МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО АСТРОНОМИИ. 2019–2020 УЧ. Г.
ОЧНЫЙ ЭТАП. 10–11 КЛАССЫ

Решения и критерии оценивания

Задача 1

Астроном видит восходящую двойную звезду, состоящую из двух компонент спектральных классов B и G с одинаковой видимой яркостью. Какая из звёзд будет выглядеть ярче во время верхней кульминации на высоте 30°?

Решение

Звезда спектрального класса B излучает больше всего энергии в синей области спектра, а звезда спектрального класса G (похожая на Солнце) – в жёлто-зелёной области спектра. В синей области поглощение света в атмосфере Земли больше, чем в жёлто-зелёной области. Поэтому при восходе первая звезда класса B была в большей степени ослаблена атмосферой Земли, в реальности она ярче, чем вторая звезда класса G. Во время кульминации на высоте 30° атмосферное ослабление будет влиять на видимую яркость звёзд в меньшей степени, чем у горизонта. Следовательно, первая звезда будет выглядеть ярче второй.

Можно добавить, что видимый цвет далёких звёзд может не соответствовать их спектральному классу из-за межзвёздного поглощения света, но так как речь идёт о компонентах двойной звезды, удалённых от Земли на одинаковое расстояние, межзвёздное поглощение не изменит ответ задачи.

Критерии проверки

Указание, что звезда B излучает преимущественно в меньших длинах волн, чем звезда G, **– 1 балл**.

Указание, что атмосферное ослабление света усиливается на меньших длинах волн, **– 1 балл**.

Вывод, что звезда B будет ярче в кульминации, – **2 балла** (при правильных обоснованиях). Угаданный ответ без обоснований – 1 балл.

Учёт варианта межзвёздного поглощения не обязателен, на оценку не влияет.

*Максимальная оценка – **4 балла**.*

(О. С. Угольников)

Задача 2

Один астроном–любитель, проводя наблюдения в самодельный телескоп с окуляром из одиночной линзы, решил попробовать сфотографировать увиденное на камеру мобильного телефона. На каком расстоянии от линзы-окуляра ему нужно располагать телефон? Астроном наблюдает в телескоп с фокусным расстоянием объектива 1.5 м на увеличении в 50 крат.

Решение

Линзу мобильного телефона, как и глаз нужно располагать в выходном зрачке телескопа. Свет от бесконечно удалённых точечных источников приходит в виде параллельных пучков света и, после прохождения оптической системы телескопа, выходит также в виде параллельных пучков. Если несколько источников расположены на разном удалении от оптической оси телескопа, то по выходу из окуляра пучки света от разных источников пересекутся на некотором отдалении от окуляра. Это место и есть выходной зрачок телескопа. Иначе ещё можно сказать, что выходной зрачок – это изображение объектива, созданное окуляром. Для определения его местоположения построим лучи от нескольких точек поля зрения телескопа, проходящих через центр объектива (рис. 1). Эти лучи не преломляются объективом и каждому из них соответствует пучок выходящий из окуляра (соответственно точка их пересечения и является положением выходного зрачка).

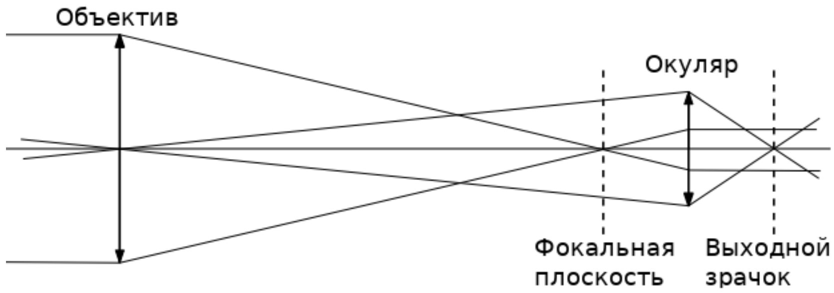

Рисунок 1: Построение выходного зрачка

Таким образом, плоскость выходного зрачка можно найти, построив изображение объектива телескопа окуляром. Действительно, на рисунке три луча вышли из центра объектива и сошлись в центре выходного зрачка – соответственно эти точки являются изображениями друг друга. Чтобы найти расстояние от зрачка до линзы воспользуемся формулой тонкой линзы.

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{F+f}+\frac{1}{d}$$

где f – фокусное расстояние окуляра, F – фокусное расстояние объектива и d – искомое расстояние. $F+f$ – это расстояние между окуляром и объективом для сфокусированного телескопа. Зная увеличение телескопа Γ и фокусное расстояние объектива, вычисляем f:

$$f=\frac{F}{\Gamma}=\frac{1500\,\text{мм}}{50}=30\,\text{мм}.$$

Вычисляем искомое расстояние до выходного зрачка:

$$d=(F+f)\cdot\frac{f}{F}=\left(1+\frac{1}{\Gamma}\right)f=30.6\text{ мм}.$$

Как видим оно мало отличается от фокусного расстояния окуляра.

Критерии проверки

Вычисление фокусного расстояния окуляра – **1 балл**.

Вывод о том, что камера должна быть расположена в выходном зрачке, – **1 балл**.

Описание метода нахождения местоположения выходного зрачка – **1 балл**.

Получение правильного ответа – **1 балл**.

Максимальная оценка– ***4 балла****.*

(С. Г. Желтоухов)

Задача 3

Концентрация частиц солнечного ветра вблизи орбиты Земли $n \approx 10$ см$^{-3}$. Считая, что скорость солнечного ветра не зависит от расстояния и равна 470 км/с, найдите массу вещества ветра, находящегося внутри орбиты Нептуна. Ответ выразите в массах Земли.

Решение

Будем считать, что солнечный ветер представляет собой электрически нейтральную плазму, состоящую из протонов и электронов. Это означает, что половина частиц солнечного ветра протоны, а половина – электроны, и $n_p = n_e \approx 5$ см$^{-3}$. Электроны в 1836 раз легче протонов и поэтому практически не вносят вклад в массу. Найдём массу сферического слоя толщиной $\Delta r = 1$ см на расстоянии R. Объём этого слоя равен

$$\Delta V=\frac{4}{3}\pi(R+\Delta r)^3-\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Поскольку $R \gg \Delta r$, то эту формулу можно упростить, раскрыв скобки и оставив только слагаемое пропорциональное Δr:

$$\Delta V=\frac{4}{3}\pi(R^3+3R^2\Delta r+3R\Delta r^2+\Delta r^3)-\frac{4}{3}\pi R^3\approx 4\pi R^2\Delta r.$$

Тогда искомая масса слоя равна: $m=4\pi R^2\Delta r\cdot n_p\cdot m_p$. На расстоянии 1 а. е. от Солнца $m = 23.5$ кг.

Постоянство скорости говорит о том, что сброшенные слои солнечного ветра не перемешиваются. А значит, масса каждого слоя толщиной 1 см одинакова. Отсюда, полная масса вещества солнечного ветра внутри орбиты Нептуна:

$$M = m \cdot R_N(\text{см}) \approx 1.1 \cdot 10^{16}\ \text{кг}$$

или $1.8 \cdot 10^{-9}$ $M_З$.

Альтернативный вариант решения: поток протонов солнечного ветра через сферу радиусом R_N с центром в Солнце равен $\Phi = n_p v S = 4\pi n_p v R_N^2$. Все протоны, находящиеся в какой-то момент времени внутри орбиты Нептуна пройдут через эту сферу за время $t = R_N / v$. Отсюда, общая масса этих частиц равна $M = \Phi m_p t = 4\pi n_p m_p R_N^3$.

Критерии проверки.
Верное представление о составе вещества солнечного ветра (допускается корректный учёт и более тяжёлых составляющих) – **1 балл**. Учёт того, что концентрация протонов равна концентрации электронов, – **1 балл**.

Верный вывод или запись формулы для объёма сферического слоя – **1 балл**. Заключение о том, что масса сферического слоя не зависит от скорости частиц – **1 балл**.

Верное вычисление массы шарового слоя (или верное включение соответствующих величин в итоговую формулу) – **2 балла**.

Верный ответ в кг (если он приведён отдельно, если нет – то соответствующая оценка входит в следующий этап) – **1 балл**.

Верный ответ в массах Земли – **1 балл**.

*Максимальная оценка– **8 баллов**.*

(А. М. Татарников)

Задача 4

Между звездой и наблюдателем поместили кювету в форме куба очень большого размера заполненную дымом. Луч зрения падает на грань куба под прямым углом. Измерения поглощения света показали, что оптическая толща дыма составила 0.10. После измерений длину куба в направлении звезда–наблюдатель уменьшили в 2 раза, передвинув одну из стенок кюветы так, что весь дым остался внутри. Какова будет оптическая толща после этого? Чему стало бы равно поглощение света в звёздных величинах, если бы таким же образом передвинули стенку, параллельную линии «звезда–наблюдатель»?

Решение
Как известно, оптическая толща среды вычисляется по формуле: $\tau = n \sigma l$, где n – концентрация поглощающих частиц, σ – сечение взаимодействия

(в простейшем случае – площадь поперечного сечения частицы), l – длина пути луча света внутри поглощающей среды.

Легко увидеть, что в первом случае величина оптической толщи не изменится – в 2 раза уменьшится длина пути l и в 2 же раза увеличится концентрация частиц n (в следствие уменьшения объёма куба в 2 раза из-за изменения l).

Во втором случае, как видно из формулы, оптическая толща изменится. Длина пути света в среде l останется прежней, а концентрация n станет в 2 раза больше из-за уменьшения объёма кюветы в 2 раза при перемещении стенки. Таким образом, во втором случае τ = 0.2. Чтобы выразить поглощение в звёздных величинах надо вспомнить связь $\Delta m \approx 1.086\tau$. Таким образом, поглощение составит примерно 0.22^m.

Последнюю формулу несложно вывести. По определению, световой поток I_0 после прохождения оптической толщи τ ослабевает в $e^{-\tau}$ раз. Отношение ослабленного и исходного потоков излучения также можно записать с помощью формулы Погсона. Тогда получаем

$$\frac{I}{I_0} = 10^{-0.4\Delta m} = e^{-\tau} .$$

Возьмём десятичный логарифм от левой и правой частей второго уравнения, а затем применим формулу перехода к другому основанию логарифма:

$$\lg 10^{-0.4\Delta m} = \lg e^{-\tau} = \frac{\ln e^{-\tau}}{\ln 10} ,\ 0.4\Delta m = \frac{\tau}{\ln 10} ,\ \Delta m = \frac{2.5}{\ln 10}\tau \approx 1.086\tau .$$

Критерии проверки

Запись верного ответа по первому вопросу – **1 балл** (вне зависимости от наличия обоснования). Обоснование (с формулой или без неё) ответа на первый вопрос – **2 балла**.

Запись верного ответа в звёздных величинах по второму вопросу – **1 балл** (вне зависимости от наличия обоснования). Обоснование (с формулой или без) верного значения τ для второго случая – **2 балла**.

Запись (или вывод) связи поглощения в звёздных величинах и оптической толщи – **2 балла**.

В случае отсутствия решения и вычислений запись верной формулы для вычисления оптической толщи оценивается в **1 балл** (например, приведена только формула и верные числовые ответы: общая оценка за задачу – 3 балла)

Максимальная оценка – ***8 баллов.***

(А. М. Татарников)

Задача 5

Рано или поздно газ на Земле закончится, и поэтому его придётся добывать на других телах Солнечной системы. Например, на Титане, имеющем настолько плотную атмосферу, что её давление на поверхности составляет 1.5 атмосферного давления у поверхности Земли. В основном она состоит из азота (96% от общего числа молекул) и метана (примерно 4% от общего числа молекул). На сколько лет хватит метана из атмосферы Титана землянам, если предположить, что мировое потребление газа будет неизменным и равным примерно 3700 млрд м^3/год? Плотность метана при земных условиях ρ = 0.67 кг/м^3.

Известно, что при горении одного моля метана выделяется q = 891 кДж энергии. Оцените светимость воображаемой звезды, источником энергии которой была бы данная порция метана, потребляемая с указанным выше расходом.

Радиус Титана R = 2576 км, а его масса M = 1.35·10^{23} кг.

Решение

Вначале оценим массу атмосферы Титана. Ускорение силы тяжести на его поверхности $g=GM/R^2$. Давление на поверхности равно силе тяжести, отнесённой к площади поверхности. Считая, что основная часть атмосферы Титана заключена в тонком приповерхностном слое, пренебрежём изменением g с высотой. Тогда получаем:

$$p=\frac{mg}{S}=\frac{m}{4\pi R^2}\cdot\frac{GM}{R^2}=\frac{m\cdot GM}{4\pi R^4},$$

откуда масса атмосферы Титана

$$m=\frac{4\pi R^4}{GM}\cdot p\approx\frac{4\cdot\pi\cdot(2576\cdot10^3)^4}{6.67\cdot10^{-11}\cdot1.35\cdot10^{23}}\cdot1.5\cdot101325\approx9.34\cdot10^{18}\text{ кг.}$$

Пусть μ_1 – молярная масса метана CH_4, равная 12 + 4 · 1 = 16 г/моль, а μ_2 – молярная масса азота N_2, равная 2 · 14 = 28 г/моль, а ν_1 и ν_2 – количества этих газов в атмосфере Титана. Тогда

$$m=\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2.$$

Пусть η – доля метана от общего числа частиц. Тогда

$$\eta=\frac{\nu_1}{\nu_1+\nu_2},\text{ и }\nu_2=\frac{1-\eta}{\eta}\nu_1.$$

Используя выражение для массы атмосферы, получим

$$m = \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \frac{1-\eta}{\eta} \nu_1.$$

Тогда количество метана в атмосфере Титана

$$\nu_1 = \frac{m}{\mu_2 \cdot \frac{1-\eta}{\eta} + \mu_1} = \frac{\eta \cdot m}{\mu_2 (1-\eta) + \mu_1 \eta} \approx \frac{0.04 \cdot 9.34 \cdot 10^{18}}{0.028(1-0.04) + 0.016 \cdot 0.04} \approx 1.36 \cdot 10^{19} \text{ моль},$$

а его масса –

$$m_1 = \mu_1 \nu_1 = \frac{\mu_1 \eta}{\mu_2 (1-\eta) + \mu_1 \eta} \cdot m \approx 0.016 \cdot 1.36 \cdot 10^{19} \approx 2.17 \cdot 10^{17} \text{ кг}.$$

В год население Земли потребляет массу метана $m_0 = \rho V = 0.67 \cdot 3700 \cdot 10^9 \approx 2.48 \cdot 10^{12}$ кг. Так что метана из атмосферы Титана хватит землянам на

$$\tau = \frac{m_1}{m_0} \approx \frac{2.17 \cdot 10^{17}}{2.48 \cdot 10^{12}} = 87.5 \text{ тыс. лет}.$$

Пусть $\nu_0 = m_0 / \mu_1$ – количество метана, потребляемое землянами за один год. При таком потреблении за $\tau_0 = 1$ год выделяется энергия $E_0 = \nu_0 q$. Искомая светимость воображаемой звезды:

$$L = \frac{E_0}{\tau_0} = \frac{m_0 q}{\mu_1 \tau_0} = \frac{2.48 \cdot 10^{12} \cdot 891 \cdot 10^3}{0.016 \cdot (365.25 \cdot 86400)} = 4.38 \cdot 10^{12} \text{ Вт}.$$

Критерии проверки

Оценка массы атмосферы Титана оценивается в **2 балла**.

За правильный расчёт количества и массы метана, отличающиеся от верных не более, чем на порядок, участник получает по **1 баллу**.

За оценку времени потребления запасов метана в атмосфере Титана присуждается **2 балла**. Также **2 балла** ставится за светимость газовой «звезды». Если любой из этих двух окончательных ответов отличается от верного не более, чем на порядок, при условии, что ранее были проведены верные рассуждения, то он оценивается 1 баллом.

*Максимальная оценка – **8 баллов**.*

(Н. Д. Уткин)

Задача 6

Созвездие Хамелеона заключено между следующими координатными кругами: по прямому восхождению $7^h\,40^m$ и $13^h\,40^m$ и по склонению между −75° и −82° 30′, и содержит 34 звезды, видимые невооружённым глазом. Созвездие Щита заключено между координатными кругами: по прямому восхождению $18^h\,15^m$ и $18^h\,52^m$ и по склонению −4° и −16°, и содержит 25 звёзд, видимых невооружённым глазом. Определите, в каком из созвездий поверхностная концентрация звёзд, видимых невооружённым глазом, выше и во сколько раз. Считайте, что границы лежат ровно вдоль указанных координатных кругов.

Решение. Найдём площади каждого из созвездий. Созвездия имеют довольно простую форму – каждое является частью боковой поверхности шарового слоя. Площадь боковой поверхности ищется по формуле $S=2\pi R h$, где R – радиус сферы, h – высота шарового слоя.

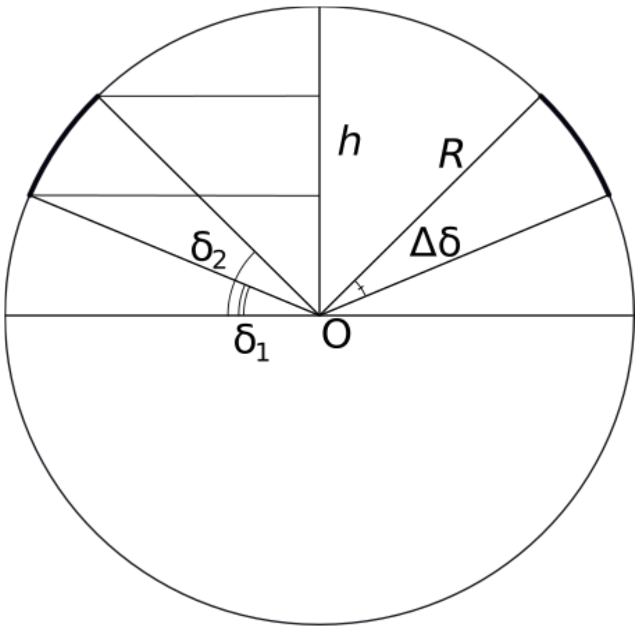

Рисунок 2:
К выводу формулы площади боковой поверхности шарового сегмента

Пусть δ_1 и δ_2 – склонения границ созвездия вдоль суточных параллелей. Тогда (рис. 2)

$$h=R\left(\sin\delta_2-\sin\delta_1\right),$$

откуда

$$S=2\pi R^2\left(\sin\delta_2-\sin\delta_1\right).$$

Созвездие занимает не всю эту площадь, а лишь часть, пропорциональную разности прямых восхождений:

$$S_{созв} = 2\pi R^2 (\sin\delta_2 - \sin\delta_1) \cdot \frac{\Delta\alpha}{24^h} .$$

Отнеся эту величину к площади всей сферы $4\pi R^2$, получаем площадь созвездия в долях площади сферы. Вся сфера видна из центра под телесным углом 4π стерадиан или $4\pi \cdot 57.3^2 = 41260$ квадратных градусов. Тогда площадь созвездия:

$$S^{\square}_{созв} = \frac{\sin\delta_2 - \sin\delta_1}{2} \cdot \frac{\Delta\alpha}{24^h} \cdot 41260 .$$

Отсюда площадь созвездия Хамелеон равна примерно 132 квадратных градуса, а площадь созвездия Щит – примерно 109 квадратных градусов.

Эти же величины можно получить несколько менее точным способом. При этом необходимо помнить, что длины границ созвездий, расположенных вдоль кругов склонения, зависят не только от разности их прямых восхождений, но и от склонений. Это особенно хорошо видно у Хамелеона (рис. 3) – его сторона, обращённая к полюсу Мира, имеет гораздо меньшую длину, чем та, что идёт вдоль круга склонения -75°.

Так как разность склонений «верхних» (имеющих большее по модулю склонение) и «нижних» границ созвездий и у Щита и у Хамелеона невелика (12° и $7{,}5^{\circ}$ соответственно), будем для вычисления площади использовать среднее значение длин сторон созвездий, расположенных вдоль кругов склонения (на самом деле, для Щита можно этого не делать – ответ практически не изменится).

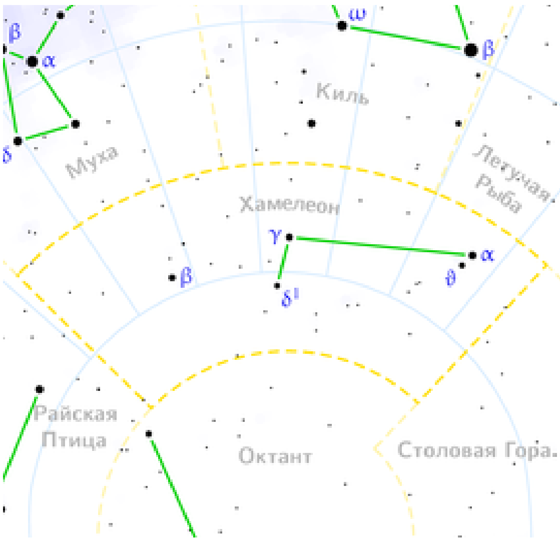

Рисунок 3: Созвездие Хамелеона.

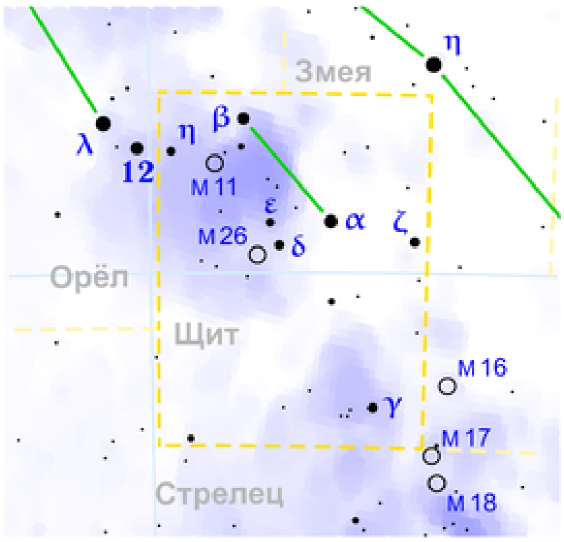

Рисунок 4: Созвездие Щита.

Итак, для Щита:

$$S=\frac{\Delta\alpha\cdot\cos\delta_1+\Delta\alpha\cdot\cos\delta_2}{2}\cdot\Delta\delta=\left(18^{\mathrm{h}}52^{\mathrm{m}}-18^{\mathrm{h}}15^{\mathrm{m}}\right)\frac{\cos(-16°)+\cos(-4°)}{2}\cdot 12°=$$

$$=\left(\frac{37^{\mathrm{m}}}{4^{\mathrm{m}/\circ}}\right)\cdot 11.75°\approx 109 \text{ кв. градусов.}$$

(4 в знаменателе – коэффициент перехода от минут времени к градусам).

Для Хамелеона:

$$S=\frac{\Delta\alpha\cdot\cos\delta_1+\Delta\alpha\cdot\cos\delta_2}{2}\cdot\Delta\delta=\left(13^{\mathrm{h}}40^{\mathrm{m}}-7^{\mathrm{h}}40^{\mathrm{m}}\right)\frac{\cos(-82.5°)+\cos(-75°)}{2}\cdot 7.5°=$$

$$=(6\cdot 15)°\cdot 1.46°\approx 131 \text{ кв. градусов.}$$

(15 – коэффициент перехода от часов к градусам). Теперь легко получить искомый ответ:

$$n_{Щит}\approx\frac{25}{109}\approx 0.23\,,\ n_{Хам}\approx\frac{34}{131}\approx 0.26\,.$$

Получаем, что концентрация звёзд в Хамелеоне выше в

$$\frac{n_{Хам}}{n_{Щит}}\approx 1.13 \text{ раза}$$

или на 13%.

Критерии проверки

Верное вычисление площади Щита (с ошибкой меньше 10%) – **2 балла**. Если записана верная формула, но получен неверный числовой ответ, то 1 балл.

Верное вычисление площади Хамелеона (с ошибкой меньше 10%) – **3 балла**. Если записана верная формула, но получен неверный числовой ответ, то 2 балла. Формула $S = \Delta\alpha\cdot\Delta\delta$ в данном случае верной не является.

Верный качественный ответ («выше в Хамелеоне»), при условии, что он не противоречит решению/обсуждению – **1 балл** (*пример, когда ставится:* больше ничего не написано; *пример, когда не ставится*: у созвездия Хамелеона получена большая площадь, из которой должен следовать обратный ответ, но получен верный).

Верный количественный ответ («выше в Хамелеоне на 13%» с допустимым диапазоном ответов 1% – 20%, при том же условии, что и выше) – **2 балла.**

*Максимальная оценка – **8 баллов.***

(А. М. Татарников)

Задача 7

При обработке наблюдений галактик в ранней Вселенной была обнаружена галактика похожая на Млечный Путь ($M_b = -21^m$, D = 30 кпк). Измеренная её болометрическая звёздная величина составила 27.8^m, а угловой размер – 5.3″. Определите по этим данным красное смещение найденной галактики и сопутствующее расстояние до неё.

В этом Вам может помочь приведённый график, на котором изображены зависимости фотометрического (по наблюдаемой яркости), углового (по наблюдаемому угловому размеру) и сопутствующего (геометрического на момент наблюдения) расстояния для нашей вселенной. Но, к сожалению, информация о том, какая кривая соответствует какому расстоянию оказалась утеряна.

Нарисуйте на графике кривую, соответствующую расстоянию, получаемому из классического закона Хаббла и классического эффекта Допплера.

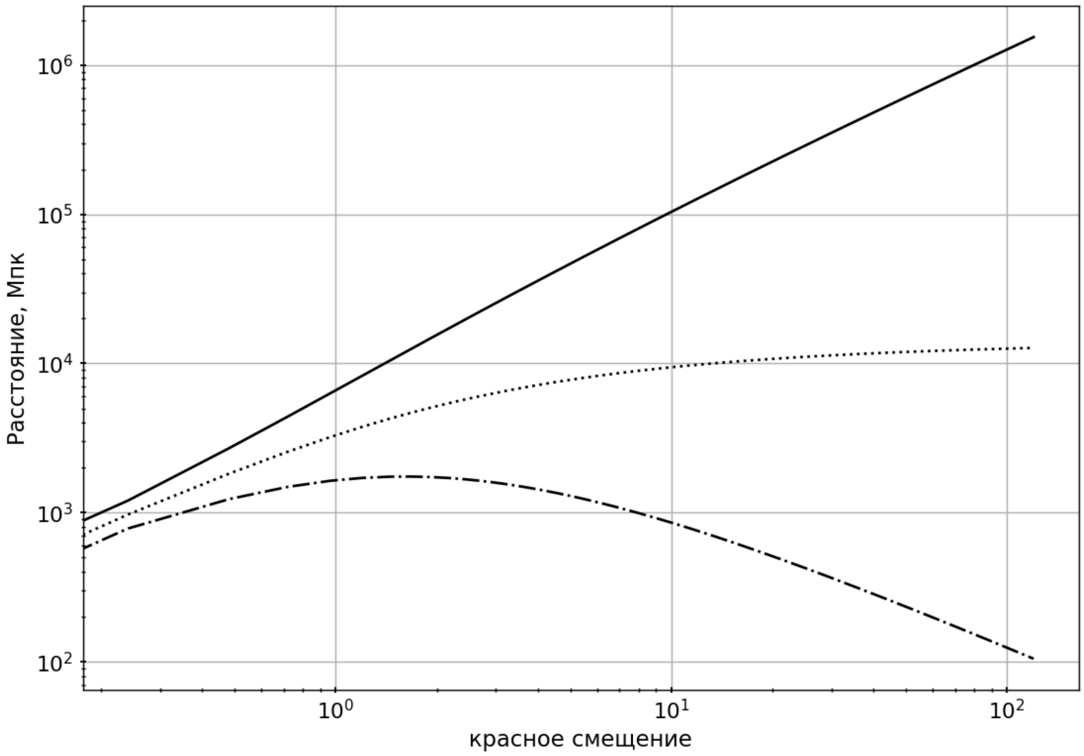

Рисунок 5:
Зависимость различных космологических расстояний от красного смещения.

Решение

Для начала определим расстояния до галактики по её звёздной величине и по размеру. Из формулы Погсона получаем фотометрическое расстояние

$$R_{ph}=10\cdot 10^{0,2(m-M_b)}=10^{10.76}=57.5\,\text{Гпк}\ .$$

Зная угловой и линейный размер галактики можно найти расстояние до неё из геометрических соображений:

$$R_\theta=\frac{D}{\theta}=\frac{30\,\text{кпк}}{5.3''}=1.17\,\text{Гпк}\ .$$

Как мы видим, расстояния отличаются почти в 49 раз. Рассмотрим, какие кривые на графике могут соответствовать различным способам определения расстояний до галактики.

Одно из расстояний на графике имеет максимум, что достаточно странно для величины, предполагающейся монотонно растущей с красным смещением. Из приведённых расстояний угловое должно обращаться в 0 при нулевом z (что соответствует просто нулевому расстоянию) и при бесконечно большом z (так как вблизи большого взрыва все точки вещества находились очень близко друг от друга, например сама точка большого взрыва «наблюдается» нами в любом направлении, а значит угловое расстояние до неё равно 0). Соответственно, нижняя кривая – угловое расстояние.

Сравним теперь фотометрическое и сопутствующее расстояние. Радиус сферы, на которую распределились фотоны от наблюдаемой галактики равен сопутствующему расстоянию, но принимаемый поток дополнительно уменьшается из-за уменьшения энергии самих фотонов (красного смещения). Таким образом, фотометрическое расстояние – верхняя кривая.

Теперь с помощью графика нужно найти красное смещение при котором y-координаты верхней и нижней кривых отличаются в 49 раз. В логарифмической шкале 49 раз соответствует lg 49 ≈ 1.7 деления по оси y. Находим на графике нужную точку и определяем z = 6.

К этому ответу можно прийти без использования графика. Известно, что угловое расстояние $R_\theta \propto (1+z)^{-1}$, а фотометрическое – $R_{ph} \propto (1+z)$. Отсюда

$$\frac{R_{ph}}{R_\theta}=(1+z)^2 \quad \text{и} \quad z=\sqrt{\frac{R_{ph}}{R_\theta}}-1=\sqrt{49}-1=6\ .$$

Впрочем, это не избавляет от необходимости анализа графика, чтобы ответить на второй вопрос.

Далее по графику определяем сопутствующее расстояние на красном смещении z = 6:

$$R_c = 8.2 \text{ Гпк.}$$

Наконец нарисуем нужную линию. По закону Хаббла $v = HR_H$, где H – постоянная Хаббла, v – скорость удаления далёкой галактики, а R_H – расстояние до неё. Поскольку красное смещение z – это v/c, где c – скорость света, то искомая зависимость принимает вид $R_H = c/H\ z$. Обратим внимание, что график необходимо построить в логарифмических осях. Прологарифмируем полученное выражение:

$$\lg R_H = \lg\left(\frac{c}{H} z\right) = \lg\frac{c}{H} + \lg z\ .$$

Мы получили, что в логарифмических осях прямая осталась прямой. А прямую можно легко построить по двум точкам.

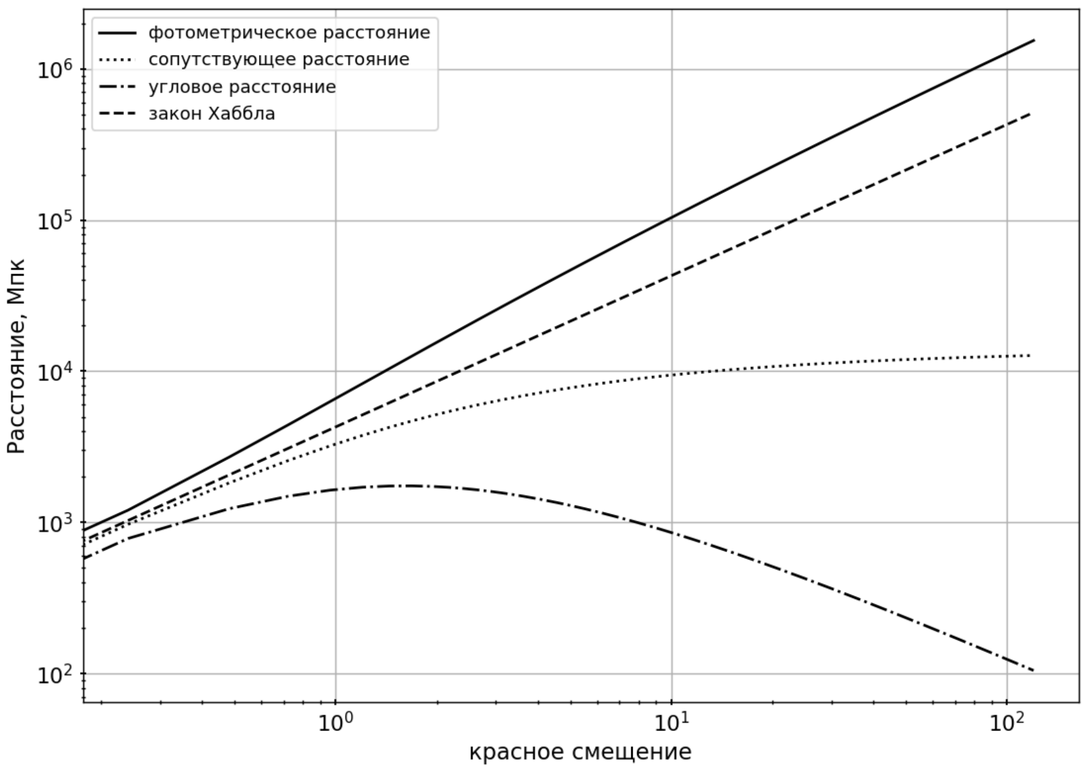

Рисунок 6:
Зависимость различных космологических расстояний от красного смещения.

Критерии проверки

Отождествление кривых на графике – по **1 баллу** за кривую.

Расчёт фотометрического расстояния – **1 балл.**

Расчёт углового расстояния – **1 балл**.

Определение красного смещения по графику или по формулам – **3 балла**.

Определение сопутствующего расстояния – **1 балл**.

Правильное изображение зависимости $R_H(z)$ – **3 балла**.

*Максимальная оценка – **12 баллов**.*

(С. Г. Желтоухов)

Задача 8

В 1908 году Генриетта Ливитт, изучая переменные звёзды цефеиды в Малом Магеллановом Облаке, обнаружила зависимость между периодами и светимостями этих звёзд. Вам дана таблица с некоторыми характеристиками пульсирующих переменных звёзд, расположенных в созвездиях Тукана и Южной Гидры. Здесь α – прямое восхождение в часах и минутах, δ – склонение в градусах и минутах, $\langle m_v \rangle$ – средняя звёздная величина в полосе V, P – период в днях. С помощью этой таблицы, а также прилагаемой карты,

1) постройте график зависимости $\langle m_v \rangle$ от логарифма периода для цефеид из Малого Магелланова Облака;

2) определите зависимость $\langle m_v \rangle$ от lg(P) с помощью метода наименьших квадратов и нанесите её на график;

3) определите расстояние до цефеиды CK Cam, период которой равен 3.29 сут, а $\langle m_v \rangle = 7.5^m$ (известно, что расстояние до Малого Магелланова Облака равно 61 кпк);

4) определите поглощение в звёздных величинах на килопарсек в направлении CK Cam, если тригонометрический параллакс этой звезды равен 0.00127″.

Метод наименьших квадратов: если мы хотим провести через точки (x_i, y_i) для i=1, ..., N прямую $y=\alpha+\beta\cdot x$ наилучшим образом, то α и β можно найти с помощью соотношений:

$$\beta=\frac{\langle xy\rangle-\langle x\rangle\cdot\langle y\rangle}{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2};\quad \alpha=\langle y\rangle-\beta\langle x\rangle .$$

Здесь треугольные скобки обозначают усреднение, например,

$$\langle xy\rangle=\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right)/N .$$

Звезда	**α, чч мм**	**δ, ° ′**	**<m$_v$>**	**P, дней**	**Звезда**	**α, чч мм**	**δ, ° ′**	**<m$_v$>**	**P, дней**
AF Tuc	00 51	-71 03	16.3	0.57	BH Tuc	01 20	-72 54	14.1	20.0
AH Hyi	01 23	-74 22	15.0	8.38	BZ Tuc	00 41	-73 43	12.0	127.6
AH Tuc	01 07	-71 43	15.1	0.60	CO Tuc	00 28	-72 10	13.9	0.37
AI Hyi	01 26	-74 08	14.8	12.5	RS Tuc	00 57	-72 46	17.6	1.45
AI Tuc	01 09	-71 15	16.3	0.51	RV Tuc	00 58	-72 36	17.5	2.10
AK Tuc	01 10	-72 31	16.4	0.69	RX Tuc	01 00	-72 39	16.1	4.29
AL Tuc	01 10	-73 52	15.0	0.53	SS Tuc	01 02	-72 06	13.2	49.7
AR Tuc	00 22	-73 35	15.5	0.29	SW Tuc	01 03	-72 46	16.5	3.59
BC Tuc	01 13	-74 22	16.2	8.11	TW Tuc	01 07	-72 31	16.0	6.11
BE Tuc	01 17	-73 43	13.6	25.4	XY Hyi	00 07	-74 29	16.5	22.0

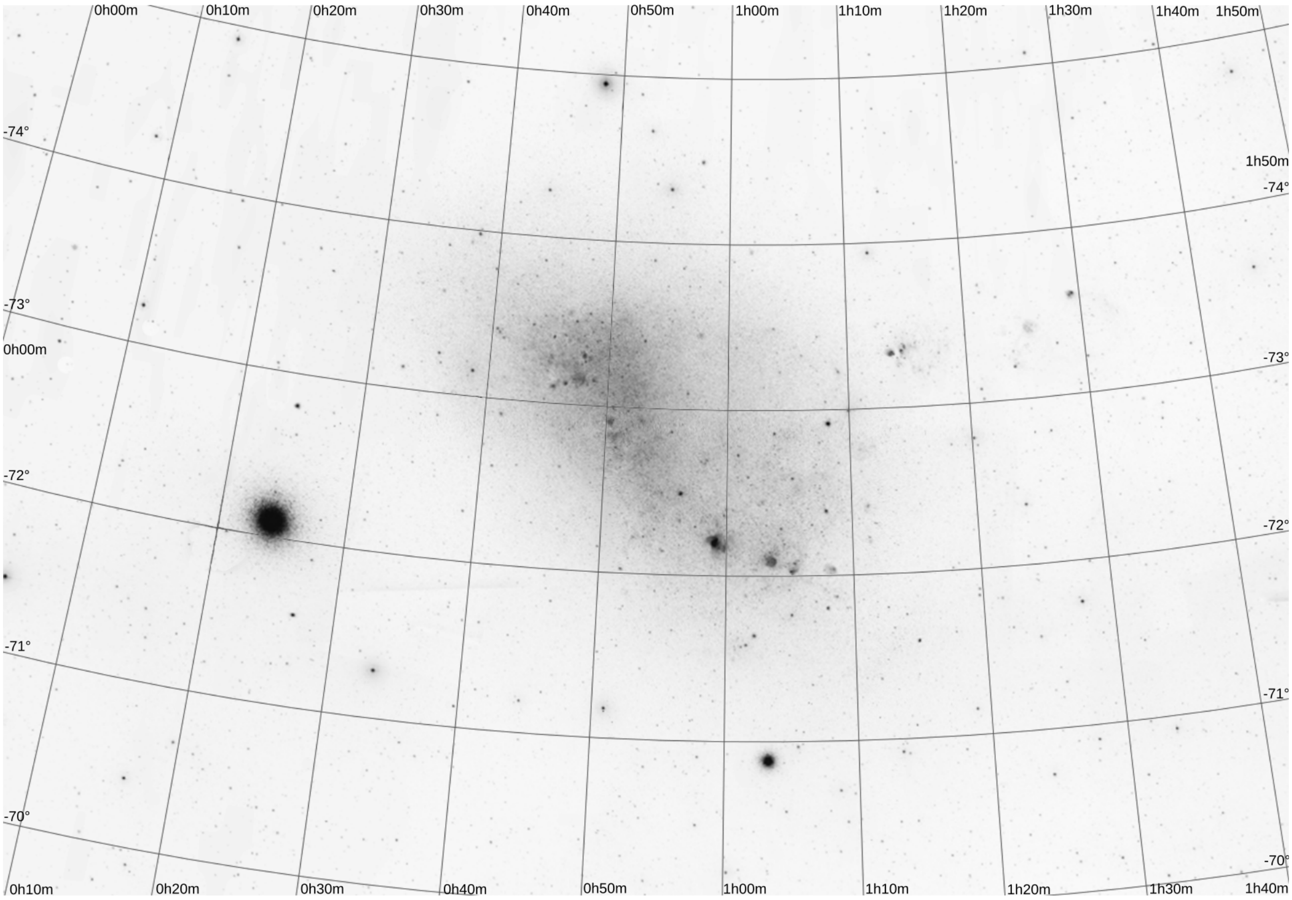

Рисунок 7: Карта окрестностей Малого Магелланова Облака.

Решение

Обратим внимание, что в условии дана таблица «пульсирующих переменных звёзд», а требуется найти зависимость для цефеид. Цефеиды – это один из видов пульсирующих звёзд. Но кроме них в этой группе находятся и другие звёзды, как похожие на цефеиды (типа W Девы, RR Лиры, …), так и более отдалённые родственники (мириды, полуправильные и др.). Поэтому перед тем, как строить график и искать требуемую зависимость, следует проверить, все ли звёзды здесь цефеиды.

Периоды цефеид могут принимать значения от единиц до более чем сотни дней. Обратим внимание, что в таблице присутствуют звезды с периодами от трети до двух третей суток. Можно предположить, что эти звёзды цефеидами не являются (это действительно переменные типа RR Лиры, но на решение знание конкретного типа переменности не влияет), и исключить их из анализа.

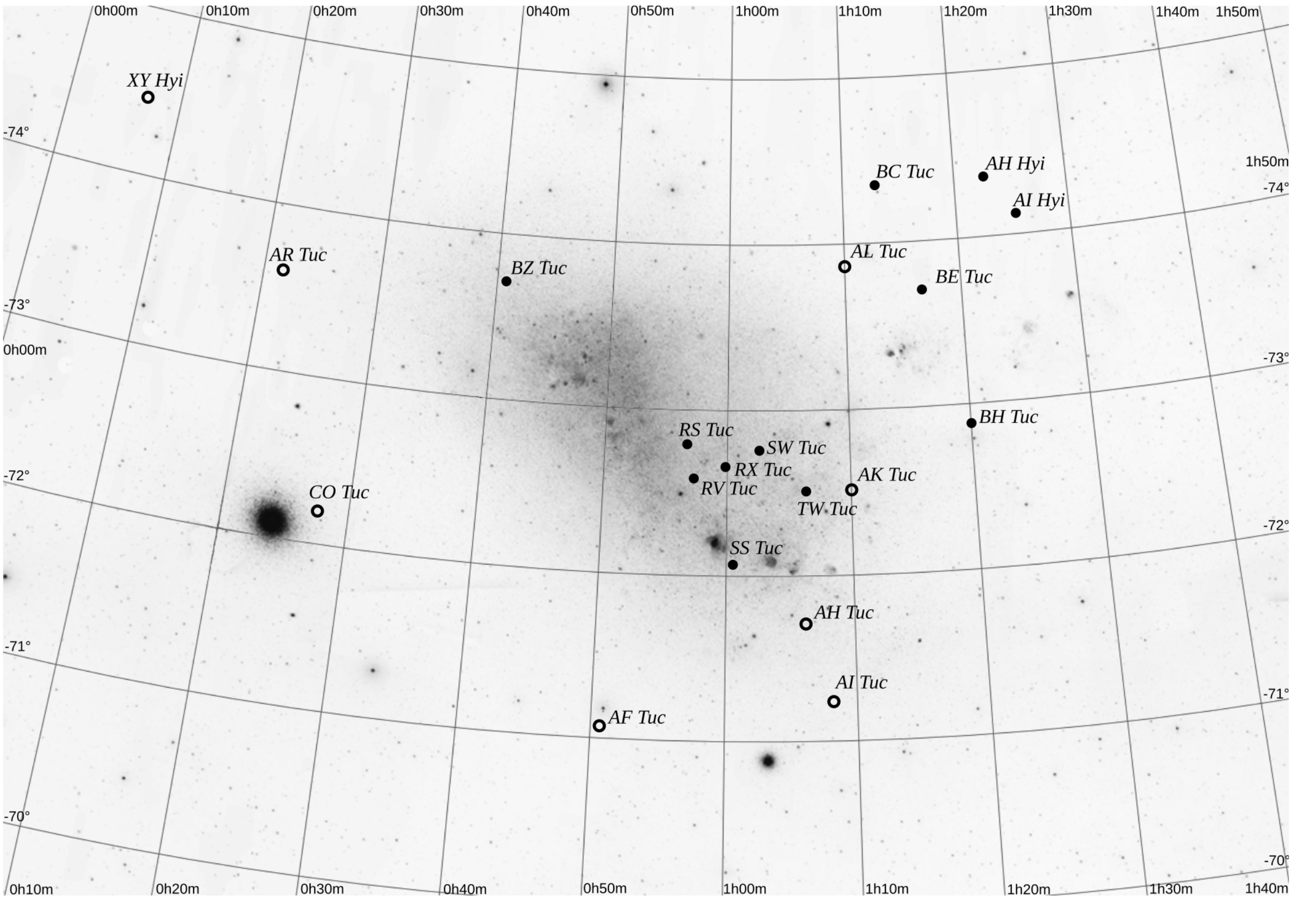

Рисунок 8: Переменные звезды на карте окрестностей ММО.

Казалось бы, можно нанести звезды на карту и исключить те из них, которые не попадают в центральную часть Малого Магелланова облака (ММО). Но такой метод не является достаточно корректным. С одной стороны, лишние звезды могут случайно проецироваться на ММО (например, AK Tuc), с другой – мы можем отбросить нужные цефеиды, которые лежат во внешних областях ММО не выделяющихся заметно на карте.

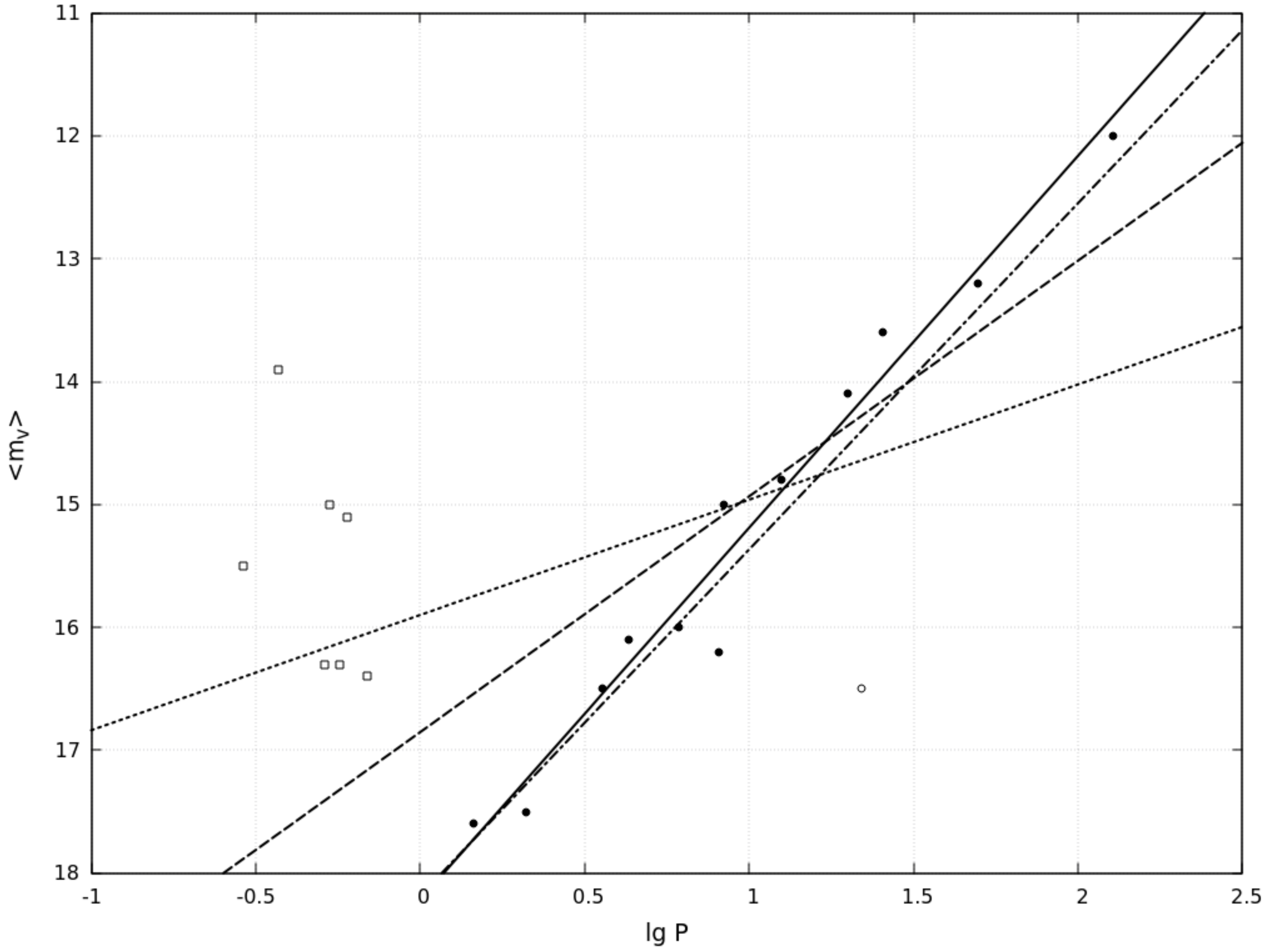

Рисунок 9: Зависимость период – светимость.

На рисунке 9 показан график зависимости <m_v>(lg P). Цефеиды ММО отмечены закрашенными кружками, а короткопериодические переменные, которые мы ранее исключили из обработки – пустыми квадратами. Кроме того, от последовательности цефеид на заметное расстояние отошла одна точка, оставшаяся незакрашенной. Можно убедиться по карте (рисунок 8), что соответствующая ей звезда XY Hyi располагается на значительном отдалении от ММО и скорее всего ему не принадлежит. Поэтому её также следует исключить из анализа.

Применив метод наименьших квадратов к оставшимся 12 звёздам получим соотношение

$$\langle m_v \rangle = 18.2 - 3.03 \cdot \lg P \, .$$

На рисунке 9 ему соответствует сплошная прямая линия. Штрих-пунктирная линия показывает зависимость, которая получится, если не исключить XY Hyi, а пунктирная линия возникает при использовании всех 20 звёзд. В свою очередь, линия с длинным пунктиром показывает зависимость, которая получается, если ограничиться только звёздами, попадающими в яркую часть ММО.

Созвездие Тукана расположено достаточно далеко от Млечного Пути, поэтому пренебрежём межзвёздным поглощением. Тогда модуль расстояния до ММО равен

$$m-M=5\lg r-5=5\lg 61000-5=18.9\ .$$

Найденную зависимость можно переписать в виде «период – абсолютная звёздная величина»:

$$\langle M_v\rangle=-0.7-3.03\cdot\lg P\ .$$

Обладая периодом 3.29 суток цефеида CK Жирафа должна иметь абсолютную звёздную величину -2.3^m. Тогда фотометрическое расстояние до звезды равно

$$d_{ph}=10^{(m-M)/5+1}\approx 912\ \text{пк.}$$

Эту же величину можно получить без использования зависимости период светимость. Заметим, что звезда SW Тукана имеет схожий период 3.59 суток. Расстояние до неё равно расстоянию до ММО. Будем считать, что если бы CK Жирафа находилась в ММО, то она имела бы такую же звёздную величину, что и SW Тукана. Тогда расстояние до CK Жирафа равно

$$\tilde{d}_{ph}=61\cdot 10^{(7.5-16.5)/5}\approx 970\ \text{пк.}$$

Отметим, что такой способ является менее предпочтительным, поскольку, во-первых, до построения зависимости период–светимость невозможно определить, насколько звезда сравнения является типичной цефеидой для ММО, во-вторых, её период, а значит и светимость пусть немного, но выше, чем у CK Жирафа, а значит расстояние до неё будет переоценено.

Тригонометрическое расстояние до звезды равно

$$d_{tr}=\frac{1}{\pi}=787\ \text{пк.}$$

Запишем формулу Погсона с учётом поглощения

$$m-M=5\lg d_{tr}-5+A\cdot d_{tr}\,.$$

Отсюда искомое поглощение A получается равным

$$A=\frac{m-M-5\lg d_{tr}+5}{d_{tr}}=\frac{5\lg\left(d_{ph}/d_{tr}\right)}{d_{tr}}\approx 0.4^m/\text{кпк.}$$

Получившееся поглощение заметно отличается от принятого среднего значения 2^m/кпк. Этому есть несколько причин. Во-первых, мы пренебрегли поглощением в направлении ММО, что привело к погрешности определения абсолютной звёздной величины около 0.5^m. Во-вторых, СК Жирафа располагается не в плоскости Млечного Пути, а примерно в 10° от галактического экватора, а так же примерно в 30° от антицентра Галактики, т. е. во внешней части Млечного Пути. Неудивительно, что в этом направлении поглощение меньше среднего.

Критерии проверки

Нанесение точек на график – **2 балла**. Если ось звёздных величин направлена так, что более тусклые звёзды выше, то 1 балл.

Выбор точек для аппроксимации оценивается от **0** (использованы все 20 точек) до **3** (отброшены с правильным обоснованием все короткопериодические звёзды и XY Hui) **баллов.**

Применение формул МНК и определение уравнения прямой – **2 балла**, правильное нанесение полученной прямой на график – **1 балл**.

Определение абсолютной звёздной величины СК Жирафа – **1 балл** и фотометрического расстояния до неё – **1 балла.** Если участник использует вместо вычисленной зависимости период–светимость правильную по памяти, то оценка не снижается. Если фотометрическое расстояние определялось на основе сходства с периодом SW Tuc, то оценка за весь этап не более 1 балла.

Определение тригонометрического расстояния СК Жирафа – **1 балл** и поглощения – **1 балл**.

*Максимальная оценка – **12 баллов**.*

(Е. Н. Фадеев)

<u>Всего за работу 64 балла.</u>