ЗАДАЧИ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА РОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ И КОСМИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ.

Задачи 8-9 класс

1. Почему самые продолжительные солнечные затмения наблюдаются в тропических странах?
2. 12 знаков Зодиака имеют одинаковую протяженность по эклиптике. В каком из них Солнце находится наименьшее время?
3. Комета Галлея обращается вокруг Солнца за 76 лет, а планета Нептун за 165 лет. Кто из них более удален от Солнца в точке афелия своей орбиты?
4. Почему у молодой Луны хорошо видна не освещенная Солнцем поверхность (пепельный свет Луны), а в момент солнечного затмения она не видна?
5. От звезды 0^m на один сантиметр земной поверхности падает около 1 млн. фотонов в секунду. Сколько фотонов попадет на фотопластинку от звезды 20^m за 1 час, если диаметр объектива телескопа 1 м?
6. Подлетев к незнакомой планете и выключив двигатели, космический корабль вышел на круговую орбиту. Могут ли космонавты, используя только бортовые часы, определить среднюю плотность вещества исследуемой планеты?

Задачи 10-11 класс

1. Космический корабль опустился на астероид диаметром 1 км и средней плотностью 2,5 г/см^3. Космонавты решили объехать астероид по экватору на вездеходе за 2 часа. Смогут ли они это сделать?
2. Три звезды одинаковой массы образуют равносторонний треугольник со стороной L и диаметром P. Найти массы звезд.
3. У Альтаира (α Орла) годичный параллакс равен 0,198", собственное движение 0,658, лучевая скорость V_r = -26 км/с и блеск m = 0.89. Когда и на какое наименьшее расстояние Альтаир сблизится с Солнцем, и каким будет тогда его видимый блеск?
4. Какой вид имеет спектр быстро вращающейся планеты, если щель спектрографа направлена вдоль ее экватора?
5. Сколько раз в году Луна бывает в зените на экваторе?
6. Какова максимальная высота гор на поверхности Марса; Земли; Венеры; Луны? Теплота плавления скальных пород Q, ускорение силы тяжести q. Для расчетов принять Q = 60 кал/г для кварца.

Задачи творческого тура

Ярославль,
16-20 мая

8-9 классы

1. Обнаружена комета, орбита которой в перигелии и афелии касается орбит Земли и Марса. Что можно сказать об этой комете: орбитальный период, скорость встречи с планетами, устойчива ли орбита, условия наблюдения и т.п.

2. Вам предложено сделать телескоп для визуального наблюдения Луны и планет, используя при этом лишь одну линзу. Возьметесь ли вы за это задание? Если да, то какую линзу закажите (укажите размер и фокусное расстояние). Каковы при этом будут характеристики вашего телескопа: увеличение, поле зрения?

10-11 классы

1. Для захоронения радиоактивных отходов предложено отправлять их на Солнце или выводить за пределы Солнечной системы. Предложите наиболее экономичный способ, как это сделать.

Решения задач теоретического тура

Ярославль,
16-20 мая

8-9 класс

1. Во время солнечного затмения лунная тень движется по поверхности Земли приблизительно с запада на восток со скоростью около 1 км/с (это скорость движения Луны по орбите). В ту же сторону, но с меньшей скоростью, происходит суточное движение земной поверхности: на экваторе его скорость достигает $2\pi R_\oplus/24^h = 0,5$ км/с, а на полюсах уменьшается до нуля. Поэтому в районе экватора скорость тени относительно поверхности составляет только 0,5 км/с. Приняв диаметр лунной тени в 200 км, легко вычислить, что в высоких широтах затмение может продолжаться около 3,5 минут, тогда как на вблизи экватора – до семи минут.

2. Солнце быстрее всего движется по эклиптике в первых числах января, когда Земля проходит через перигелий орбиты. В этот период Солнце находится в созвездии Стрельца и в зодиакальном знаке Козерога. Значит, через знак козерога Солнце проходит наиболее быстро.

3. Орбита кометы сильно вытянута, поэтому в афелии она находится на расстоянии около $2a_к$ от Солнца, а планета на расстоянии $a_п$ (а – большая полуось орбиты). Значит отношение расстояний в афелии, найденное из третьего закона Кеплера:

$$\frac{2a_к}{a_п} = 2\left(\frac{T_к}{T_п}\right)^{2/3} = 1,2\,.$$

Комета Галлея в афелии удаляется за орбиту Нептуна.

4. Это эффект контраста: на фоне ночного неба пепельный свет Луны виден, а на фоне ярого дневного – нет. Даже в момент полного затмения небо вблизи Луны ярко освещено солнечной короной.

5. Разница в 20^m уменьшает поток фотонов в 10^8 раз. Время экспозиции (3600^s) и площадь объектива ($\pi D^2/4 = 7854$ см^2) увеличивают его в $3600\cdot 7854 = 2,8\cdot 10^7$ раз (потерь в оптике мы не учитываем). Следовательно, на пластинку попадает $0,28\cdot 10^6$ фотонов.

6. На низкой круговой орбите корабль движется с первой космической скоростью:

$$V^2 = \frac{GM}{R}\,,$$

где M и R – масса и радиус Земли. Его орбитальный период равен

$$P = \frac{2\pi R}{V} = 2\pi\left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2}.$$

Учитывая, что средняя плотность $\rho = M\big/\left(4\pi R^3/3\right)$, получим:

$$\rho = \frac{3\pi}{GP^2}\,.$$

Следовательно, определив с помощью часов период обращения корабля вокруг планеты, можно вычислить ее среднюю плотность.

Решения задач теоретического тура

Ярославль,
16-20 мая

10-11 класс

1. Нет, не смогут. Вездеход должен двигаться со скоростью не больше первой космической, иначе он оторвется от поверхности и потеряет опору. Найдем время облета астероида по низкой орбите с этой предельной скоростью:

$$T = \frac{2\pi R}{V_1} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\ .$$

Учтем, что плотность астероида выражается так: $\rho = 3M/4\pi R^3$. Тогда

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}\ .$$

Для поиска численных значений можно вспомнить, что у низколетящего спутника Земли T = 1,5 часа, а плотность Земли $\rho_\oplus$ = 5,5 г/см^3. Тогда для планеты плотности ρ (г/см^2) получим:

$$\text{T} = 1{,}5\sqrt{5{,}5/\rho}\ \text{час} = 3{,}5/\sqrt{\rho}\ \text{час.}$$

Зная плотность астероида, определим T = 2,2 часа. Значит, вездеход не сможет объехать астероид за 2 часа.

2. Расстояние от звезды до центра масс (r), лежащего на пересечении биссектрис треугольника, найдем с помощью теоремы Пифагора и теоремы о пересечении биссектрис, делящих друг друга в отношении 1 : 2. Следовательно, $r = L/\sqrt{3}$. Сложив по правилу параллелограмма силы, действующие на звезду, найдем ее ускорение к центру масс: $a = \sqrt{3}Gm/L^2$, где m – масса звезды. Это ускорение играет роль центростремительного $\left(V^2/r\right)$, поэтому скорость вращения $V = \sqrt{Gm/L}$. А поскольку орбитальный период $P = 2\pi R/V$, то $\left(P/2\pi\right)^2 = L^3/\left(3Gm\right)$, откуда $m = 4\pi^2 L^3/\left(3GP^2\right)$.

3. Собственное движение звезды в угловых секундах за год легко перевести в тангенциальную скорость звезды:

$$V_1 = 4{,}74\mu/\pi = 15{,}8\ \text{км/с.}$$

Тогда полная скорость звезды $V = \left(V_r^2 + V_t^2\right)^{1/2} = 30$ км/с. Поскольку современное расстояние до звезды $D = 1/\pi = 5{,}1$ пк, то из подобия треугольников для минимального расстояния D_m имеем:

$$D_m = DV_t/V = V_t/\left(\pi V\right) = 2{,}7\ \text{пк.}$$

Длина пути до сближения определяется подобным же образом:

$$L = DV_r/V = V_r/\left(\pi V\right),$$

следовательно сближение произойдет через

$$\Delta t = L/V = V_r/\left(\pi V^2\right) = 150 \text{ тыс. лет.}$$

Освещенность Земли звездой изменится в $\left(D/D_m\right)^2$ раз, следовательно, ее звездная величина составит $m_m = 0.89 - 5\lg\left(5{,}1/2{,}7\right) = -0{,}49$.

4. Линии в спектре быстро вращающейся планеты будут наклонены к протяжению спектра. Приближающийся к наблюдателю край диска планеты даст сдвиг одних концов линий в фиолетовую сторону спектра, удаляющийся же край – сдвиг других концов линий в красную сторону. Центр диска не даст никакого сдвига спектральных линий. Лучевая скорость будет пропорциональна расстоянию от центра диска. Поэтому наклонные линии будут прямыми.

5. Столько раз, сколько она пересекает небесный экватор. В течение сидерического месяца ($27{,}32^d$) она делает это дважды. Значит, в среднем 26 – 27 раз в течение года Луна видна в зените из различных точек на экваторе.

6. Максимальная высота гор (H) определяется из тех соображений, что при увеличении этой высоты на ΔH подножие горы плавится и вершина опускается на ΔH. При этом, работа силы тяжести на единицу площади составляет (ρ·H·q·ΔH), где ρ – плотность пород, а энергия плавления (ρ ΔH Q). Приравняв эти величины, получим: H = Q/q.
Для Земли: H = (60 кал/г·4,2 Дж/кал)/9б8 м·с$^{-2}$ = 26 км.
Для Марса: H = 68 км.
Для Венеры: H = 29 км.
Для Луны: H = 155 км.

Решение задач творческого тура

Ярославль,
16-20 мая

8-9 классы

1. Обозначим расстояние кометы от Солнца в перигелии через $R_p = 1$ а.е. (большая полуось орбиты Земли), а в афелии – через R_a = а.е. (большая полуось орбиты Марса). Тогда большая полуось орбиты кометы составит

$$a = \frac{1{,}0 + 1{,}5}{2} = 1{,}25\,\text{а.е.}$$

В соответствии с третьим законом Кеплера, ее орбитальный период

$$P = a^{3/2} = 1{,}4\,\text{года.}$$

Эксцентриситет орбиты кометы

$$e = \frac{R_a - R_p}{R_a + R_p} = 0{,}2\,.$$

Поскольку период кометы не находится в простой пропорции с периодами Марса и Земли, комета время от времени должна сближаться с этими планетами и подвергаться их гравитационному влиянию. Значит, ее орбита неустойчива. Найдем скорость сближения кометы с планетами. Для этого используем систему двух уравнений:

$V_p R_p = V_a R_a$ – закон сохранения момента импульса,

$V_p^2 - V_a^2 = 2GM(R_p^{-1} - R_a^{-1})$ – закон сохранения энергии, где V_a и V_p – скорость кометы, соответственно в афелии и перигелии; M – масса Солнца; а G – постоянная тяготения. Из этой системы путем простейших преобразований можно получить очень полезные формулы эллиптического движения:

$$V_p^2 = C_p^2(1+e),\ \text{где}\ C_p^2 = \frac{GM}{R_p};$$

$$V_a^2 = C_a^2(1-e),\ \text{где}\ C_a^2 = \frac{GM}{R_p}.$$

C_p и C_a – это скорости кругового движения, которые также называют «первыми космическими» или «кеплеровыми» скоростями, соответственно на расстоянии R_p и R_a от Солнца. В нашем случае C_p = 30 км/с (орбитальная скорость Земли) и C_a = 24 км/с (орбитальная скорость Марса). Следовательно, скорость кометы в перигелии и афелии: V_p = 33 км/с и V_a = 21 км/с.

Значит, в том случае, если комета движется вблизи плоскости эклиптики в сторону обращения планет, в перигелии она будет догонять Землю со скоростью $V_p - C_p$ = 3 км/с, а в афелии ее будет догонять Марс с такой же скоростью $C_a - V_a$ = 3 км/с. В остальных случаях, когда орбита кометы произвольно наклонена к эклиптике, ее скорость относительно планеты легко вычисляется по правилу параллелограмма.

Поскольку диапазон расстояний кометы от Солнца невелик (1,0 ÷1,5 а.е.), условия ее нагрева Солнцем остаются достаточно стабильными, поэтому условия видимости кометы в основном зависят от ее положения на относительно Земли. Комета будет близка к Земле в период ночной видимости, и далека от Земли в периоды утренней и вечерней видимости.

2. В принципе, можно. Пусть D и F – диаметр и фокусное расстояние положительной линзы. Она создает в фокальной плоскости действительное изображение, которое можно рассматривать глазом, без окуляра с расстояния наилучшего зрения (s = 20 ÷ 25 см). Очевидно, что угловое увеличение при этом будет F/s. Для увеличения в 50 раз нужна линза с $F \approx 12$ м. Поле зрения такого телескопа будет равно угловому диаметру линзы, деленному на увеличение телескопа, т.е $(D/F)/(F/S)$ в радианах. В угловых минутах это составит

$$\alpha = 3438' Ds/F^2 .$$

По условию задачи, α = 10', поэтому необходима линза диаметром D = 180 см. Таких линз не существует. Если же ограничиться линзой диаметром 15-20 см, то поле зрения будет около 1'. Это вполне достаточно, для изучения планет и других небольших ярких объектов, но управляться с таким телескопом будет очень нелегко.

Решение задач творческого тура

Ярославль,
16-20 мая

10-11 классы

1. Ракете, выведенной на орбиту Земли, нужно сообщить еще некоторую скорость для дальнейшего маневра. Чтобы ракета попала на Солнце, нужно практически полностью затормозить ее орбитальное движение, т.е. сообщить ей (в противоположном направлении) орбитальную скорость Земли:

$$V_1 = \left(\frac{GM}{R}\right)^{1/2} = 30 \text{ км/с},$$

здесь M = $2 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца, а R = 1 а.е. = 150 млн.км – радиус земной орбиты. С другой стороны, для запуска ракеты за пределы Солнечной системы, она должна иметь вторую космическую скорость относительно Солнца:

$$V_\infty = \left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2} = 42 \text{ км/с},$$

Т.е. к ее орбитальной скорости нужно добавить всего

$$V_2 = V_\infty - V_1 = 12 \text{ км/с}.$$

Учитывая, что затрата энергии пропорциональна квадрату скорости, получим относительную выгоду запуска за пределы Солнечной системы:

$$(V_1/V_2)^2 = 6{,}25 \text{ раза}.$$

Существует, однако, метод, который может заметно удешевить оба способа запуска. Это так называемый пертурбационный маневр, т.е. использование гравитационного поля движущейся планеты для движения для изменения орбиты космического аппарата. Достаточно направить ракету к Юпитеру и правильно выбрать траекторию полета, чтобы притяжение Юпитера отклонила ее либо в сторону Солнца, либо за пределы Солнечной системы. Поэтому оба способа захоронения отходов теперь становятся экономически равноправными. Для полета к Юпитеру нужна скорость, немного меньшая, чем V_2, около 9 км/с (см. задание 1 для 8-9 кл.).