

МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО АСТРОНОМИИ. 2018–2019 уч. г.
ОЧНЫЙ ЭТАП. 8–9 КЛАССЫ

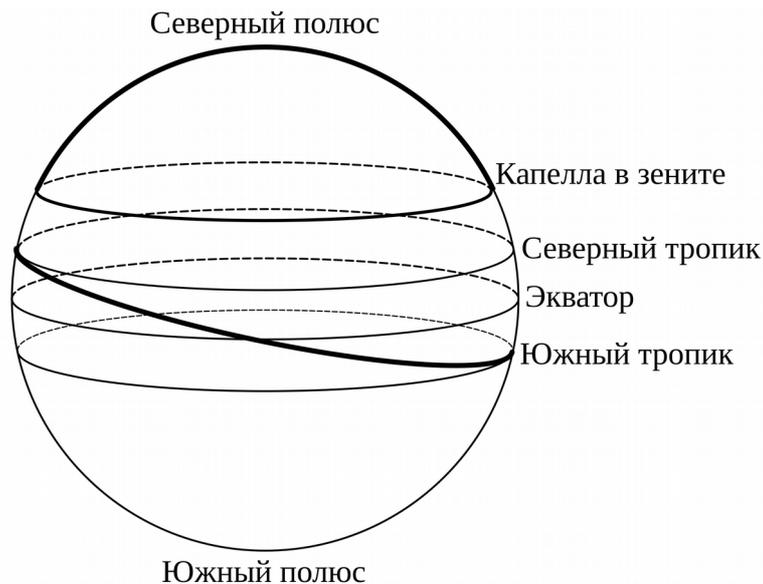
Задача 1

Два школьных приятеля решили найти максимальное расстояние между точками на поверхности Земли, где Солнце (Луна) бывает в зените. Помогите ребятам с рисунком и вычислениями. Чему будет равно такое расстояние для звезды Капелла ($5^{\text{h}}17^{\text{m}}, 46^{\circ}$)? Расстояние измеряется вдоль земной поверхности.

Решение

Солнце бывает в зените на экваторе, а также в местах, заключённых между северным и южным тропиками. Таким образом, зону, где солнце бывает в зените, можно представить в виде пояса на земной поверхности. Для любой точки этого пояса можно найти точку, находящуюся точно с противоположной стороны Земли. Значит, искомое расстояние равно половине окружности Земли. Зная радиус Земли, можем вычислить это расстояние:

$$\pi \cdot 6371 \approx 20000 \text{ (км)}.$$



Орбита Луны немного наклонена к эклиптике. Поэтому она бывает видна в зените в более широком поясе на земной поверхности. Но на решении задачи это никак не отражается. Максимальное расстояние между точками всё так же равно 20000 км.

Любую звезду видно в зените только в том случае, если широта места наблюдения равна склонению звезды. Максимальное расстояние будет между точками на параллели 46° , долготы которых отличаются на 180° . Параллель является малым кругом, в то время как расстояние между точками на сфере вычисляется вдоль большого. В данном случае кратчайшим будет дуга, проходящая через северный полюс. В градусной мере она равна

$$180^{\circ} - 2 \cdot 46^{\circ} = 88^{\circ}.$$

Значит, это расстояние составляет $88/180 = 22/45$ часть от половины длины экватора или примерно 9780 км.

Рекомендации для жюри

Рисунок оценивается из **2 баллов**. Определение расстояния для Солнца – **2 балла**, Луны – ещё **1 балл**. Участник олимпиады не обязан вычислять расстояние между точками из радиуса Земли. Можно воспользоваться другими известными числами, такими как длина экватора или меридиана. Вычисление расстояния для Капеллы оценивается из **3 баллов**. Если расстояние считается вдоль параллели с результатом около 14000 км, то за эту часть решения выставляется **1 балл**.

Максимальная оценка – 8 баллов.

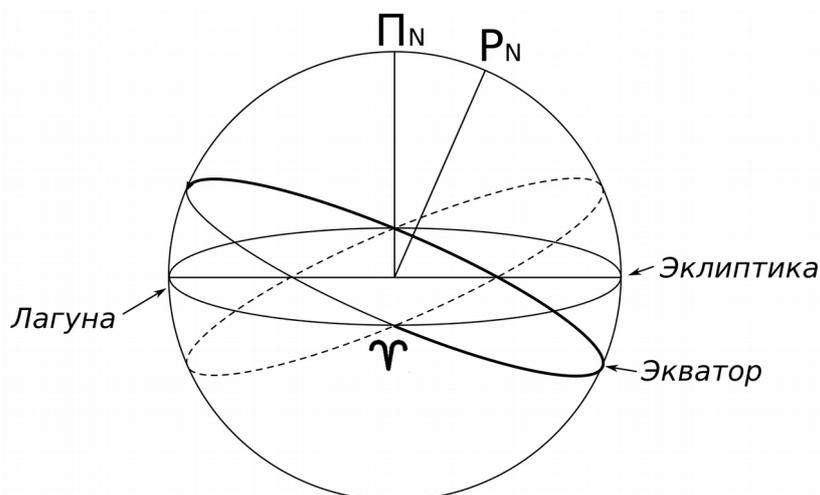
(В. Б. Игнатьев)

Задача 2

Экваториальные координаты туманности М8 «Лагуна» сейчас $18^{\text{h}}03^{\text{m}}$ и $-24,5^{\circ}$. Оцените её текущие эклиптические координаты. Определите, какое максимальное склонение будет иметь эта туманность в течение ближайших 26000 лет? Через какое время это произойдёт?

Решение

Прямое восхождение и эклиптические долготы измеряют от точки весеннего равноденствия в направлении годового движения Солнца вдоль небесного экватора и эклиптики соответственно. В точке весеннего равноденствия Солнце поднимается в северную небесную полусферу. Поэтому северный полюс эклиптики имеет прямое восхождение 18^{h} . Наклон экватора к эклиптике составляет $23,5^{\circ}$. Значит, склонение точки зимнего солнцестояния составляет $23,5^{\circ}$. Можно заметить, что туманность располагается очень близко к точке зимнего солнцестояния.



Поэтому вполне допустимо вычислить её координаты, пренебрегая кривизной небесной сферы:

$$\text{эклиптическая широта } \beta = -24,5^\circ + 23,5^\circ = -1^\circ.$$

$$\text{эклиптическая долгота } \lambda = 18^{\text{h}}03^{\text{m}} = 270^\circ45'$$

Значение λ можно получить немного точнее, приняв во внимание тот факт, что на склонении $-24,5^\circ$ экваториальная координатная сетка по прямому восхождению плотнее в $\cos(24,5^\circ)$ раз, в то время как эклиптическая на широте -1° практически прямоугольная. Отсюда

$$\lambda_1 = (18^{\text{h}}03^{\text{m}} - 18^{\text{h}}) \cdot \cos(24,5^\circ) + 18^{\text{h}} = 18^{\text{h}} 2,7^{\text{m}} = 270^\circ41'.$$

Экваториальные координаты звёзд меняются из-за прецессии земной оси, которая выражается в движении точек равноденствия (и солнцестояния). Через половину периода прецессии (13 000 лет) точки равноденствия поменяются местами, как и точки солнцестояний. Эклиптические координаты туманности не изменятся, но она уже будет рядом с точкой летнего солнцестояния, склонение которой $+23,5^\circ$. А значит, склонение туманности равно $22,5^\circ$.

Рекомендации для жюри

Вычисление эклиптических координат оценивается **по 2 балла**. Если в качестве координат туманности принимаются координаты точки зимнего солнцестояния, то выставляется **по 1 баллу** за каждую координату. Определение максимального склонения оценивается ещё в **2 балла**.

Кроме описанного выше способа, участники олимпиады могут применить формулы сферической тригонометрии. Правильное значение эклиптической широты оценивается в **2 балла**. Правильное значение эклиптической долготы оценивается в **2 балла**. Необходимо обратить внимание, что школьники 8-9 классов ещё не очень уверенно обращаются с тригонометрическими функциями. Значения эклиптической долготы $5^{\text{h}}57^{\text{m}}$ или $17^{\text{h}}57^{\text{m}}$, связанные с многозначностью обратных тригонометрических функций, оцениваются **не в 2, а в 1 балл**. Прочие значения считаются ошибочными. Дальнейшее вычисление максимального склонения оценивается, как и в предыдущем случае, в **2 балла**.

Определение времени, через которое звезда достигнет максимального склонения оценивается в **2 балла**.

В неправильных или не до конца доведённых решениях может быть поставлен **1 балл** за указание того, что увеличение склонения звезды произойдёт из-за прецессии.

Максимальная оценка – 8 баллов.

(С. Г. Желтоухов)

Задача 3

Астроном хочет взять с собой в поход лупу для разведения огня. У одной линзы фокусное расстояние 20 см и диаметр 5 см, а у другой – фокусное расстояние 50 см, а диаметр 10 см. Какой из них будет легче поджечь тонкую деревянную палочку? Во сколько раз будет отличаться время поджига, если пренебречь потерями тепла палочкой и aberrациями линз?

Решение

Для того чтобы что-то поджечь, необходимо сконцентрировать максимальную энергию на минимальной площади. Вторая линза собирает в $(10/5)^2 = 4$ раза больше солнечной энергии, чем первая. Каждая линза строит в фокальной плоскости изображение Солнца. Площадь этого изображения пропорциональна квадрату фокусного расстояния линзы. Отсюда площадь изображения, создаваемого первой линзой, в $(50/20)^2 = 6,25$ раза меньше, чем площадь изображения второй линзы. Значит, первая линза создаёт в $6,25 / 4 \approx 1,6$ раз большую плотность световой энергии и для розжига подойдёт лучше. Значит, во столько раз отличается время поджига палочки.

Вообще, квадрат отношения диаметра линзы к её фокусному расстоянию называется светосилой этой линзы. Светосила как раз и определяет, как быстро линза может набрать нужное количество света. Поэтому, например, фотоаппараты со светосильными объективами требуют меньшее время экспозиции.

Рекомендации для жюри

Выбор правильного ответа без объяснения либо выбор неверного ответа, но с попыткой подсчёта отношений времён поджига через площади или относительное отверстие оценивается в **1 балл**. Правильный выбор более «быстрой» линзы без нахождения отношений времён поджига, но с верным обоснованием, оценивается в **3 балла**. При расчёте времени поджига (с выбором верной более «быстрой» линзы) через относительное отверстие все решение оценивается в **5 баллов**.

Максимальная оценка – 8 баллов.

(С. Г. Желтоухов)

Задача 4

Сигнал от космического аппарата, летающего вокруг Венеры, пришёл в центр управления полётами через 300 секунд после того, как был отправлен. Чему равна фаза Венеры, наблюдаемая с Земли? Радиус орбиты Венеры равен 0,723 а. е. Все орбиты считать круговыми.

Решение

Определим расстояние до Венеры в момент наблюдения:

$$l = c \cdot t = 300\,000 \text{ км/с} \cdot 300 \text{ с} = 90\,000\,000 \text{ км} \approx 0,6 \text{ а.е.}$$

В наибольшей элонгации, когда фаза Венеры равна 0,5, Венера располагается на расстоянии

$$l' = \sqrt{1^2 - 0,723^2} = 0,69 \text{ а.е.}$$

Поскольку Венера располагается немного ближе к нам, чем во время элонгации, её фаза должна быть немного меньше, чем 0,5, а фазовый угол γ – тупой. Учитывая это, из теоремы косинусов получаем

$$\gamma = \arccos\left(\frac{0,723^2 + 0,6^2 - 1^2}{2 \cdot 0,723 \cdot 0,6}\right) = 97,8^\circ.$$

Отсюда фаза Венеры составляет

$$F = \frac{1 + \cos \gamma}{2} = \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 0,43.$$

Рекомендации для жюри

Определение расстояния до Венеры в момент наблюдения оценивается в **2 балла**. Вычисление величины фазового угла или его косинуса оценивается в **3 балла**. Если вместо значения $97,8^\circ$ у участника олимпиады получается значение $82,2^\circ$, то оценка за этот этап **снижается на 1 балл**. Запись правильной формулы для фазы оценивается в **2 балла**. Получение правильного ответа – **1 балл**.

Если участник олимпиады предполагает, что сигнал идёт не по маршруту Венера – Земля, а по маршруту Земля – Венера – Земля, то оценка за первый и последний этапы не выставляется, т. е. максимальная оценка не превышает 5 баллов при правильных остальных вычислениях.

Максимальная оценка – 8 баллов.

(В. Б. Игнатьев)

Задача 5

Противостояние Марса и Сатурна случилось в один день. Какая планета окажется в следующем противостоянии раньше? Какое угловое расстояние будет между Марсом и Сатурном во время следующего противостояния Марса? К западу или к востоку от Марса будет наблюдаться Сатурн? Радиус орбиты Марса равен 1,524 а.е., Сатурна – 9,583 а.е. Орбиты планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

Решение

Из третьего закона Кеплера найдём сидерические периоды планет:

$$T_M = \sqrt{1,524^3} = 1,881 \text{ года.}$$

$$T_S = \sqrt{9,583^3} = 29,67 \text{ года.}$$

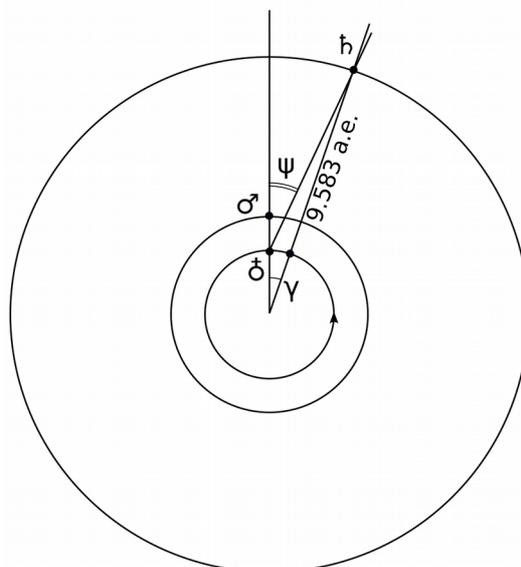
Период времени между двумя одноимёнными конфигурациями – это синодический период. Воспользуемся уравнением синодического движения:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}.$$

Здесь T_0 – сидерический период Земли. Подставляя значения, получаем $S_M = 2,135$ года ≈ 780 сут, $S_S = 1,035$ года ≈ 378 сут. Синодический период Сатурна значительно меньше, а значит, ближайшее противостояние Сатурна случится раньше.

Спустя $S_M \approx 780$ суток после исходного противостояния Сатурн успеет дважды оказаться в противостоянии и с момента предыдущего пройдёт 23,7 дня. За это время Земля обгоняет Сатурн в своём движении по орбите на угол

$$\gamma = 360^\circ \frac{24}{378} \approx 22,9^\circ.$$



Рассмотрим треугольник с вершинами в Земле, Сатурне и Солнце. С помощью теоремы синусов можно определить величину искомого угла ψ между направлениями на Марс и Сатурн с вершиной в Земле:

$$\frac{\sin(\psi - \gamma)}{1} = \frac{\sin(\psi)}{9,583}.$$
$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma - 9,583^{-1}}\right) \approx 25^\circ.$$

Поскольку Земля обгоняет Сатурн, он расположен на небе к западу от Марса.

Рекомендации для жюри

Правильное применение 3 закона Кеплера (или использование эквивалентных формул) оценивается в **1 балл**. Вычисление сидерического периода планет оценивается **1 баллом** (в случае вычислительной ошибки хотя бы для одной планеты этот балл не ставится). Правильное вычисление синодических периодов оценивается также по **1 баллу**. Правильный вывод, что раньше наступит противостояние Сатурна, оценивается **1 баллом**. Вычисление угла ψ оценивается в **2 балла**. Если вместо ψ в ответ выносятся γ , то оценка за этот этап не может быть больше **1 балла**. Вывод о взаимном положении оценивается в **1 балл** в случае наличия правильного обоснования. Без обоснования оценка за этот пункт **0 баллов**.

Максимальная оценка – 8 баллов.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 6

Башня телескопа БТА имеет диаметр основания $D = 45$ метров и высоту купола $H = 53$ метра. БТА расположен в Специальной Астрофизической Обсерватории и имеет координаты $43^\circ 39'$ с. ш. $41^\circ 26'$ в. д. На каком расстоянии от подножья башни фотограф установил свой фотоаппарат, чтобы сделать это фото? Ответ дайте в метрах, округлённых до целых. Отождествите на изображении хотя бы одну звезду. Отметьте её на изображении или опишите положение звезды в тексте. Можно считать, что башня имеет вид полусферы, установленной на цилиндрическое основание.

Склонения некоторых звёзд:

Звезда	Склонение	Звезда	Склонение
Алиот (ϵ UMa)	$56^\circ,0$	Кохаб (β UMi)	$74^\circ,8$
Альбирео (β Cyg)	$28^\circ,0$	Менкалинан (β Aur)	$44^\circ,9$
Альдерамин (α Ser)	$62^\circ,6$	Полярная (α UMi)	$89^\circ,3$
Вега (α Lyr)	$38^\circ,8$	Садр (γ Cyg)	$40^\circ,3$

Денеб (α Cyg)	$45^{\circ},3$	Талита Северная (ι UMa)	$48^{\circ},0$
Дубхе (α UMa)	$61^{\circ},8$	Шедар (α Cas)	$56^{\circ},5$
Капелла (α Aur)	$46^{\circ},0$	Этамин (γ Dra)	$51^{\circ},5$



Решение

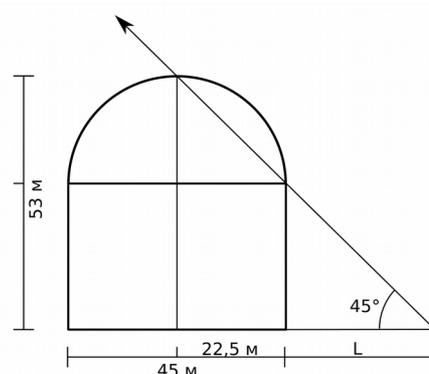
Вариант 1. Задачу можно решить в совсем простом приближении. Направление на вершину башни примерно совпадает с направлением на полюс мира. Высота полюса мира над горизонтом равна широте местности. В данном случае можно округлить до 45° . Тогда высота башни H и расстояние от центра башни до наблюдателя будут равны, поскольку они являются сторонами равнобедренного прямоугольного треугольника. Отсюда расстояние от наблюдателя до основания башни будет равно

$$L = H - D/2 = 53 - 22,5 = 30,5 \text{ м.}$$

Если использовать значение широты, заданное в условии, то

$$L = \frac{H}{\operatorname{tg}(43^{\circ}39')} - \frac{D}{2} = 55,6 - 22,5 \approx 33 \text{ м.}$$

Уже по приведённому рисунку видно, что это решение не совсем правильное, поскольку луч зрения пронзает купол. Поэтому усложним нашу модель.

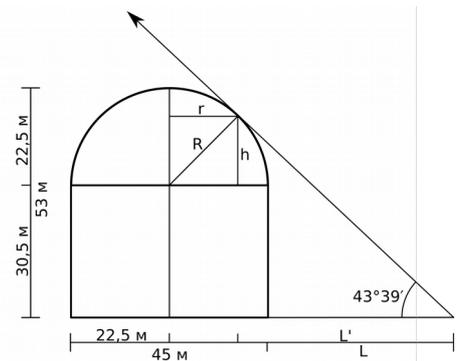


Вариант 2. Поскольку диаметр купола равен 45 метрам, то высота основания равна $H_0 = 53 \text{ м} - 22,5 \text{ м} = 30,5 \text{ м}$. Проведём луч зрения, который касается купола башни. Точка касания будет находиться на расстоянии r от оси симметрии башни и на высоте h от верхней части основания. Тогда высота точки касания над землёй H' равна

$$H' = H_0 + h = H_0 + R \cos(43^\circ 39') = 46,8 \text{ м.}$$

Отсюда расстояние L равно

$$L = \frac{H'}{\operatorname{tg}(43^\circ 39')} + r - R \approx 42 \text{ м.}$$



Вариант 3. Разумеется, предыдущую модель можно улучшить. Легко заметить, что полюс мира находится не на самом вершине купола, а несколько ниже. Чтобы узнать угол между верхней границей купола и полюсом мира, нужно, во-первых, узнать положение полюса мира. Для этого можно, например, провести перпендикуляры к чёрточкам, оставленным звёздами. Эта операция производится с большой погрешностью, поэтому измерения надо произвести неоднократно. Во-вторых, надо определить масштаб фотографии. Для этого нужно отождествить одну или несколько звёзд. Это довольно трудная задача. По сгущению звёзд в верхней части и в левом верхнем углу можно определить, что там должен проходить Млечный Путь. Поэтому Денеб и Вега следует искать слева. Значит, яркая звезда в правом верхнем углу может быть только Капеллой. Вычислив масштаб фотографии, находим, что полюс мира располагается ниже направления на верхний край купола примерно на 5° . Значит, угол между горизонтом и верхней границей купола составляет около $48,5^\circ$. Подставив это значение в формулы для варианта 2, получаем расстояние 35 м.

Рекомендации для жюри

Указание на то, что высота полюса мира равна широте местности, оценивается в **1 балл**. Если решение проводится по *варианту 1*, то определение расстояния до центра башни оценивается в **2 балла**, а расстояние до подножия башни – в **1 балл**. Если решение проводится по *варианту 2*, то оно оценивается уже из **5 баллов**: **2 балла** за определение положения точки касания, **2 балла** за расстояние до центра башни или до проекции точки касания на горизонтальную плоскость и **1 балл** за конечный ответ. Правильное отождествление одной или нескольких звёзд оценивается в **2 балла**. Определение положения полюса мира – **2 балла**. За определение масштаба фотографии выставляется **1 балл**. Вычисление поправки к высоте верхнего края купола – **1 балл**.

Максимальная оценка – 12 баллов.

(М. В. Богданова, Е. Н. Фадеев)

Всего за работу 52 балла.