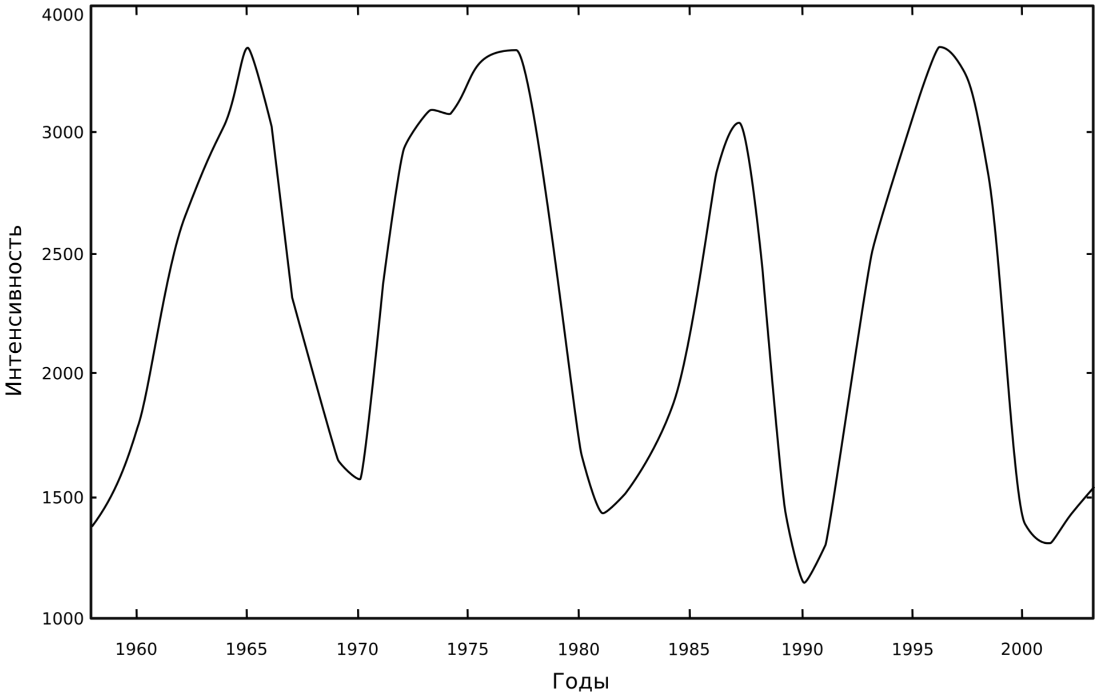
LXXVII Московская астрономическая олимпиада (2023 г.)

Теоретический тур. Решения и критерии оценивания

10 класс

Задача 1

На графике показана зависимость интенсивности (частиц на см^2 в секунду со стерадиана) галактических космических лучей с энергией выше 100 МэВ от времени на Земле. Объясните причину переменности. Когда наблюдаются минимумы, а когда — максимумы интенсивности?



Решение. Галактические космические лучи (ГКЛ), как ясно из названия, приходят в Солнечную систему извне. Основная составляющая комических лучей — это протоны высоких энергий. Возникают они в разных местах нашей галактики, но, двигаясь сквозь неё, взаимодействуют с магнитными полями, что приводит к полному запутыванию их траекторий. В итоге частицы приходят в солнечную систему изотропно. Поэтому переменность на графике не может быть связана с переменностью какого-либо одного источника ГКЛ.

Можно заметить, что минимумы (или максимумы) повторяются с периодом (не строгим) чуть больше 10 лет. В Солнечной системе есть похожий период — 11-летний период солнечной активности. В периоды максимума активности в атмосфере Солнца появляется большое число активных образований, которые приводят к усилению солнечного ветра, который, в свою очередь, взаимодействует с галактическими космическими лучами (ГКЛ) и препятствует проникновению их внутрь Солнечной системы. Поэтому максимумы интенсивности ГКЛ наблюдаются во время минимумов солнечной активности, а минимумы интенсивности, наоборот — во время макимумов активности.

Солнечный ветер мало препятствует ГКЛ с высокой энергией, но их число сравнительно невелико и не вносит решающего вклада в этот график.

Критерии проверки

1. Замечена связь с периодом солнечной активности **1 балл**
2. Показано, что солнечная активность препятствует ГКЛ **3 балла**

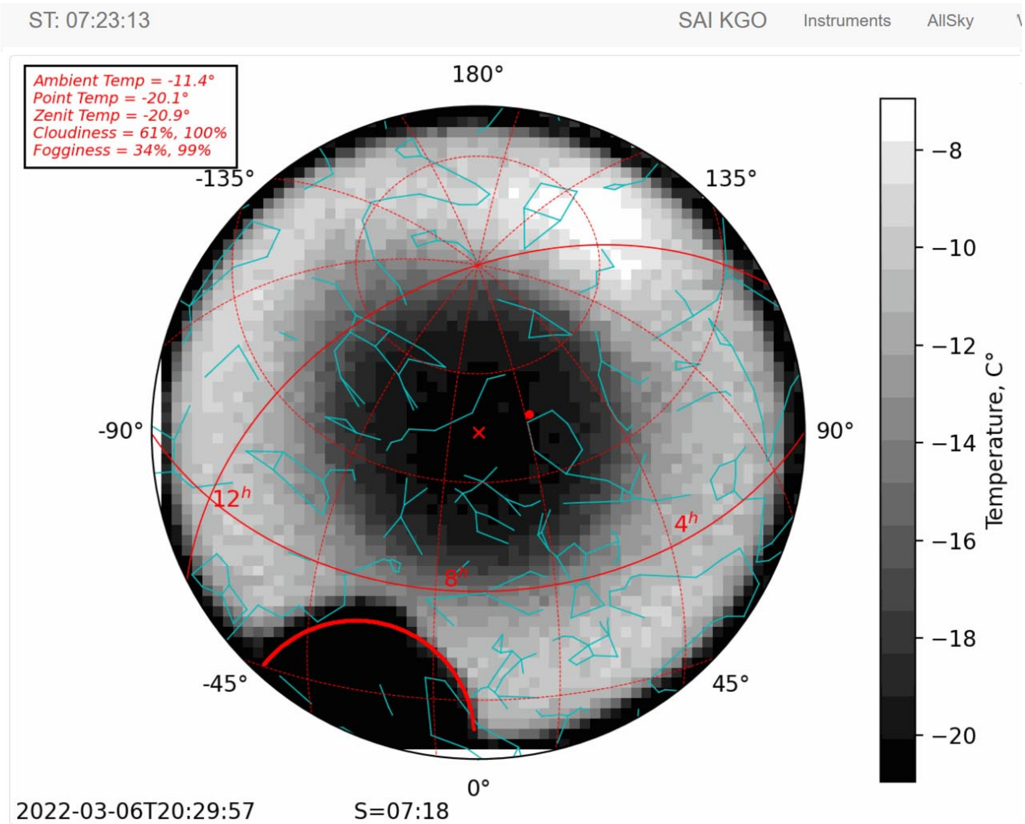
   За противоположный вывод, что солнечный ветер добавляет отсчётов во время максимумов, выставляется 2 балла за всю задачу.

Максимальная оценка за задачу **4 балла**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 2

На Кавказской горной обсерватории ГАИШ МГУ для мониторинга облачности установлен специальный прибор, который измеряет температуру разных участков неба и выводит на экран её распределение по небесной сфере. Облака имеют более высокую температуру, чем чистое небо, поэтому их легко увидеть в инфракрасном диапазоне: чем плотнее облака, тем ярче они в этом диапазоне длин волн. В один из дней в течение нескольких часов прибор демонстрировал распределение яркости схожее с кольцом, показанное на приложенном рисунке. Чёрное пятно внизу изображения между 0 и -45 азимутами — купол телескопа. Объясните наблюдаемую картину.



Решение. Распределение температуры облаков на рисунке может соответствовать либо распределению именно температуры плотных облаков (и тогда они должны быть расположены вокруг обсерватории по кольцу, что маловероятно, принимая во внимание, что такая картина наблюдалась несколько часов), либо распределению количества излучающей в ИК-диапазоне материи.

Под второй вариант подходит тот случай, когда небо над прибором затянуто равномерно — количество излучающего вещества будет набираться просто за счёт увеличения воздушной массы с увеличением зенитного расстояния. Плотные непрозрачные облака или туман не могут создать такую картину, поскольку в таком случае равномерно светилось бы всё небо.

Остаётся вариант с равномерным слоем полупрозрачного тумана: в околозенитной области он позволяет нам видеть холодное небо лишь, слегка «подогретое» излучением тумана. По мере роста зенитного расстояния увеличивающийся путь сквозь слой тумана приносит всё больше ИК-квантов света, которые и рождают эффект кольца.

Критерии проверки

Объяснение с указанием на то, что наблюдаемая картина может быть получена от полупрозрачного (в оптическом или ИК диапазонах длин волн) равномерного слоя облачности или тумана, оценивается от 0 до 4 баллов. При наличии дополнительных (к верному) объяснений оценка снижается в зависимости от степени некорректности дополнительных объяснений на 1–3 балла.

Некоторые варианты ответов и их оценивание:

1. Эффект связан с ориентацией прибора **0 баллов**
2. Кольцо из облаков, а в середине ясное небо **0 баллов**
3. На горе лежит сплошное облако, но в центре оно «протыкается» горой **1 балл**
4. Мы видим тёплый слой воздуха у поверхности **1 балл**
5. Явно замечена связь, что луч света дольше взаимодействует со средой при увеличении зенитного расстояния, но дано неверное объяснение эффекта **2 балла**

Максимальная оценка за задачу **4 балла**.

(А. М. Татарников)

Задача 3

Красная и оранжевая звёзды составляют затменную двойную систему. Красная звезда на 0.5^{m} ярче оранжевой, а её радиус в 2.6 раза больше. Определите падение блеска двойной в главном и вторичном минимуме, если затмения в системе центральные. Чему равно отношение температур звёзд? Потемнением дисков звёзд к краю пренебречь.

Решение. Пусть $m_{\text{к}}$ — блеск красной звезды, $m_{\text{о}}$ — блеск оранжевой звезды, m_{Σ} — их суммарный блеск, $m_{\text{г}}$ — блеск двойной в главном минимуме, а $m_{\text{в}}$ — во вторичном. В моменты затмений или красная звезда полностью закрывает оранжевую, или оранжевая звезда проходит по диску красной, блокируя часть её света. В обоих случаях к наблюдателю перестаёт приходить свет с одинаковой по площади части неба, но, поскольку оранжевая звезда излучает больше энергии с единицы площади, большее падение блеска, то есть главный минимум на кривой блеска, будет тогда, когда красная звезда закрывает оранжевую. В этом случае мы видим только красную звезду: $m_{\text{г}} = m_{\text{к}}$.

Для определения блеска звезды вне затмения воспользуемся формулой Погсона. Поскольку звёзды находятся на одинаковом расстоянии от наблюдателя, освещённости (E), создаваемые ими, пропорциональны их светимостям (L). Из Закона Стефана-Больцмана светимость связана с радиусом (R) и температурой (T) звезды, как $L \sim R^2T^4$. Тогда

$$m_\Sigma = m_\text{о} - 2.5\lg\frac{E_\text{к}+E_\text{о}}{E_\text{о}} = m_\text{о} - 2.5\lg\left(\frac{L_\text{к}}{L_\text{о}}+1\right)$$

Отношение $L_\text{к}/L_\text{о}$ также найдем из закона Погсона:

$$\frac{L_\text{к}}{L_\text{о}} = 10^{-0.4(m_\text{к}-m_\text{о})} \approx 1.58$$

Тогда искомая суммарная звёздная величина равна

$$m_\Sigma = m_\text{о} - 2.5\lg 2.58 \approx m_\text{о} - 1.03,$$

а падение блеска в главном минимуме составит

$$\Delta m_\text{г} = m_\text{к} - m_\text{о} + 1.03 = 1.03 - 0.5 = 0.53.$$

Во вторичном минимуме оранжевая звезда видна целиком, тогда как красной звезды видна только $(R_\text{к}^2 - R_\text{о}^2)/R_\text{к}^2 = (2.6^2-1)/2.6^2 \approx 0.85$ часть поверхности. Тогда звёздная величина во вторичном минимуме:

$$m_\text{в} = m_\text{о} - 2.5\lg\frac{0.85L_\text{к}+L_\text{о}}{L_\text{о}} = m_\text{о} - 2.5\lg\left(0.85\frac{L_\text{к}}{L_\text{о}}+1\right) \approx m_\text{о} - 0.93,$$

а падение блеска во вторичном минимуме:

$$\Delta m_\text{в} = m_\text{о} - 0.93 - m_\text{о} + 1.03 = 1.03 - 0.93 = 0.1.$$

Наконец, из закона Стефана-Больцмана получим отношение температур звёзд:

$$\frac{T_\text{о}}{T_\text{к}} = \sqrt{\frac{R_\text{к}}{R_\text{о}}}\sqrt[4]{\frac{L_\text{о}}{L_\text{к}}} = \frac{\sqrt{2.6}}{\sqrt[4]{1.58}} = 1.44.$$

Критерии проверки

1. Правильная запись формулы Погсона	**1 балл**
2. Правильная запись з-на Стефана-Больцмана	**1 балл**
3. Вычисление отношения светимостей двух звёзд	**1 балл**
4. Вычисление отношения температур двух звёзд	**1 балл**
5. Вычисление падения блеска в главном минимуме	**2 балла**
6. Вычисление падения блеска во вторичном минимуме	**2 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

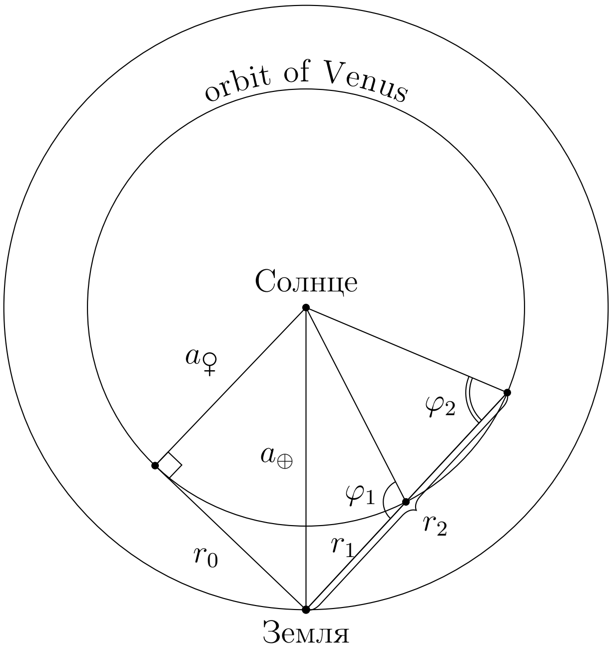
(Е. Н. Фадеев)

Задача 4

При наблюдении за Венерой на некотором угловом удалении ε от Солнца её угловой размер может различаться в 2 раза. Определите фазы Венеры в эти моменты. Орбиты Венеры и Земли круговые и лежат в одной плоскости.

Решение. Зная, что отношение угловых размеров Венеры — 2 раза, определим отношение расстояний до неё в этот момент:

$$p = 206265 \cdot \frac{D}{r}, \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{r_2}{r_1} = 2$$



Используем свойство секущей и касательной, проведённых из одной точки:

Если касательная и секущая проведены к окружности из одной точки, лежащей вне окружности, то квадрат расстояния до точки касания равен произведению длины всей секущей на её внешнюю часть.

$$r_0^2 = r_1 \cdot r_2 = 2r_1^2,$$

где r_0 — это расстояние до Венеры в элонгации. Его можно определить с помощью теоремы Пифагора, так как полуоси обоих объектов известны:

$$r_0^2 = a_\oplus^2 - a_♀^2.$$

Тогда искомое расстояние до объекта r_1 будет равно

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(a_\oplus^2 - a_♀^2)} = 0.49\,\text{а.е.},$$

а расстояние r_2 будет равно

$$r_2 = 2r_1 = 0.98\,\text{а.е.}$$

Теперь перейдём к нахождению фазы, а следовательно, фазового угла. В $\triangle \odot \oplus ♀$ известны три стороны и ни одного угла. Воспользуемся теоремой косинусов для стороны $a_\oplus$, тогда единственным неизвестным будет угол при Венере, который является фазовым:

$$a_\oplus^2 = a_♀^2 + r_1^2 - 2a_♀ r_1 \cos\varphi_1.$$

Выразим косинус:

$$\cos\varphi_1 = \frac{a_♀^2 + r_1^2 - a_\oplus^2}{2a_♀ r_1},$$

$$\varphi_1 = 110^\circ.$$

Определим фазу:

$$\Phi = \frac{1+\cos\varphi_1}{2} = \cos^2\frac{\varphi_1}{2} \approx 0.33.$$

Можно провести аналогичные действия для дальнего положения Венеры, но можно заметить, что треугольник с вершинами в Солнце и двух положениях Венеры — равнобедренный, а углы φ_1 и φ_2 — смежные. Тогда $\varphi_2 = 180^\circ - \varphi_1 \approx 70^\circ$, откуда фаза равна

$$\Phi_2 = \frac{1+\cos\varphi_2}{2} = \frac{1-\cos\varphi_1}{2} = 1 - \Phi_1 = 0.67.$$

Критерии проверки

1. Отношение расстояний между двумя положениями Венеры **1 балл**
2. Определение растояний **4 балла**
3. Формула для фазы планеты **1 балл**
4. Определение двух значений фазы Венеры **2 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(В. Б. Игнатьев)

Задача 5

Вокруг далёкой звезды движется звезда-спутник с орбитальным периодом 160 лет. Видимая орбита спутника имеет эллиптическую форму с большой полуосью, равной $0.5''$, и малой полуосью — $0.35''$. Главная звезда находится на угловом расстоянии $0.2''$ от центра эллипса на его видимой большой оси. Определите большую полуось (в астрономических единицах), эксцентриситет орбиты системы, наклон орбитальной плоскости к картинной и сумму масс звёзд (в массах Солнца), если параллакс этой двойной равен $0.0125''$, а линия апсид лежит в картинной плоскости.

Решение. Расстояние до двойной равно $1/0.0125 = 80\,\text{пк}$. На таком расстоянии под углом $1''$ виден отрезок величиной 80 а.е. Большая полуось орбиты спутника видна под вдвое меньшим углом, следовательно, и её линейный размер в два раза меньше: $a = 40\,\text{а.е.}$

Зная период P и большую полуось орбиты, определим с помощью 3-го закона Кеплера массу двойной:

$$M = M_\odot \left(\frac{a}{1\,\text{а.е.}}\right)^3 \left(\frac{1\,\text{год}}{T}\right)^2 = \frac{40^3}{160^2} M_\odot = 2.5 M_\odot.$$

Расстояние между центром эллиптической орбиты и звездой – это фокусное расстояние c. По определению эксцентриситета:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{0.2''}{0.5''} = 0.4.$$

При таком эксцентриситете малая полуось эллипса равна $b = a\sqrt{1-e^2} \approx 37\,\text{а.е.}$, т. е. должна быть видна под углом, $\delta = 37\,\text{а.е.}/80\,\text{пк} \approx 0.46''$. Тогда угол наклона орбиты равен

$$i = \arccos\left(\frac{0.35''}{0.46''}\right) \approx 40^\circ.$$

Критерии проверки

1. Определение расстояния до двойной **1 балл**
2. Определение величины большой полуоси **1 балл**
3. Определение эксцентриситета орбиты **2 балла**
4. Определение наклонения орбиты **2 балла**
5. Определение массы двойной **2 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 6

Технологически развитая цивилизация способна отправить автономный звездолёт-поселение к ближайшей соседней звезде. Звездолёт имеет скорость 10% от скорости света. После прибытия к звезде за время 200 лет экипаж звездолёта построит два аналогичных звездолёта, используя найденное вокруг звезды вещество, а население первого звездолёта увеличится достаточно, чтобы составить команду новых звездолётов. Они отправятся к двум ближайшим звёздам, которые представители этой цивилизации ещё не посещали, и около них история повторится (спустя 200 лет после прибытия от каждой звезды отправятся два новых звездолёта). Необходимо оценить минимальное время, которое потребуется, чтобы звездолёты этой цивилизации побывали около каждой звезды из диска нашей Галактики. Считать, что звёзды в диске распределены однородно.

Решение. Число звёзд, которое посетят звездолёты за n поколений (если первый звездолёт считать первым поколением) даётся суммой:

$$N(n) = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Для последнего равенства использовалась сумма n первых членов геометрической прогрессии. Приравняв к числу звёзд в Галактике $N_\mathrm{s} = 10^{11}$ и пренебрегая 1, получаем:

$$n = \log_2 10^{11} = \frac{\lg 10^{11}}{\lg 2} \approx 36.54 < 37.$$

Таким образом, наименьшее число поколений звездолётов, за которое возможно колонизировать галактику, равно 37.

Теперь нужно найти среднее расстояние, которое будут проходить звездолёты каждого поколения. Время расселения будет минимальным, если расселение будет происходить из центра Галактики. Чтобы минимизировать расстояние, на каждом «шаге» расселения будет максимально плотно заполняться круглая область диска (заселённая область — это круг, все звёзды внутри круга заселены). Радиус этой области r_i найдём из условия однородности распределения звёзд в диске, т.е. из того, что число звёзд в круге пропорционально его площади:

$$r_i = r_\mathrm{g}\sqrt{\frac{N(i)}{N_\mathrm{s}}},$$

где r_g – радиус диска Галактики. Расстояния, проходимые звездолётами на каждом шаге будут лежать в диапазоне от 0 до r_i. Возьмём для оценки среднее, т.е. $r_i/2$. Тогда итоговая оценка времени расселения будет

$$t = 200n + \sum_{i=1}^{n} \frac{r_\mathrm{g}}{2v}\sqrt{\frac{N(i)}{N_\mathrm{s}}} = 200n + \frac{r_\mathrm{g}}{2v\sqrt{N_\mathrm{s}}}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{2}\right)^i =$$
$$= 200n + \frac{r_\mathrm{g}}{2v\sqrt{N_\mathrm{s}}}\frac{2^{\frac{n}{2}} - 1}{\sqrt{2} - 1} \approx 200n + 2.8\frac{r_\mathrm{g}}{v},$$

где мы использовали, что $N(i) \approx 2^i$. Считая радиус диска Галактики 20 кпк или 65 тыс.

световых лет, получаем, что членом $200n$ можно пренебречь, и итоговый ответ

$$t \approx 1.8\,\text{млн. лет.}$$

Это не единственное верное решение, итоговый ответ может зависеть от того, как именно выполняется заполнение Галактики. В частности, в качестве оценки расстояния, проходимого за 1 шаг, можно взять r_i. Тогда ответ увеличится в 2 раза. Возможно, существует более эффективный способ заполнения фрактальным «деревом». Однако принципиально неверным будет ответ r_g/v, при котором не учитывается пространственное распределение звёзд и необходимость заселения всех звёзд. Также неверный ответ $t = 200n = 7400$ лет.

В приведённом выше решении считалось, что распределение звёзд двухмерное. На самом деле, диск Галактики имеет конечную толщину около 1100 св.лет. Поэтому для шагов расселения до 30-го включительно (из условия $r_i = 1100$ св. лет) следовало бы считать распределение трёхмерным, и считать время по более точной формуле:

$$t = \frac{r_\text{g}}{2vN_\text{s}^{1/3}}\sum_{i=1}^{30} 2^{i/3} + \frac{r_\text{g}}{2vN_\text{s}^{1/2}}\sum_{i=31}^{37} 2^{i/2} \approx 3.3\frac{r_\text{g}}{v}.$$

Однако, учитывая приближённый характер оценки, этого можно не делать.

Критерии проверки

В задаче возможны различные решения, которые могут быть засчитаны как правильные. Ниже приведены ориентировочные вехи решения, которые можно оценить. Обратите внимание на то, что в справочные данные вкралась опечатка в числе звёзд в галактике — 10×10^{11}.

1. Определение числа поколений (с учетом опечатки — 40) **2 балла**
2. Выбор центра галактики для начала экспансии **1 балл**
3. Определение среднего расстояния или времени, затрачиваемого на перелёт **3 балла**
4. Итоговый ответ. Засчитывается при разумных предположениях в предыдущих пунктах **2 балла**

   При ответе меньше 650 000 лет (время пересечения галактики по радиусу со скоростью $0.1c$) последний этап не засчитывается в любом случае.

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(С. В. Пилипенко)

Задача 7

На рисунке представлен разложенный по отдельным кадрам видеофрагмент. Он был получен в средних широтах Земли в день равноденствия. На видеозаписи запечатлён полёт белоголового орлана, длина тела которого (от кончика клюва до конца хвоста) составляет 130 см. Частота следования кадров на видеозаписи была стандартной — 25 кадров/с. Угловой диаметр диска Солнца равен 32′.

Фотография Zev Hoover, Christian Lockwood, Zoe Chakoian.

1. На каком расстоянии от птицы находилась камера?
2. Чему была равна частота взмахов крыльями?
3. Затмение какого типа наблюдал автор фотографии (дайте подробный ответ с обоснованием)?
4. На какой угловой высоте происходил пролёт орлана по диску небесного тела?

Опишите все сделанные измерения и операции полученными значениями.

h, °	ρ, ′	h, °	ρ, ′	h, °	ρ, ′	h, °	ρ, ′
90	0	30	1.7	5	9.9	2	18.4
70	0.4	20	2.6	4	11.8	1	24.7
50	0.8	10	5.3	3	14.4	0	35.4

h — Видимая (искажённая рефракцией) высота в градусах, ρ — величина рефракции в угловых минутах.

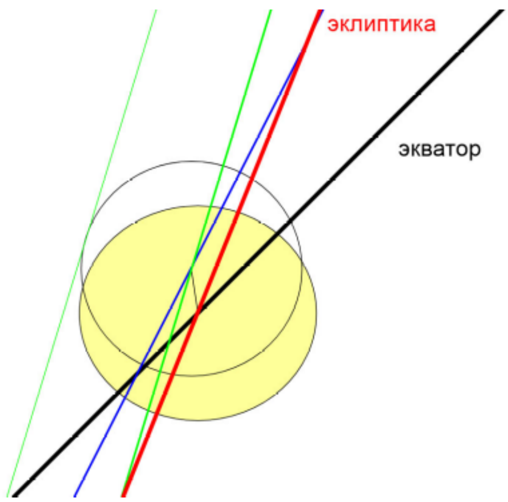
Решение. 1. Мы видим, что по мере пролёта орлана через поле зрения камеры его угловые размеры не изменялись. Поэтому будем считать, что он летит перпендикулярно лучу зрения, попадающего в центр кадра. Для определения расстояния до птицы нам требуется знать её угловые размеры. На записи запечатлён какой-то момент солнечного затмения. Видно, что изображение Солнца сплюснуто по вертикали (это действие атмосферной рефракции). Таким образом, в качестве «линейки» мы можем использовать горизонтальный диаметр солнечного изображения.

Подсчитаем, сколько раз птица помещается на диаметре диска Солнца. Получаем примерно 17 раз, а значит, угловой размер одного изображения птицы равен $r = 32'/17 \approx 113''$. Под таким углом птица длиной $l = 130$ см будет видна с расстояния

$$L = l/r = 1.3/(113/206\,265) \approx 2400\,\text{м}.$$

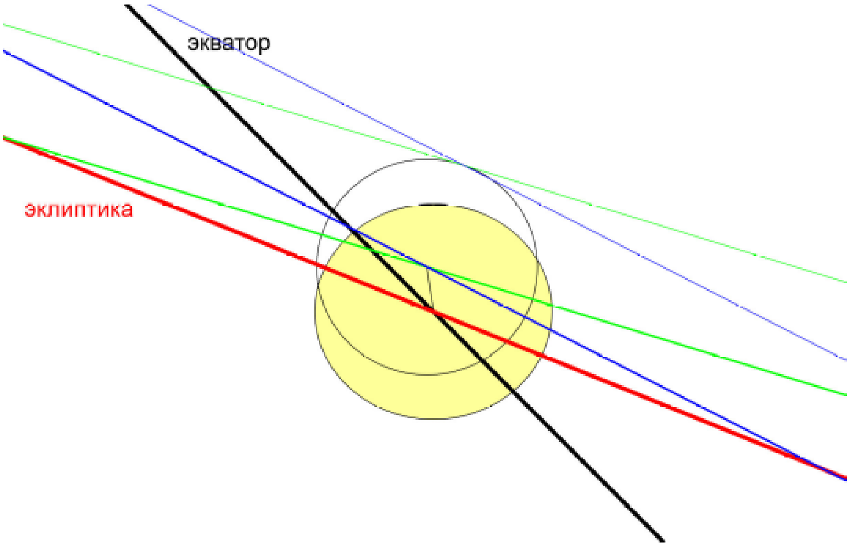
2. Частота следования кадров на видеозаписи равна 25 Гц (25 кадров в секунду). Хорошо видно, что между положениями крыльев птицы, находящимися в одинаковой фазе (например, максимально поднятыми), проходит 10 кадров. Это число можно получить несколько раз, подсчитав его на разных промежутках траектории птицы, или подсчитав число изображений птицы между крайним левым и крайним правым её изображениями, видимыми на рисунке. Это означает, что частота взмахов крыльями птицы в 10 раз меньше частоты следования кадров, т.е. она равна 2.5 Гц.

3. Мы наблюдаем солнечное затмение низко над горизонтом (см. п. 4 решения) во время равноденствия. При этом Солнце или восходит, или заходит. Нарисуем рисунок для случая восхода на широте 45° (это будет и углом между экватором и горизонтом в точке востока) в день осеннего равноденствия:



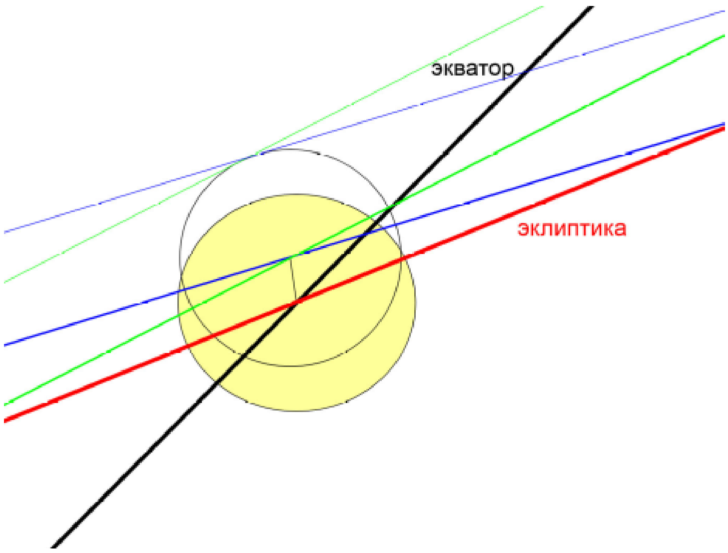
Чтобы отметить положения дисков небесных тел, мы провели на фотографии соответствующие сплюснутые окружности. Орбита Луны наклонена к плоскости эклиптики примерно на 5°, т. е. на рисунке она лежит между крайними её положениями, отмеченными синей и зелёной линиями, проходящими через центр диска Луны. Синяя линия пересекает эклиптику выше точки равноденствия, зелёная — ниже. И Солнце, и Луна относительно точки равноденствия движутся вниз на рисунке. Скорость движения Луны более, чем в 10 раз выше, чем у Солнца, поэтому будем считать диск Солнца неподвижным. Из построения видно, что касания Солнца левым краем диска Луны не произойдёт — затмение будет частным.

Нарисуем рисунок для случая захода в день осеннего равноденствия:



Обозначения на рисунке такие же, и из построения видно, что касания Солнца правым краем диска Луны не произойдёт — затмение будет частным.

Нарисуем рисунок для случая восхода в день весеннего равноденствия:

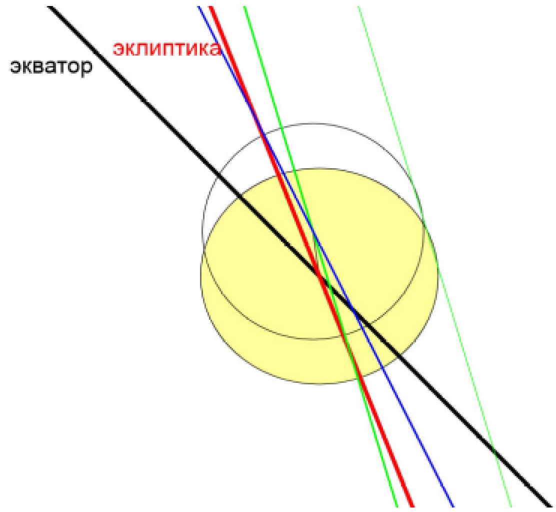


Обозначения на рисунке такие же, и из построения видно, что касания Солнца правым краем диска Луны не произойдёт — затмение будет частным.

Рассмотрим рисунок для случая захода Солнца в день весеннего равноденствия.

Обозначения на рисунке такие же, и из построения видно, что касание правых краёв дисков потенциально возможно (и в этом случае оно произошло ранее момента наблюдения), однако точность нашего построения не позволяет утверждать это однозначно. Из-за того, что Луна имеет меньший угловой размер, чем Солнце, может наблюдаться кольцеобразное солнечное затмение.

Таким образом, вероятнее всего, что затмение было частным, однако существует некоторая вероятность того, что оно было кольцеобразным.



4. На изображении хорошо заметна сплюснутость диска Солнца, вызванная атмосферной рефракцией. Измерим максимальный диаметр диска Солнца на изображении, найдём центр диаметра и измерим расстояние от него до крайней нижней точки диска. Вне атмосферы отношение диаметра и радиуса должно быть равно 2. У нас получилось отношение примерно 2.15. При угловом диаметре диска Солнца в $32'$ это даёт угловой радиус, искажённый рефракцией, равный $14.9'$. Значит рефракция «съела» $1.1'$.

Рефракция поднимает над горизонтом как центр диска Солнца, так и его нижний край, но нижний край она поднимает сильнее, т.к. он имеет на $16'$ большее зенитное расстояние. Отсюда становится понятным, что нам надо найти ту высоту, при которой разница в $16'$ даст разницу в эффекте в $1'$.

Обратимся к таблице. Посчитав разности углов рефракции на соседних высотах, обнаружим, что для высот $2°$ и $3°$ она составляет $4'$. Тогда разность высот в $0.25°$ даст требуемую разность углов рефракции $1'$. Значит, орлан летел на высоте около $2.5°$.

Ответ: 1) 2.4 км, 2) 2.5 Гц, 3) частное солнечное затмение, 4) примерно $3°$.

Критерии проверки

1. Ответ на первый вопрос в диапазоне 2.2 — 2.6 км при условии верного решения **3 балла**

   Если для измерения угловых размеров птицы использовалось сравнение одной тушки с диском Солнца, то оценка снижается на 2 балла даже при верном ответе.

   Если при верном подходе к решению ошибка в ответе вызвана ошибкой в измерениях, то оценка снижается на 2 балла.

2. Ответ на второй вопрос в диапазоне 2.2 — 2.9 Гц при условии верного решения **3 балла**

   Если для определения частоты использовалось одно измерение расстояния (в тушках) между ближайшими одинаковыми фазами (т.е. не проводилось ни усреднение нескольких значений, ни измерения на максимально возможном интервале), то оценка снижается на 1 балл.

   Если при верном подходе к решению ошибка в ответе вызвана ошибкой в измерениях, то оценка снижается на 2 балла.

3. Ответ на вопрос 3 оценивается не более чем в **2 балла**

При оценивании этого пункта следует принять во внимание:
ответ о том, что наблюдается частная фаза солнечного затмения, оценивается в 1 балл;
ответ о том, что наблюдается частная фаза частного солнечного затмения с объяснением, почему это не может быть полное солнечное затмение, оценивается в 2 балла;
указание на то, что затмение было кольцевым, оценивается в 1 балл;
если представлено доказательство возможности этого, кроме того, что угловые размеры Луны меньше солнечных, ставится 2 балла.

Ответ о том, что наблюдается частная фаза солнечного затмения без объяснения, — 1 балл.

4. Указание на сплюснутость диска Солнца как на результат действия атмосферной рефракции **1 балл**

5. Верное вычисление сплюснутости с ответом (в зависимости от способа может быть получено как отношение диаметра к радиусу 2.1–2.3, так и сразу величина сплюснутости 1-2’) **1 балл**

6. Верное определение высоты (от 1° до 4° — в зависимости от найденной ранее величины сплюснутости) **2 балла**

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**.

(А. М. Татарников)

Задача 8

Радиоизлучение пульсаров распространяется через межзвёздную среду со скоростью $v = \ (1-(f_p/f)^2)^{0.5}\,c$, где f — частота излучения, $f_p = 8.98\,\text{кГц} \times \sqrt{n_e}$ — плазменная частота, n_e — электронная плотность, выраженная в см^{-3}, c – скорость света. В результате импульсы пульсаров приходят не одновременно на разных частотах. На рисунке показана зависимость времени прихода импульсов от частоты для пульсара J1840+5640. Определите:

1. период пульсара в секундах;
2. меру дисперсии (произведение электронной плотности на расстояние до пульсара) в $\text{пк}/\text{см}^3$;
3. электронную плотность в направлении пульсара в см^{-3};
4. какая должна быть ширина полосы пропускания приёмника, центрированная на 110 МГц, чтобы последовательные импульсы не накладывались друг на друга?

Тригонометрический параллакс пульсара равен 0.66 ± 0.06 миллисекунд. Для всех четырёх величин укажите погрешности измерения.

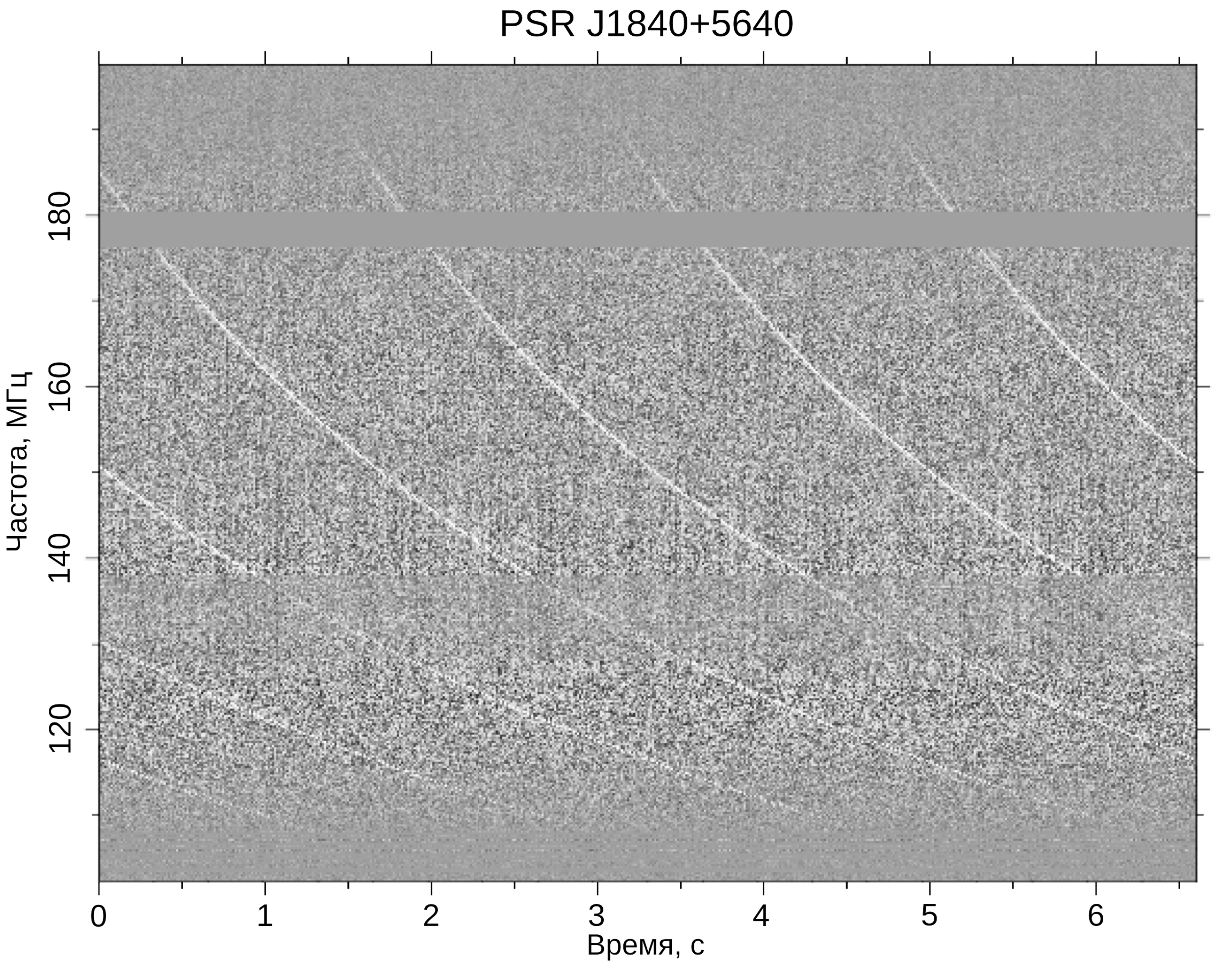


Рисунок из бакалаврской работы Julian Donner.

Решение. Чтобы определить период пульсара, достаточно провести горизонтальную линию и измерить расстояние вдоль неё между импульсами. Правильнее всего измерить расстояние между самыми дальними импульсами, а результат разделить на число периодов между этими импульсами. Разумеется, измерения надо повторять неоднократно. Период пульсара получается равным $P = 1.66 \pm 0.05$ с.

Измеренная величина — это именно период пульсара как источника. Радиоизлучение пульсара формируется в районе полярных шапок нейтронных звёзд, но к нам обычно приходит излучение только от одной такой области. В редких случаях удачного расположения оси вращения звезды и наклона её магнитной оси между главными импульсами наблюдается слабый интеримпульс, а ситуации, когда интеримпульс близок по интенсивности с главным импульсом, исключительно редки. Поэтому период пульсара можно интерпретиовать как период вращения нейтронной звезды.

Пусть L — расстояние до пульсара. Тогда время, за которое сигнал достигнет наблюдателя, равно

$$t = \frac{L}{c}\left(1 - \frac{f_p^2}{f^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{L}{c}\left(1 + \frac{f_p^2}{2f^2}\right).$$

Здесь мы учли, что излучение может распространяться только при $f_p < f$, в противном случае скорость радиоизлучения не выражается действительным числом. С другой стороны, радионаблюдения проводят и на более низких частотах, так что можно считать, что $f_p \ll f$. Разница во времени прибытия сигнала на разных частотах равна

$$\Delta t = \frac{L f_p^2}{2c}\left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2}\right) = D \times DM \left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2}\right).$$

Здесь $D = (8.98\,\text{кГц})^2/(2c) \approx 4.15 \times 10^3\,\text{МГц}^2\ \text{пк}^{-1}\ \text{см}^3\ \text{с}$ — дисперсионная постоянная, $DM = n_e L$ — мера дисперсии.

Чтобы определить меру дисперсии, надо измерить задержку одного импульса на разных частотах. Величина меры дисперсии получается равной 27 ± 2 пк/см^3.

Электронная плотность равна

$$n_e = \frac{DM}{L} = DM \times \pi'' \approx 0.019 \pm 0.002\,\text{см}^{-3}.$$

Следует заметить, что погрешность параллакса, данная в условии, больше, чем погрешность измерения меры дисперсии по данному рисунку.

Теперь ответим на последний вопрос. Частота 110 МГц присутствует на графике. Можно выбрать точку пересеченя одного из импульсов этой частоты, отложить отрезок к большим частотам до пересечения со следующим импульсом и принять за полуширину искомой полосы пропускания половину этого отрезка. Тогда получим полуширину полосы пропускания около 5.7 МГц, т. е. искомую ширину 11.4 МГц. Однако на меньших частотах импульсы сильнее растягиваются во времени и сближаются в частотном направлении, отчего ширина полосы будет определяться со стороны низких частот, которые на графике не видны. Поэтому такой упрощённый подход нельзя считать правильным.

Пусть f_0 — центральная частота, а Δf — половина полосы частот приёмника. Тогда разница времени прихода импульса на границах диапазона должна быть не больше периода пульсара. Получаем:

$$P = D \times DM \left(\frac{1}{(f_0 - \frac{\Delta f}{2})^2} - \frac{1}{(f_0 + \frac{\Delta f}{2})^2} \right).$$

Ожидаемое значение Δf много меньше f_0, поэтому запишем приближенное значение выражения в скобках:

$$\frac{P f_0^2}{D \times DM} = \left(\left(1 - \frac{\Delta f}{2f_0}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{\Delta f}{2f_0}\right)^{-2} \right) \approx 1 + \frac{\Delta f}{f_0} - 1 + \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{2\Delta f}{f_0}.$$

Отсюда

$$\Delta f = \frac{P f_0^3}{2D \times DM} = 9.9 \pm 0.1\,\text{МГц}.$$

Критерии проверки

Погрешности, указанные в решении, указывают не допустимую погрешность измерений, а допустимое отклонение ответа участника. Реальные погрешности при использовании линейки в несколько раз меньше. Отклонение ответа участника больше, чем на величину погрешности, но менее, чем на 2 её величины, приводит к уменьшению оценки за соответствующий пункт на 1 балл.

1. Определение периода пульсара и погрешности измерения **по 1 баллу**
   Если за период пульсара принимается удвоенная величина периода, то оценка за этап не превышает 1 балла.
2. Измерена задержка импульса на двух разных частотах **1 балл**
3. Вывод формулы, связывающей задержку сигнала от частоты **1 балл**
4. Приведение этой формулы к вычислениям на обычном калькуляторе или верное численное решение на «продвинутом» калькуляторе (обычно вычисление плазменной частоты – правильное значение 1.2 кГц) **1 балл**
5. Определение меры дисперсии и её погрешности **по 1 баллу**
6. Определение электронной плотности и её погрешности **по 1 баллу**
7. Определение ширины полосы пропускания **2 балла**
8. Определение погрешности ширины полосы **1 балл**
   При определении ширины полосы упрощённым способом выставляется только 1 балл и не оценивается оценка погрешности.

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)