещённость тоже постоянна. Тогда отношения освещённостей в два разных момента времени составляют

$$\frac{M_1 \left(\frac{R_2 D_2}{R_1 D_1} \right)^2}{M_2} = 1,$$

$$M_1 = M_2 \left(\frac{R_1 D_1}{R_2 D_2} \right)^2.$$

Взяв положение кометы в какую-либо дату за опорное, получаем, что проведя несколько измерений, можно определить, что минимальная масса пыли была в самом начале рассматриваемого временного отрезка 5 ноября, а максимальная масса – 12 января. Отношение этих масс составляет примерно 2,4.

Найдём полную массу пыли 12 декабря. Звёздная величина Солнца равна $-26,7^m$. Отсюда получаем величину α :

$$\alpha = 4\pi \cdot 10^{-0,4(6,3+26,7)} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 D^2,$$

где R_0 – расстояние от Земли до Солнца. Подставляя значения на 12 января ($R = 1,3$ и $D = 0,75$) получаем $\alpha \approx 17\,000 \text{ км}^2$. Значит, полное число частиц равно

$$N = \frac{50\alpha}{\pi r^2} \approx 2,7 \cdot 10^{23},$$

а полная масса составляет примерно 10^9 кг или миллиард тонн.

Рекомендации для жюри. Для решения этой задачи участник олимпиады должен определить зависимость освещённости, создаваемой кометой, от расстояния до Земли и Солнца, а также массы или эффективной площади кометы. Правильная формула с эффективной площадью оценивается в 3 балла, переход от площади к массе – ещё в 2. Вывод о равенстве освещённостей и следующая из него формула для определения отношения масс стоят 1 балл, за

определение даты максимальной и минимальной массы даётся по одному баллу, а за искомое отношение масс – ещё 2. Вычисление абсолютного значения массы оценивается в 6 баллов. Участник олимпиады может принять другую величину для альбедо частиц кометы. Если взятое число не превышает 0,2, оценку снижать не следует. Максимум за задачу – 16 баллов.

Максимальное количество баллов за выполнение всех заданий – 80.