МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО АСТРОНОМИИ. 2020–2021 УЧ. Г. ОЧНЫЙ ЭТАП. 10–11 КЛАССЫ

Решения и критерии оценивания

Задача 1

В 1665 году Джованни Доменико Кассини открыл Большое красное пятно. Как вы думаете, как много пятен он смог бы увидеть в тот же самый год за одно наблюдение, если бы искал, разумеется, со всеми предосторожностями, солнечные пятна? Ответ обоснуйте.

Решение

В 2019 году 11-летний солнечный цикл достиг минимума. Между 2019 и 1665 годом 32 полных цикла и ещё 2 года. Можно было бы предположить, что скорее всего Кассини мог увидеть несколько пятен. Однако, солнечный цикл не строго периодический. Если в среднем его величина равна 11 годам, то продолжительность отдельного цикла может отличаться от среднего на несколько лет и такая простая экстраполяция даёт большую погрешность. Более важным является то, Кассини жил во времена Маундеровского минимума, когда солнечная активность была подавлена и наблюдалось примерно по 1 пятну в год. Так что скорее всего Кассини никаких пятен бы не увидел. В случае везения — 1 пятно.

Критерии проверки

Указание на то, что Кассини жил во время малого ледникового периода, когда долгое время пятен на Солнце практически не наблюдалось, — **4 балла**. Если правильно проведён расчёт в рамках 11-летнего цикла солнечной активности, решение оценивается в **2 балл**. За ответ, даже правильный, без обоснования — **0 баллов**.

Максимальная оценка за задание **4 балла**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 2

Враждебные инопланетяне все четыре планеты земной группы слили в одну чёрную дыру. Нарисуйте сферу Шварцшильда этой чёрной дыры в масштабе 1:1. Подтвердите свою правоту вычислением.

Решение

Радиус сферы Шварцшильда — это гравитационный радиус. Его величина вычисляется по формуле

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}.$$

Земля — самая массивная планета из этой четвёрки. Венера лишь немногим уступает Земле по массе и размерам. Марс и Меркурий значительно уступают первым двум планетам и в общую массу вносят очень небольшой вклад. Суммарная масса всех четырёх планет земной группы, Меркурия, Венеры, Земли и Марса, равна примерно $1.2 \cdot 10^{25}$ кг. Отсюда гравитационный радиус равен 1.7–1.8 см. В ответе должен быть нарисован кружок диаметром 3.4–3.6 см.

Критерии проверки

Правильное решение с рисунком оцениваются в **4 балла**.

Если в ответе правильный рисунок без решения, оценка не может превышать **2 балла** . В этом случае допуск на диаметр кружка 0.5 см.

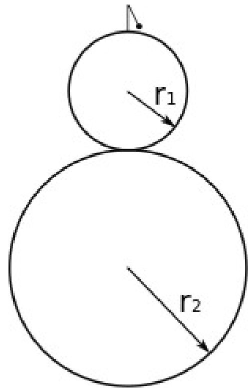
Решение без рисунка оценивается не более чем в **2 балла**. Если вычисление правильное, а на рисунке перепутан размер радиуса и диаметра, оценка снижается на **1 балл**. При оценке массы чёрной дыры в 4 массы Земли и т. п. Оценка снижается на **1 балл**.

Максимальная оценка за задание **4 балла**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 3

Астероид имеет форму двух слипшихся шаров радиусами r_1 = 20 км и r_2 = 40 км каждый и средней плотностью ρ = 2.5 г/см^3. На поверхности астероида установлен маятник (см. рисунок) с длиной подвеса l = 50 м и массой груза m = 100 кг. Астероид вращается вокруг своей длинной оси с периодом 4 часа. Груз маятника отвели из положения равновесия на x = 1 м и отпустили. На каком расстоянии от первоначального положения окажется груз после завершения первого колебания, т. е. через один период?



Решение

Заметим, что по условию радиус большего шара в 2 раза больше: $r_2 = 2r_1$. Поскольку плотности обоих шаров одинаковы, их массы соотносятся как

$$M_2=\frac{4}{3}\pi\rho r_2^3=\frac{4}{3}\pi\rho 8 r_1^3=8M_1.$$

На маятник действует сила тяжести

$$F_g=G\frac{M_1 m}{r_1^2}+G\frac{8M_1 m}{(4r_1)^2}=\frac{3}{2}\frac{GM_1 m}{r_1^2}=gm.$$

Здесь G – гравитационная постоянная, $g=\frac{3}{2}\frac{GM_1}{r^2}$ – ускорение свободного падения. Подставляя числа получаем $M_1\approx 8.4\times 10^{16}$ кг, откуда $g=0.021$ м/с^2. Отсюда период колебания маятника

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\approx 307\,\text{с}.$$

За 307 секунд астероид повернётся на угол $360°\times\frac{307}{4\times 3600}\approx 7.7°$. Плоскость качания маятника остаётся неизменной. Значит, искомое расстояние равно

$$\Delta x=2x\sin(7.7°/2)\approx 0.13\,м=13\,\text{см}.$$

Критерии проверки

Определение ускорения свободного падения — **3 балла: 1 балл** за формулу объёма шара и **2 балла** за верную запись силы гравитации. Запись формулы для периода маятника — **1 балл**, вычисление периода — **1 балл**. Величина g может быть как вычислена отдельно, так и подставлена в формулу для периода. Если ошибка в вычислении T возникает вследствие ошибки вычисления g, то выставляется только последний **1 балл**.

Определение угла поворота за один период — **1 балл**. Формула для вычисления расстояния — **1 балл** и итоговый ответ — **1 балл**. Если в качестве периода используется величина вдвое меньшая, то за второй этап выставляется не более **1 балла**.

Максимальная оценка за задание **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 4

Один юный астроном всё-таки испортил своё зрение и теперь ходит в очках. Исследуя новый аксессуар, он заметил, что без очков видит предметы чёткими на расстояниях примерно от 10 до 22 см.

1. Помогите ему найти оптическую силу его очков, считая, что они подобраны правильно (диапазон фокусировки глаза используется полностью и в очках астроном чётко видит бесконечно удалённые предметы)

2. На каком минимальном расстоянии астроном будет чётко видеть в очках?

3. Оцените разрешение ничем не вооружённого, даже очками, глаза астронома при наблюдении удалённых объектов.

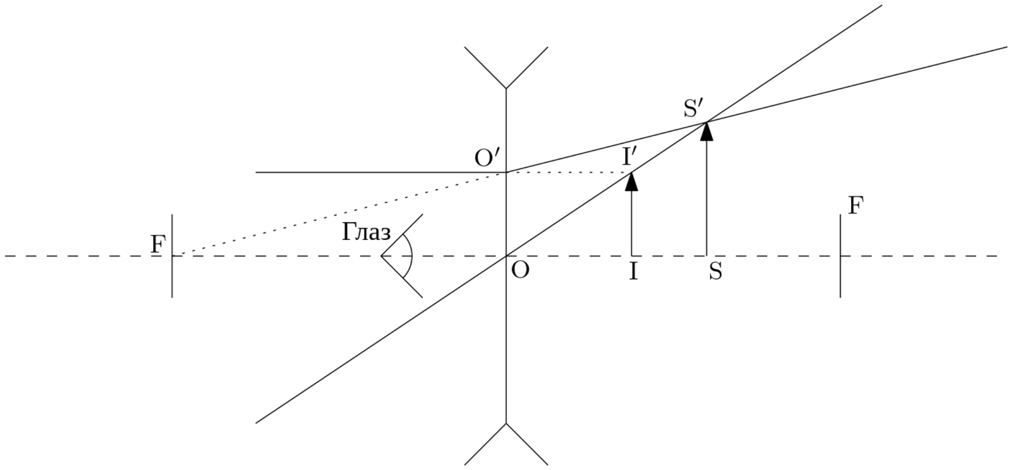
Подсказка: Все линзы считать тонкими, и очки расположены примерно в 20 мм от глаза. Диаметр зрачка 5 мм, а расстояние от зрачка до сетчатки можно считать равным 20 мм.

Решение.

Для решения и ускорение расчётов мы будем пользоваться общим видом формулы тонкой линзы, $\frac{1}{F}=\frac{\pm 1}{a}\pm\frac{1}{b}$, где F — фокусное расстояние линзы (положительное для собирающей линзы и рассеивающее для отрицательной), а a и b — расстояние от неё до объекта и его изображения, соответственно. Перед началом расчётов отметим, что основная функция очков для близорукости, обычно состоящих из одной рассеивающей линзы, строить мнимые изображения далёких предметов ближе к глазу, там, где он уже сможет сфокусироваться на них самостоятельно. Более простое описание, что очки делают пучок более расходящимся чтобы глаз смог сфокусировать его ровно на сетчатке тоже правильное, но, к сожалению, не очень помогает что-либо посчитать.

1. Для полного использования диапазона фокусировки изображение бесконечно удалённого предмета должно строиться на расстоянии 22 см от глаза, что соответствует 20 см от линзы. Если бы оно было дальше, глаз бы не смог видеть его чётко, а если ближе, то часть доступного глазу диапазона фокусировки от

изображения до 22 см осталось бы не использованной. Пользуясь формулой тонкой линзы, где одно из расстояний (до объекта) равно бесконечности, $\frac{1}{F}=\frac{\pm 1}{\infty}\pm\frac{1}{20\,\text{см}}$, получаем, что фокусное расстояние этой рассеивающей линзы — 20 см, что соответствует оптической силе в −5 диоптрий. Заметим, что здесь обязателен знак минус, поскольку линза рассеивающая. Так как $\frac{1}{\infty}=0$, дополнительно исследовать как правильно расставлять знаки пока не будем. Также можно использовать стандартный факт, что параллельный пучок (от бесконечно удалённого объекта) даёт изображение в фокусе линзы.



2. Расположим мнимое изображение (отрезок II′ на рисунке) объекта на минимальном расстоянии от наблюдателя 10 см, т.е. спереди линзы в 8 см от неё. Мы же хотим рассчитать расстояние от глаза до объекта (отрезок ГлазS), который даст такое изображение. Из подобных треугольников FO′O и FS′S получаем

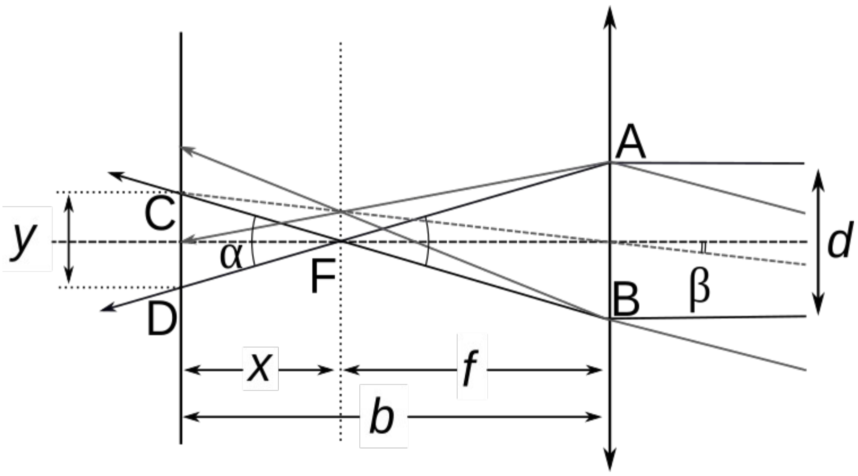
$$\frac{II'}{SS'}=\frac{FO}{FS}\Rightarrow SS'=II'\frac{FO+OS}{FO}=II'\left(1+\frac{OS}{FO}\right).$$

Из треугольников OI′I и OS′S:

$$\frac{OI}{OS}=\frac{II'}{SS'}=\frac{1}{1+\frac{OS}{OF}}.$$

$$OS=OI\left(1+\frac{OS}{OF}\right)\Rightarrow\frac{1}{OI}=\frac{1}{OS}+\frac{1}{OF}\Rightarrow\frac{1}{OS}=\frac{1}{OI}-\frac{1}{OF}.$$

Последнее выражение — есть формула тонкой линзы для данного случая. Использовать эту формулу можно без вывода, главное не запутаться в знаках при слагаемых. Подставляя числа (OF — фокусное расстояние линзы), получаем, что от линзы до объекта (OS) должно быть 13.3 см, а значит от глаза до объекта 15.3 см.



3. При попытке рассмотреть удалённые объекты, то есть расположенные на расстоянии свыше 22 см, астроном не получит чёткого изображения. Если астроном будет рассматривать точечный объект, например далёкий яркий фонарь, то он увидит вместо точки кружок. Разумно предположить, что в этот момент его хрусталик сфокусирован на максимально возможное для него расстояние. При такой фокусировке глаз строит изображение объекта, расположенного на расстоянии a = 22 см от глаза, на сетчатке, которая находится на расстоянии b = 20 мм. Здесь собирающая линза строит действительное изображение и поэтому для определения фокусного расстояния хрусталика мы просто воспользуемся самым стандартным видом формулы тонкой линзы:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\,.$$

При необходимости её опять же можно вывести тем же методом, что мы использовали ранее.

Получаем фокусное расстояние хрусталика f, которое в этот момент примерно равно $f=\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^{-1}\approx 18.33$ мм. Изображение бесконечно удалённой точки хрусталик построит в фокусе на расстоянии $x=20\,\text{мм}-18.33\,\text{мм}=1.67$ мм от сетчатки. Треугольники ABF и CDF подобны. Следовательно $y = x\, d/f \approx 0.46$ мм. Будем считать, что астроном не сможет различить две точки, если центр изображения одной попадает на край изображения другой, т. е. расстояние между центрами изображения равно $\frac{y}{2}$. Тогда лучи, приходящие в центр каждого изображения, наклонены друг к другу на угол $\beta=\frac{y}{2b}=0.0115\,\text{рад}\approx 0.7\,°$.

Критерии проверки

Решение написано излишне подробно. Вывод формулы линзы для каждого случая не обязателен. При использовании формулы с правильными знаками соответствующий этап засчитывается полностью.

Ответ на первый вопрос оценивается из двух баллов. Определение фокусного расстояния линзы очков — **1 балл**. Вычисление оптической силы линзы —

1 балл. Если фокусное расстояние получено с небольшой погрешностью, например взято расстояние от линзы до изображения не 20 см, а 22 см, то за вычисление фокусного расстояния оценка не выставляется, но второй пункт оценивается полностью. В случае грубых ошибок или отсутствия решения (величина фокусного расстояния постулируется), ответ на вопрос не засчитывается полностью.

Ответ на второй вопрос также оценивается двумя баллами. Вывод или запись формулы линзы в правильной форме — **1 балл**. Определение искомого расстояния — **1 балл**. Заметим, что здесь используется фокусное расстояние линзы, которое было получено при ответе на первый вопрос. Первый балл здесь выставляется вне зависимости от правильности полученного ранее фокусного расстояния, а второй только в случае правильного ответа или если ошибка в фокусном расстоянии не была вызвана грубой ошибкой.

Третий вопрос наиболее сложен, поскольку требует понимания причин уменьшения разрешения. Вычисление фокусного расстояния хрусталика оценивается в **1 балл**. Вычисление расстояния от фокуса до сетчатки — **1 балл**, размера изображения точки на сетчатке — **1 балл**. Определение разрешения — **1 балл**. Здесь могут быть приняты различные критерии для различения двух точек, например, их изображения не должны пересекаться. Все разумные критерии засчитываются полностью.

Максимальная оценка за задачу – **8 баллов**.

(С. Г. Желтоухов)

Задача 5

В известном «Сборнике задач по астрономии» М. М. Дагаева имеется множество расчётных формул, содержащих, на первый взгляд, очень необычные числа. Например, вот эта:

$$\lg\delta = C - 0.2 m_b - 2\lg T,$$

где δ — угловой диаметр звезды, измеряемый в секундах дуги, m_b — её видимая болометрическая звёздная величина, T — её эффективная температура в кельвинах, а C — некоторая константа.

Тем не менее, для вывода этой формулы вполне достаточно известных выражений. Получите её, пренебрегая межзвёздным поглощением. Вычислите константу C с точностью до сотых.

Решение

Предложенная формула содержит в себе звёздную величину и десятичные логарифмы. Можно предположить, что в её основе лежит формула Погсона. Поскольку в формулу также входит температура, логично воспользоваться законом Стефана-Больцмана, сравнивая светимость звезды со светимостью Солнца:

$$L/L_\odot=\left(R/R_\odot\right)^2\left(T/T_\odot\right)^4,$$

где L и $L_\odot$ — болометрические светимости звезды и Солнца соответственно, R и $R_\odot$ — их радиусы, а T и $T_\odot$ — эффективные температуры. Их абсолютные болометрические звёздные величины связаны соотношением:

$$M_b-M_{b\odot}=-2.5\lg\left(L/L_\odot\right)=-5\lg\left(R/R_\odot\right)-10\lg\left(T/T_\odot\right).$$

В этой формуле уже есть необходимый нам $\lg T$. Для того, чтобы заменить абсолютную звёздную величину звезды на видимую ещё раз воспользуемся формулой Погсона:

$$M_b=m_b+5-5\lg D[\text{пк}],$$

где D[пк] – расстояние до звезды, выраженное в парсеках. Подставляя эту формулу в предыдущую, получим

$$m_b+5-5\lg D[\text{пк}]-M_{b\odot}=-5\lg\left(R/R_\odot\right)-10\lg\left(T/T_\odot\right).$$

Здесь остались две неизвестные величины: радиус звезды R и расстояние до нее D, а нам нужен угловой диаметр звезды δ. Но $\delta = 2R / \text{D}$, так что если мы сможем путём преобразования последнего уравнения собрать нужную величину из двух неизвестных, то задача будет почти решена. Однако, надо помнить, что угловой диаметр должен измеряться в угловых секундах, а не в радианах для чего ответ нужно домножить на число секунд в радиане. Кроме того, в формуле для δ R и D должны иметь одинаковую размерность. Можно, конечно, выразить радиус звезды в парсеках, но тогда и радиус Солнца тоже нужно пересчитывать в парсеки. Мы пойдём другим путём: радиусы звёзд будем считать в радиусах Солнца, а в формулу для углового диаметра звезды введём корректирующий множитель, равный числу солнечных радиусов в парсеке:

$$\delta=\frac{2R/R_\odot}{D[\text{пк}]}\cdot\frac{206265}{4.44\cdot10^7}\approx9.30\cdot10^{-3}\cdot\frac{R/R_\odot}{D[\text{пк}]}.$$

Тогда наша формула приобретает вид

$$5\lg\left(\frac{R/R_\odot}{D[\text{пк}]}\right)=5\lg\left(\frac{\delta}{9.3\cdot10^{-3}}\right)=5\lg\delta-5\lg9.3\cdot10^{-3}=M_{b\odot}-5-m_b-10\lg\left(\frac{T}{T_\odot}\right).$$

Разделив на 5 и перенеся слагаемые, получим уравнение, близкое к желаемому:

$$\lg\delta = \lg 9.3\cdot 10^{-3} + 0.2\,M_{b\odot} - 1 + 2\lg T_\odot - 0.2\,m_b - 2\lg T\ .$$

Первые четыре слагаемых в правой части — это постоянная величина. Подставив $M_{b\odot}$ = 4.74 и $T_\odot$ = 5800 К, получим

$$\lg\delta = 5.44 - 0.2\,m_b - 2\lg T\ .$$

Числовой коэффициент может немного меняться в зависимости от подставляемых чисел и округления на промежуточных этапах.

Коэффициент C можно вычислить не проводя таких длинных выкладок. Для этого достаточно подставить в исходное выражение известные данные, например для Солнца:

$$C = \lg 1800 + 0.2\cdot(-26.7) + 2\lg 5800 \approx 5.44\,.$$

Критерии проверки

Запись верного выражения для закона Стефана-Больцмана оценивается в **1 балл**.

Формула Погсона для разности абсолютных звёздных величин Земли и звезды также оценивается **1 баллом**.

Указание формулы для модуля расстояния (разность абсолютной и видимой величин звезды) — **1 балл**.

Получение верного выражения, содержащего δ, m_b и lg T с нужными коэффициентами при m_b и lg T и константу, подготовленную к вычислению, оценивается в **3 балла**.

Вычисление значения свободного числового коэффициента с ответом в диапазоне от 5.40 до 5.50 — **2 балла**. Если ответ получается вне этого диапазона, но в интервале от 5.30 до 5.60, то **1 балл**. В противном случае — **0 баллов**.

Важно разобраться в причинах ошибок. Если в решении перепутаны угловой радиус и угловой диаметр (первое слагаемое в итоге равно 5.143), то оценка снижается на **1 балл**. Если же не было учтено, что в формуле размерные величины, то оценка не может превышать **4 баллов** (**5 баллов**, если потерялась размерность не у всех величин, а только у одной).

Максимальная оценка за задачу – **8 баллов**.

(Н. Д. Уткин)

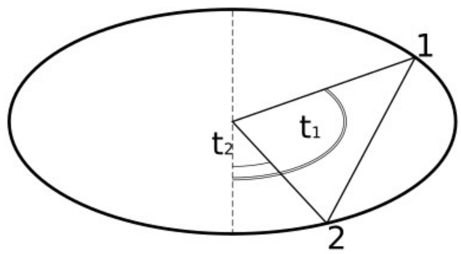
Задача 6

Два радиотелескопа, установленные на широте 45°, работают в режиме интерферометра. Определите максимальную и минимальную величину проекции базы этого интерферометра, т.е. отрезка, соединяющего телескопы, на плоскость, перпендикулярную направлению на источник, которые можно реализовать в данном эксперименте, если склонение этого источника 20°, а разность долгот этих телескопов составляет 90°. Считать, что телескопы могут наблюдать источник на любой положительной высоте над горизонтом.

Решение

Телескопы в процессе суточного вращения Земли движутся вокруг земной оси по окружности радиусом $r = R \cos\varphi$, где R – радиус Земли, φ – широта. Физическое расстояние между телескопами можно вычислить воспользовавшись теоремой косинусов, или из свойств равнобедренного треугольника:

$$L = 2R\cos\varphi\sin\frac{\Delta\lambda}{2} = 2R\cos(45°)\sin(45°) = R = 6380\ \text{км}.$$

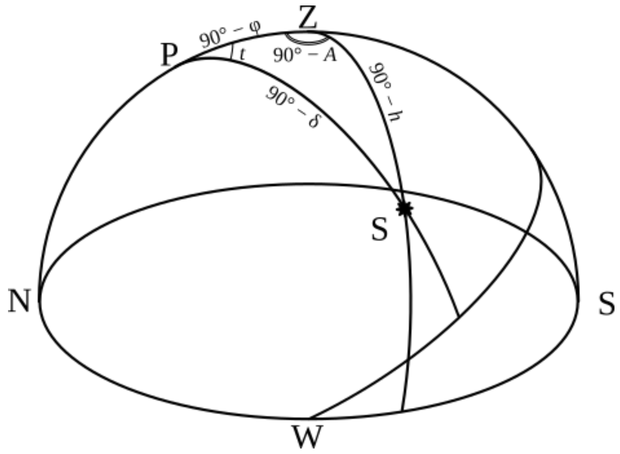


Если смотреть на земную параллель со стороны наблюдаемого источника, то она видна под углом и выглядит сильно сплющенной, т. е. вместо окружности мы наблюдаем эллипс. При этом, расстояние L, которое является хордой для параллели, в разные моменты времени проецируется на картинную (с точки зрения наблюдателя в источнике) плоскость по-разному. Очевидно, что максимальной и равной L эта проекция будет в те моменты времени, когда в точке, находящейся посередине между телескопами, источник будет кульминировать. Минимальной эта величина будет через четверть звёздных суток и составит $L'_{min} = L_{max}\sin\delta \approx 2180\ \text{км}$. Однако, надо учесть, что через четверть суток для одного из телескопов источник может зайти за горизонт. Для второго телескопа источник останется выше горизонта, поскольку в северном полушарии светила с положительным склонением находятся над горизонтом больше половины звёздных суток.

Из параллактического треугольника можно определить, что часовой угол источника в момент захода равен

$$t = \arccos(-\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\varphi) \approx 111°.$$

Значит, в момент захода источника для первого телескопа, для второго часовой угол источника оказывается равен на 90° меньше: t_2 = 21°. Для того, чтобы минимальная проекция базы была равна $L'_{\min}$, необходимо, чтобы $90° - \Delta\lambda/2 \le t_2$, что не выполняется. Значит $L_{\min} > L'_{\min}$.



Введём декартову систему координат так, чтобы в любой момент времени координаты телескопа были представимы в виде

$$\begin{cases} x' = r\cos t = R\cos\varphi\cos t \\ y' = r\sin t = R\cos\varphi\sin t \end{cases}.$$

Тогда, после проецирования этой системы координат, на плоскость, перпендикулярную направлению на источник, получаем координаты проекций станций:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos t\sin\delta \\ y = R\cos\varphi\sin t \end{cases}.$$

Тогда расстояние между этими точками равно

$$L_{\min} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = R\cos\varphi\sqrt{\sin^2\delta(\cos t_1 - \cos t_2)^2 + (\sin t_1 - \sin t_2)^2} =$$
$$= 2R\cos\varphi\sqrt{\sin^2\delta\sin^2\frac{t_1+t_2}{2}\sin^2\frac{t_1-t_2}{2} + \sin^2\frac{t_1-t_2}{2}\cos^2\frac{t_1+t_2}{2}}.$$

Принимая во внимание, что $t_1 = t_2 + \Delta\lambda$, получаем

$$L_{\min} = 2R\cos\varphi\sin\frac{\Delta\lambda}{2}\sqrt{\sin^2\delta\sin^2\left(t_2 + \frac{\Delta\lambda}{2}\right) + \cos^2\left(t_2 + \frac{\Delta\lambda}{2}\right)} =$$
$$= L_{max}\sqrt{\sin^2\delta\sin^2\left(t_2 + \frac{\Delta\lambda}{2}\right) + \cos^2\left(t_2 + \frac{\Delta\lambda}{2}\right)}.$$

Подставив числа, получаем $l \approx 3250$ км.

Критерии проверки

Радиус параллели r, на которой находятся телескопы — **1 балл**. Максимальная проекция базы — **1 балл**. Определение $L'_{\min}$ — **1 балл**. Указание, что минимальная реализуемая проекция базы больше — **1 балл**. Вычисление $L_{\min}$ — **4 балла**.

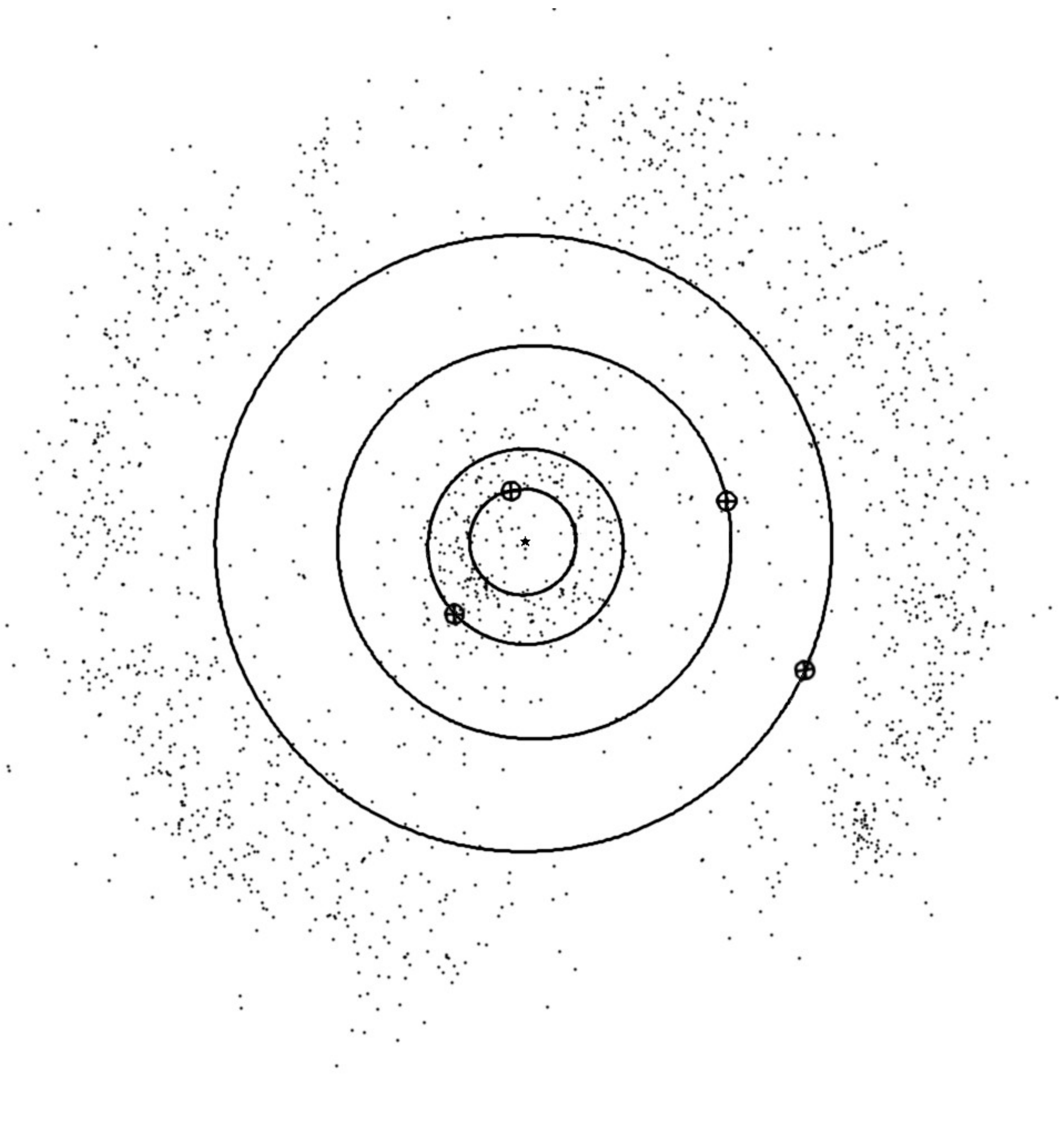
Максимальная оценка за задачу — **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 7

На рисунке показано положение (вид с северного полюса эклиптики) четырёх планет-гигантов и окружающих их астероидов в некоторый момент времени в предыдущем десятилетии (показаны только кентавры и объекты пояса Койпера). Показаны только астероиды, известные на момент наблюдения. Из этого рисунка определите:

- причину, по которой в нижней части пояса Койпера наблюдается пробел в распределении астероидов;
- в каком созвездии наблюдалась каждая планета;
- дату наблюдения с точностью до полугода.



Решение

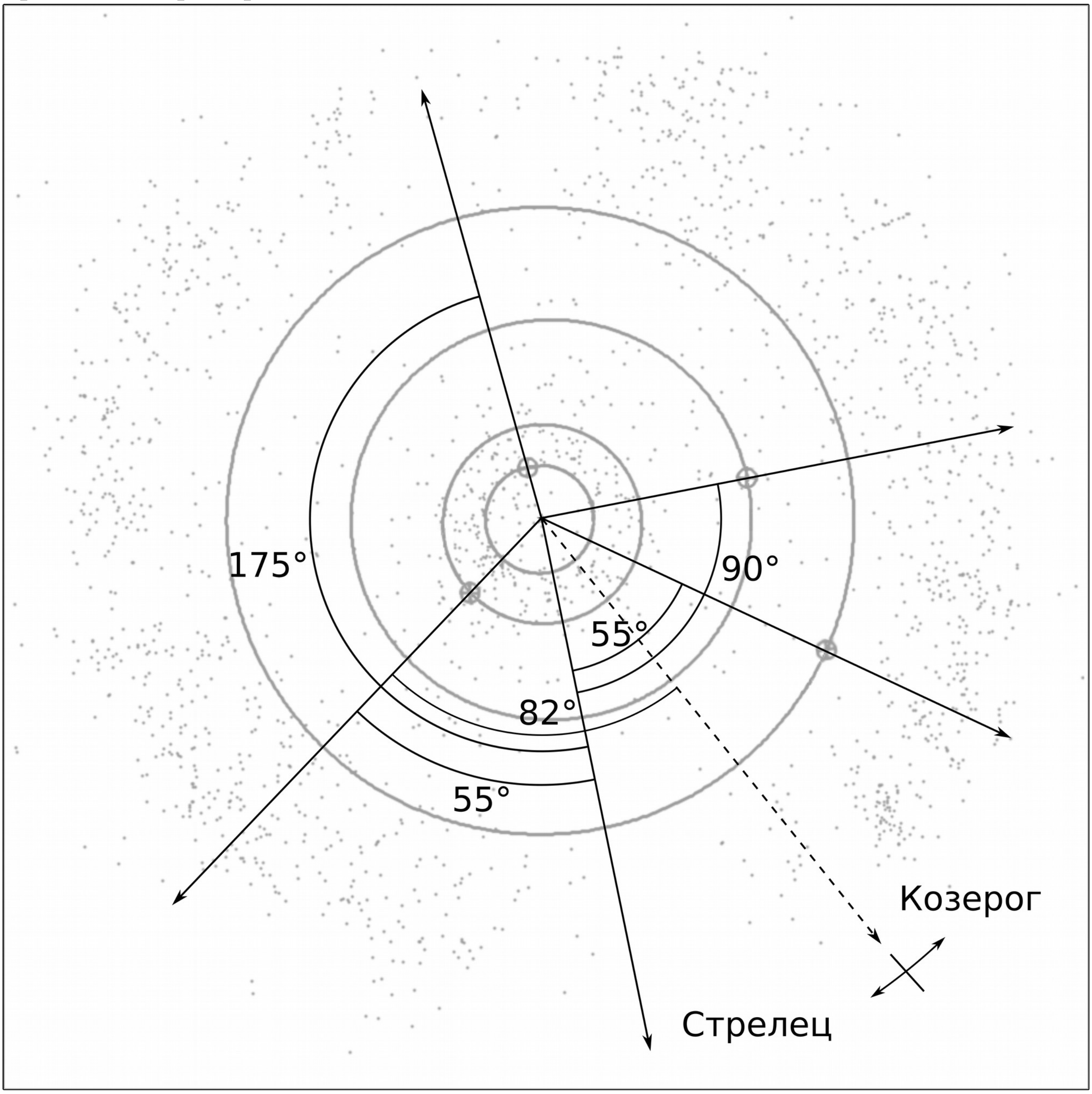
Обратим внимание, что в части пояса Койпера, противоположной указанному в условии пробелу (наверху изображения), также астероидов меньше, чем справа или слева. Для кентавров, расположенных вблизи орбит Юпитера и Сатурна таких особенностей не наблюдается. Выходит, в этих направлениях астероиды сложнее обнаружить. Логично предположить, что причина во Млечном Пути: среди огромного числа тусклых звёзд крайне сложно обнаружить ещё одну невзрачную движущуюся звёздочку. Млечный Путь пересекает эклиптику в созвездии Стрельца и на границе созвездий Близнецов и Тельца. В Стрельце располагается центр Галактики и там яркость Млечного Пути, а значит и число звёзд, максимальна. С противоположной стороны Млечный Путь, напротив, тускл и меньше препятствует поиску астероидов.

Отчего же мы видим кентавры на фоне центра Галактики? Дело в том, что хоть массовое открытие этого типа астероидов началось незначительно раньше открытия транснептуновых объектов, но кентавры значительно быстрее движутся вокруг Солнца, пройдя с момента открытия значительную часть своей орбиты. Далёкие астероиды за это же время сместились по своей орбите незначительно и не успели занять место в интересующем нас пробеле.

Определим положение планет. В качестве начала отсчёта выберем направление на центр Галактики. Точно его указать сложно, но можно попробовать угадать. Если бы астероиды не двигались, то необходимо было бы выбрать направление на середину пустой части пояса Койпера. Но астероиды постепенно смещаются против часовой стрелки, а значит направление нужное нам направление должно быть ближе к левой границе пустого пространства.

Теперь остаётся измерить углы между направлением на планеты и на центр Галактики и определить созвездие. Нептун находится на 55° восточнее. Будем считать, что одно созвездие занимает 30°. Тогда Нептун надо искать в Водолее. Уран расположен в 90° к востоку, т. е. должен находиться в Рыбах. Сатурн оказался в 55°, но уже к западу. Двигаясь от Стрельца, эклиптика проходит последовательно через созвездия Змееносца, Скорпиона и Весов. Известно, что в Скорпионе Солнце бывает примерно на протяжении недели, так что Змееносца со Скорпионом можно в нашем случае считать одним созвездием. Тогда Сатурн находится в Весах. Юпитер расположен в 175° к Западу, т. е. в противоположной части неба. Здесь находится созвездие Близнецов.

Для ответа на последний вопрос необходимо привязать положение планет в прошлом к какому-то известному их положению. Совсем недавно, 21 декабря 2020 года, произошло довольно заметное явление — соединение Юпитера и Сатурна. Сидерический период Юпитера равен 11.9 года, Сатурна — 29.5 лет. Их синодический период равен $S = \left(11.9^{-1} - 29.5^{-1}\right)^{-1} \approx 20\,\text{лет}$, а значит, в предыдущие 10 лет других их соединений не происходило. Поскольку в момент соединения Юпитер с Сатурном находились на границе созвездий Стрельца и Козерога, то они располагались на небе вблизи Солнца. К тому же выводу можно прийти, вспомнив, что соединение было видно только сразу после заката. Поэтому будем считать, что для наблюдателя на Солнце соединение произошло примерно в эти же даты.



Можно заметить, что на рисунке Юпитер отстаёт от Сатурна на 120°. Поскольку отставание в 360° Юпитер ликвидирует за 20 лет, то в текущих условиях он догонит Сатурн за $\frac{120°}{360°}20 \approx 6.7$. Значит указанная на рисунке картина наблюдалась примерно зимой-весной 2014 года.

Что примечательно, помня, что соединение было на границе Стрельца и Козерога, можно найти положение пробела в поясе Койпера на небе. Промежуток времени 6.7 года составляет 0.23 сидерического периода Сатурна, что соответствует дуге около 82°. Обозначим это направление пунктирной линией. Созвездие Стрельца велико, а центр Галактики находится на его западной границе. Поэтому пробел хорошо попадает на созвездие Стрельца.

Критерии проверки

Вывод о происхождении пробела в поясе Койпера оценивается в **2 балла**. Вычисление даты, на которую составлен рисунок, оценивается в **4 балла**: **2 балла** — вычисление синодического периода Сатурна для Юпитера, **1 балл** — правильное вычисление угла между направлениями на Сатурн и Юпитер и **1 балл** — за правильный ответ. Диапазон принимаемых значений: от осени 2013 до весны 2014.

Правильное определение какого-либо опорного направления (пробел в Стрельце, соединение на границе с Козерогом и т. п.) — **2 балла**. Правильное определение созвездия — **по 1 баллу** для каждой планеты.

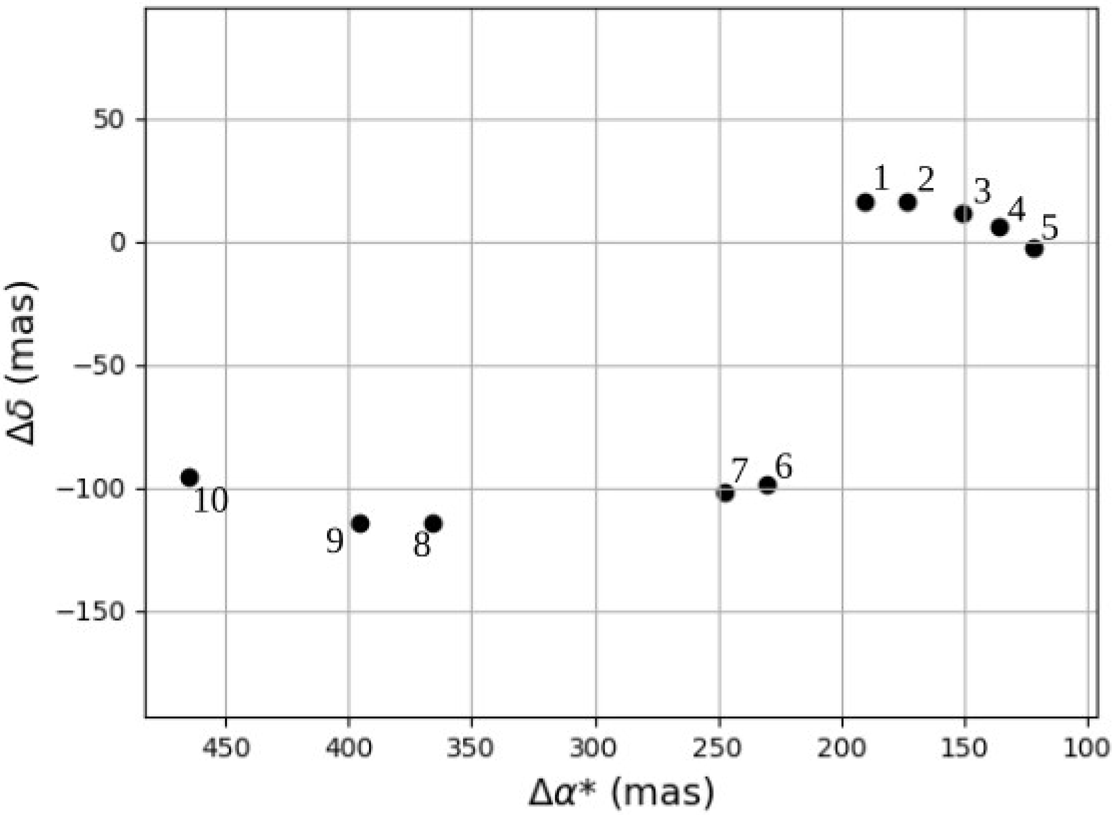
Максимальная оценка за задачу — **12 баллов**.

(К. И. Васильев)

Задача 8

Вам дан график, на котором изображено изменение экваториальных координат некоторой звезды. По осям отложены изменение прямого восхождения ($\alpha^* = \alpha \cos \delta$) и склонения δ в миллисекундах дуги. Эффекты аберрации, рефракции и прецессии учтены. В начальный момент времени звезда находилась на графике в точке с координатами (0, 0), а её координаты были равны $\alpha = 18^h$, $\delta = -5{,}5°$. Точками показаны измеренные положения звезды; даты измерений сведены в таблицу. Определите расстояние до звезды и величину её тангенциальной скорости.

№	Дата	№	Дата
1	04.05.18	6	23.11.18
2	28.05.18	7	30.11.18
3	20.06.18	8	15.01.19
4	05.07.18	9	28.01.19
5	21.07.18	10	27.05.19



Решение

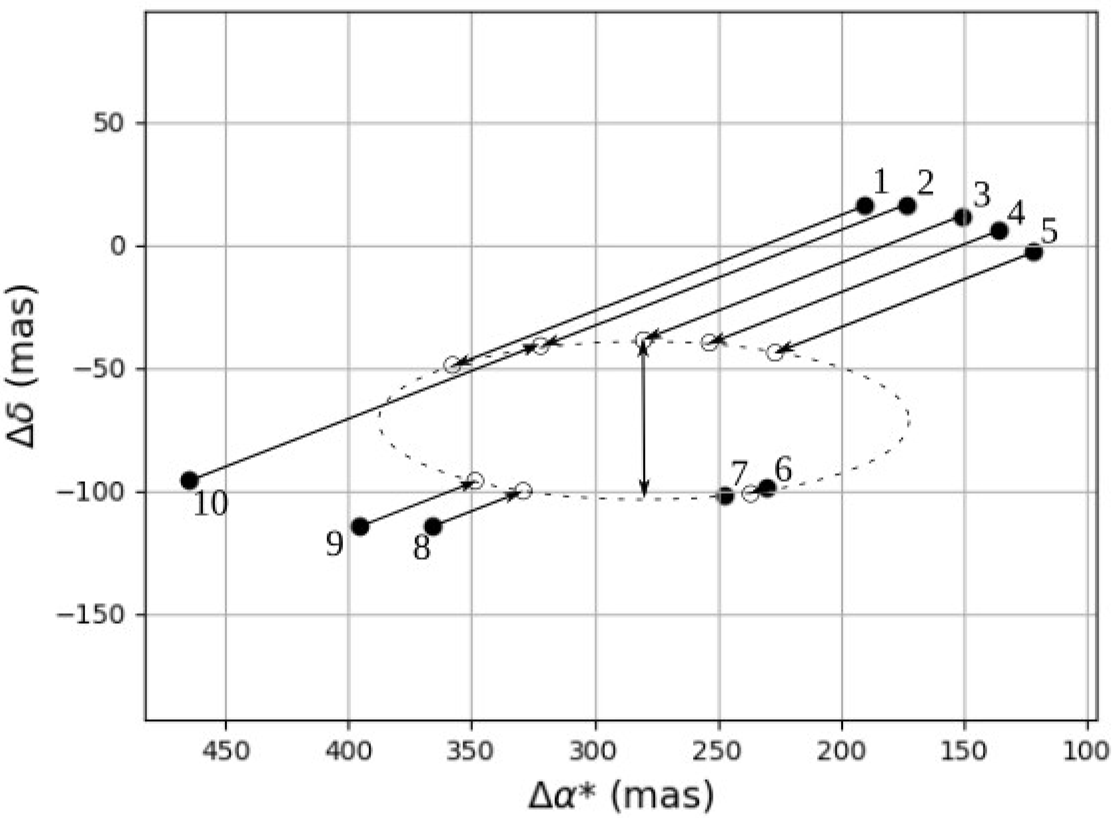
Из условия можно сделать вывод, что на положение звезды могут влиять собственное движение и параллакс. Собственное движение звезды происходит по прямой линии, тогда как параллакс приводит к движению по эллипсу с периодом в 1 год. На графике ни одно из этих движений в чистом виде не наблюдается, то есть мы видим смесь параллактического смещения и собственного движения.

Для того, чтобы найти расстояние до звезды необходимо определить её параллакс. Для вычисления тангенциальной скорости потребуется кроме расстояния найти собственное движение звезды. То есть, нам нужно измерить собственное движение и параллакс, для чего их нужно «разъединить».

Проще всего найти собственное движение. Параллактическое движение циклично: звезда каждый год должна возвращаться в исходное положение. Заметим, что между вторым и десятым наблюдениями прошёл почти ровно год. Измерив отличие в положении звезды с интервалом в 1 год, мы получим собственное движение μ = 0.310 ″/год.

Теперь попытаемся восстановить параллактический эллипс. Для этого попытаемся к какой-то точке придвинуть все остальные, вычитая собственное движение. Для того, чтобы наш параллактический эллипс без проблем поместился на рисунке возьмём в качестве опорной точку №7. Тогда каждую точку с номерами от 1 до 6 необходимо переместить в направлении собственного движения на расстояние, равное μt, где t — время, за которое звезда переместилась из данной точки в точку 7, выраженное в годах. Точки с номерами от 8 до 10 нужно передвинуть таким же образом в противоположном направлении. Для удобства все числа соберём в таблицу.

Дата	Прошло дней	t, лет	μt, mas
04.05.18	210	0.575	180
28.05.18	186	0.509	159
20.06.18	163	0.446	140
05.07.18	143	0.405	127
21.07.18	132	0.361	113
23.11.18	7	0.019	6
30.11.18			
15.01.19	46	0.126	39
28.01.19	59	0.162	51
27.05.19	178	0.487	153



Сдвинем все точки на графике на вычисленное расстояние. Отметив новое положение звезды кружочками, замечаем, что они выстраиваются в эллипс.

Заметим, что прямое восхождение звезды равно 270°. Значит можно вычислить эклиптическую широту звезды $\beta = 23.5 - 5.5 = 18°$. Для такого прямого восхождения линии сетки склонений и эклиптических широт параллельны. Отсюда делаем вывод:

1) большая полуось эллипса должна быть на рисунке расположена горизонтально, а малая — вертикально;
2) отношение вертикальной и горизонтальной осей параллактического эллипса должно быть равно $\sin 18° \approx 0.3$ или 3:10;
3) максимального значения параллактическое смещение должно достигаться в дни равноденствий, а минимального — в дни солнцестояний.

Искомый параллакс равен большой полуоси эллипса, но измерить его напрямую затруднительно, поскольку вблизи большой полуоси нет экспериментальных точек. Можно пойти двумя путями. Во-первых, можно считать, что звезда перемещается вдоль по небу равномерно и достроить необходимые точки. Такой подход не совсем верен в силу ошибочности исходного предположения, но получить не слишком ошибочный ответ позволяет.

Лучше пойти другим путём. Заметим, что в точке №3 звезда была за день до летнего солнцестояния, а значит должна попасть близко к малой оси эллипса. Хоть у нас нет второй точки на малой оси, достаточно очевидно, что эллипс на нужном участке легко дорисовать по соседним точкам, благо его кривизна на этом участке мала. Получаем величину малой оси эллипса $\pi_\beta = 0.065''$, откуда получаем искомый параллакс $\pi = \pi_\beta / 0.3 / 2 \approx 0.108''$.

Полученный эллипс изображён на рисунке пунктиром.

Расстояние до звезды получаем равным $D = \pi^{-1} \approx 9.3$ пк.

Тангенциальная скорость звезды $V_t = 4{,}74\,\mu/\pi \approx 13.6$ км/с.

Критерии проверки

Правильное определение собственного движения — **2 балла**.

Правильное определение параллакса — **8 баллов**: восстановление параллактического эллипса — **3 балла**, определение малой полуоси **1 балл**, эклиптической широты — **1 балл**, отношения осей параллактического эллипса— **1 балл**, большой полуоси эллипса — **1 балл**, параллакса — **1 балл**. Если в качестве параллакса берётся ось параллактического эллипса, то последний балл не выставляется. Если способ определения параллакса идейно неверный, то этот этап не засчитывается, но оставшиеся этапы оцениваются в полной мере.

Определение расстояния оценивается **1 баллом**, если формула записана верно и вычисление проведено без ошибки.

Определение тангенциальной скорости оценивается **1 баллом**, если формула записана верно и вычисление проведено без ошибки.

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Справочные данные

Планета	Большая полуось, а.е.	Эксцент-риситет	Наклон к плоскости эклиптики, °	Период обращения
Меркурий	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут
Венера	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут
Земля	1.0000	0.0167	0.000	365.2564 сут
Марс	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут
Юпитер	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет
Сатурн	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет
Уран	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет
Нептун	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет