



Теоретический тур, условия задач

9 класс.

1. Созвездия в Подмосковье.

*«Глянешь на небо в ночные часы –
В небе Медведица и Гончие Псы,
Ворон и Рыбы, Рак и Дракон.
Сколько созвездий, сколько имен».*

Возможно, это стихотворение встречалось вам и раньше. Подумайте, можно ли наблюдать все эти созвездия в Пушино (то есть, в Южном Подмосковье, на широте $+55^\circ$), одновременно? Если нет, то какое максимальное число из этих созвездий можно увидеть на нашем небе в один момент?

2. Полнолуния. Житель одной планетной системы, которая наблюдается с Земли вблизи плоскости эклиптики, непрерывно в течение земного года следит в мощный телескоп за нашей Луной и отслеживает смену её фаз. Сколько полнолуний он насчитает за этот период?

3. Кинетическая энергия. Солнце примерно в 1050 тысяч раз массивнее Юпитера. Оба тела под действием взаимного притяжения обращаются вокруг общего центра масс. Какое тело обладает большей кинетической энергией орбитального движения и во сколько раз? Ответ обоснуйте. Влиянием других планет на движение Солнца и Юпитера не учитывать.

4. Новоюлианский календарь. В начале XX века ряд стран, в которых в то время использовался Юлианский календарь (Россия, Греция, Сербия, Болгария), рассматривали проект введения в своих странах более точного календаря, так называемого "Новоюлианского календаря". По сравнению с Григорианским календарём, в Новоюлианском чередование високосных и невисокосных годов проще: високосными являются 31 из 128 лет, то есть каждый четвёртый (4-й, 8-й, 12-й, 16-й...) за исключением каждого 128-го (128-й, 256-й, 384-й, 512-й...).

Вычислите, насколько (то есть, во сколько раз) более или менее точным является Новоюлианский календарь по сравнению с используемым ныне Григорианским. Длина тропического года составляет 365,242190 суток.

Примечание. Под понятием неточности календаря подразумевается постепенное «сползание» дат начала сезонов (например, даты весеннего равноденствия) со временем. Календарь тем точнее, чем дольше период времени, после которого нужно вводить дополнительную коррекцию (дополнительный високосный, или, наоборот, невисокосный год), дабы дни начала сезонов «не съезжали».

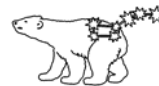
5. Пионер-10. Первым межпланетным аппаратом, запущенным во внешнюю область Солнечной системы, был «Пионер-10» (НАСА США), стартовавший с Земли 3 марта 1972 года. Этот зонд 3 декабря 1973 года прошел мимо Юпитера и, увеличив за счет притяжения гигантской планеты свою скорость, отправился к границам Солнечной системы. В начале 1980-х годов одна из газет сообщила, что:

*“Пионер-10”, пройдя около 5,6 млрд. км, 25 апреля 1983г.
пересек орбиту Плутона, а 13 июня 1983 г. – орбиту Нептуна.*

Какие ошибки или неточности допустила эта газета, и что, может быть, соответствует реальности? Дайте развернутый ответ.

6. Спорадические метеоры. Находясь в средней полосе России, наблюдатель в каждую ясную полночь измеряет среднюю скорость спорадических метеоров. Будет ли эта скорость меняться в течение года, и если да, то в какой сезон она достигнет максимума?

Примечание. Спорадическими называются случайные метеоры, то есть не принадлежащие ни одному метеорному потоку.

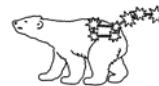


Теоретический тур, условия задач

10 класс.

- 1. Шаровое скопление.** Шаровое звездное скопление имеет возраст около 10 миллиардов лет, радиус 30 пк и состоит из миллиона звёзд. Оцените характерные относительные скорости звёзд скопления.
- 2. Новолуния.** Житель одной планетной системы, которая наблюдается с Земли вблизи плоскости эклиптики, непрерывно в течение земного года следит в мощный телескоп за нашей Луной и отслеживает смену её фаз. Сколько новолуний насчитает наблюдатель за этот период?
- 3. Кинетическая энергия.** Солнце примерно в 1050 тысяч раз массивнее Юпитера. Оба тела под действием взаимного притяжения обращаются вокруг общего центра масс. Какое тело обладает большей кинетической энергией орбитального движения и во сколько раз? Ответ обоснуйте. Влиянием других планет на движение Солнца и Юпитера не учитывать.
- 4. Период обращения планеты.** Центральная звезда планетной системы – красный гигант с температурой $T_1 = 4500$ К, радиусом $R_1 = 15R_{\odot}$, где R_{\odot} – радиус Солнца и массой $M = 1,4 M_{\odot}$, где M_{\odot} – масса Солнца. Определите, период обращения планеты, климат которой такой же, как на Земле.
- 5. Звездная величина Луны.** Насколько может различаться звездная величина Луны в полнолуние?
- 6. Приливная гравитация.** Космический аппарат исследует чёрную дыру массы $M = 3M_{\odot} = 6 \cdot 10^{30}$ кг. Аппарат обращается вокруг чёрной дыры по круговой траектории так, что обращён к ней всё время одной стороной и не деформируется. Найти, на каком расстоянии от центра чёрной дыры должен обращаться этот космический корабль, имеющий "длину" $L = 100$ м (см. рисунок), чтобы за счёт приливных сил была бы создана искусственная гравитация с ускорением силы тяжести (в своей системе отсчёта) "как на Земле":
 - а) у нижней поверхности (в точке А).
 - б) у верхней поверхности (в точке В).

Примечание: при решении задачи нельзя пользоваться формулами для приливных сил без из вывода.



Теоретический тур, условия задач

11 класс.

1. Созвездия в Подмосковье.

*«Глянешь на небо в ночные часы –
В небе Медведица и Гончие Псы,
Ворон и Рыбы, Рак и Дракон.
Сколько созвездий, сколько имен».*

Возможно, это стихотворение встречалось вам и раньше. Подумайте, можно ли наблюдать все эти созвездия в Подмосковье, на широте $+56^\circ$, одновременно? Если нет, то какое максимальное число из этих созвездий можно увидеть на нашем небе в один момент?

2. Прохождение Луны. Житель одной планетной системы, которая наблюдается с Земли в плоскости эклиптики, регулярно наблюдает прохождение Земли и Луны по диску Солнца. Земля, естественно, пересекает диск Солнца по диаметру. Какую (примерно) долю от диаметра солнечного диска составит ширина той полосы на диске, в пределах которой может наблюдаться Луна?

3. Точка Лагранжа. Вашему вниманию предлагается цитата из научно-фантастического романа Артура Кларка "2010: Одиссея Два":

"... оба корабля благополучно прибыли в точку Лагранжа Л-1, расположенную между Ио и Юпитером на высоте десяти с половиной тысяч километров..."

... Астрономия полна загадочных, хотя и бессодержательных совпадений. Наиболее известно равенство угловых размеров Луны и Солнца, если смотреть с Земли. Здесь, в первой точке Лагранжа ... наблюдалась та же картина. Планета и спутник выглядели одинаковыми по величине...

Рассчитайте положение точки, в которую прибыли корабли. Соответствует ли приведенное А. Кларком значение расчётному? Действительно ли планета и спутник выглядят из этой точки одинаковыми по величине?

Примечание. Точка Лагранжа (точка либрации) в данном контексте – точка, в которой космический аппарат может двигаться (без использования двигателей), оставаясь в неизменном положении по отношению к Ио и Юпитеру.

Примечание. При решении рекомендуется воспользоваться математическим правилом приближенного представления функции типа $(1-x)^n$: если $x \ll 1$, то $(1-x)^n \approx 1 - nx$.

4. Период обращения планеты. Центральная звезда планетной системы – красный гигант с температурой $T_1 = 4500$ К, радиусом $R_1 = 15R_\odot$, где R_\odot – радиус Солнца и массой $M = 1,4 M_\odot$, где M_\odot – масса Солнца. Определите, период обращения планеты, климат которой такой же, как на Земле. Как вы думаете, может ли на этой планете развиваться разумная жизнь, если планета подобна Земле?

5. Меркурий и Венера. 29 марта 2004 года обе внутренние планеты были в наибольшей восточной элонгации: Меркурий – в 19° , Венера – в 46° от Солнца. В это же время Меркурий находился вблизи точки перигелия своей орбиты. Вычислите расстояние между Меркурием и Венерой и фазу Венеры для наблюдателя на Меркурии. Орбиты Венеры и Земли считать окружностями. Наклонением орбит планет к плоскости эклиптики пренебречь.

6. Приливная гравитация. Космический аппарат исследует чёрную дыру массы $M = 3M_\odot = 6 \cdot 10^{30}$ кг. Аппарат обращается вокруг чёрной дыры по круговой траектории так, что обращён к ней всё время одной стороной и не деформируется. Найти, на каком расстоянии от центра чёрной дыры должен обращаться этот космический корабль, имеющий "длину" $L = 100$ м (см. рисунок), чтобы за счёт приливных сил была бы создана искусственная гравитация с ускорением силы тяжести (в своей системе отсчёта) "как на Земле":

- а) у нижней поверхности (в точке А).
- б) у верхней поверхности (в точке В).

Примечание: при решении задачи нельзя пользоваться формулами для приливных сил без из вывода.



Практический тур, условия задач

9-10 класс.

7. **Пейзаж.** Представленный пейзаж с множеством солнц – результат многократного экспонирования. Объектив фотоаппарата открывался на короткое время через каждый час, а именно, в каждые NN"00" Московского времени. Использован широкоугольный объектив.

Определить примерную дату фотографирования, если снимок был сделан в этом (2004) году.

Определить широту местности, где произведено фотографирование.

Что Вы можете сказать о долготе местности?

Нужно ли учитывать рефракцию при выполнении задачи?

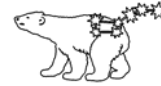
Нужно ли учитывать абберацию (нелинейность оптики) при выполнении задачи?



8. **Радиоисточники.** Перед Вами графическое изображение результатов наблюдений участка неба в интервале прямых восхождений $1^h < \alpha_{1950} < 2^h$, выполненных на многолучевой антенне БСА ФИАН (Пушинская радиоастрономическая обсерватория). Наблюдения проводились на волне 3 м. Каждая из приведенных кривых представляет собой разрез указанного участка неба одним из «лучей» антенны, центр которого соответствует постоянному склонению. Значения этих склонений приведены на рисунке справа. Ввиду того, что характерные размеры всех «лучей» довольно велики и составляют около 20 угловых минут по склонению и более 1 градуса (или 5^m на данном склонении) по прямому восхождению, все радиоисточники на полученных записях выглядят в виде колоколообразных функций прямого восхождения, которые заметны, как правило, на двух или трёх соседних кривых. Положение максимума этой функции соответствует координатам радиоисточника, а величина максимума – потоку его излучения.

Все видимые на этой записи «невооруженным глазом» (точнее, без тщательной обработки) радиоисточники можно отождествить с радиоисточниками из 4-го кембриджского (4C) каталога, полученного по наблюдениям на волне 1,7 м. Попробуйте сделать как можно больше таких отождествлений, используя для этого приведённую ниже выборку радиоисточников из 4C-каталога. Пронумеруйте на рисунке найденные Вами радиоисточники и в составленной Вами таблице отождествлений (форма такой таблицы прилагается) укажите, помимо порядкового номера радиоисточника, его «имя» по каталогу 4C, примерные координаты и поток (точнее, амплитуду записи в Ян - шкала на рисунке прилагается), полученные Вами из рисунка.

Примечание; потоки излучения радиоисточников на волнах 1,7 м и 3 м различаются, поэтому и амплитуды на записи не должны быть пропорциональны приведенным в 4C-каталоге значениям потоков. Измеренные Вами координаты тоже могут несколько отличаться от табличных значений, поскольку здесь не учтены некоторые, сравнительно небольшие, систематические ошибки. Предупреждаем: в прилагаемом списке радиоисточников 4C-каталога есть ложные источники, за отождествление с которыми могут быть начислены штрафные баллы.



Практический тур, условия задач

11 класс.

7. **Движение Солнца по небу.** Представьте, что Вы – лектор планетария. Вам требуется наиболее доходчиво, планомерно и полно (то есть, с цифрами) описать, как движется по небу Солнца по небу на широтах 0° , $\pm 23,5^\circ$, $\pm 66,5^\circ$ и $\pm 90^\circ$ (кстати, что это за широты?) в дни равноденствий и солнцестояний. В какую сторону (вправо или влево) движется Солнце в этих случаях для наблюдателя, стоящего на горизонтальной поверхности и смотрящего в сторону Солнца? Чему равна высота Солнца в верхней и нижней кульминации и продолжительность светлого времени суток в эти дни на этих широтах? Астрономической рефракцией можно пренебречь.
8. **Фотографии Венеры.** По приведённым двум фотографиям определите расстояние от точки, где сделана фотография 1, до высотного здания, если известно, что фотографии сделаны на расстоянии 300 м друг от друга, а направление на высотное здание из точки, где сделана фотография 1, перпендикулярно направлению на точку, где сделана фотография 2. Определите также широту места и высоту здания. В каком направлении от точки 1 оно находится? Фотографии сделаны 31 марта 2004 года. В Вашем распоряжении карта с видимым путём Венеры на небе за последний месяц.



Теоретический тур, решения задач

9 класс.

1. **Созвездия в Подмосковье.** (Н.Е. Шатовская, обработка и дополнения – О.С. Угольников, 2004.)

На нашем небе нельзя одновременно увидеть созвездия Ворона и Рыб. Их прямые восхождения отличаются на 12 часов, при этом Рыбы находятся вблизи небесного экватора, а Ворон – южнее его. Поэтому он восходит после захода Рыб, а заходит – до их восхода, независимо от сезона года. Но вот пять из шести перечисленных созвездий, все, кроме Рыб, можно увидеть на небе весенними ночами.

2. **Полнолуние.** (А.В. Засов, 2004.)

Ответ: одно или ни одного. Полнолуние может наблюдаться, когда Луна оказывается вблизи направления на Солнце, находясь за ним. Её положение относительно Земли при этом не играет роли. Не исключено также, что в это время Луна окажется закрытой солнечным диском, и в этом случае полнолуния вообще не будет.

3. **Кинетическая энергия.** (А.В. Засов, 2004.)

Пусть M и m – массы Солнца и Земли, R и r – радиусы их орбит вокруг общего центра масс, а V и v – скорости их движения по орбитам (соответственно). Центр масс находится на прямой, соединяющей центры Земли и Солнца, поэтому периоды обращения Земли и Солнца равны: $T = 2\pi R/V = 2\pi r/v$. Отношение расстояний этих тел от центра масс $R/r = m/M$. Отсюда следует, что $V/v = m/M$. Тогда для отношения кинетических энергий орбитального движения Земли и Солнца можно записать: $E_z/E_c = mv^2/MV^2 = M/m$.

Ответ: у Земли, в 300 тысяч раз.

4. **Новоюлианский календарь.** (М.Г. Гаврилов, 2001.)

Разница Новоюлианского и Юлианского календарей возрастает на 1 день каждое 1 марта $N \times 128$ -го года. Возрастает – означает увеличение опережения даты Новоюлианским календарём по сравнению с Юлианским. Таким образом, начиная с 1 марта 1920 года (и по 28 февраля 2048 года) эта разница составляет 15 дней. Григорианский календарь опережает Юлианский сейчас (в XX и XXI веках) на 13 дней. Значит, Новоюлианский календарь опережает Григорианский на 2 дня, и если сегодня по Григорианскому календарю 10 апреля, то по Новоюлианскому – 12 апреля 2004 года.

Средняя продолжительность года в Григорианском календаре равна $365 + 97/400 = 365,2425$ дня. Это на 0,000310 дня больше длины тропического года. Примерно за 3200 лет набегит один лишний день. Значит, примерно раз в 3200 лет нужно отменять один високосный год. Средняя продолжительность года в Новоюлианском календаре равна $365 + 31/128 = 365,2421875$ дня. Это на 0,0000025 дня меньше длины тропического года. Примерно за 400000 лет мы не досчитаемся одного дня. То есть, примерно раз в 400000 лет нужно добавлять один високосный год.

Таким образом, Новоюлианский календарь в $400000 / 3200 \approx 125$ раз точнее Григорианского.

Примечание: в действительности, поправку в Новоюлианский календарь придётся вводить существенно раньше, поскольку вращение Земли замедляется.

5. **Пионер-10.** (В.Г. Сурдин, 2004, обработка и дополнения – М.Г. Гаврилов, 2004)

При первом прочтении указанного предложениястораживают три обстоятельства:

1. Пересечение аппаратом орбит планет.
2. Тот факт, что «Пионер-10» сначала пересёк орбиту девятой планеты, а только затем – восьмой.
3. Тот факт, что «Пионер-10» прошёл 5,6 млрд. км, в то время как расстояние от Солнца до Нептуна всего 4,5 млрд. км.

Первое действительно является неточностью. Орбита – это, по определению, траектория центра массы тела. Поэтому пересечь её аппарат мог только в том случае, если какой-нибудь частью (размеры – порядка метра) пересёк эту линию. Очевидно, что такое событие

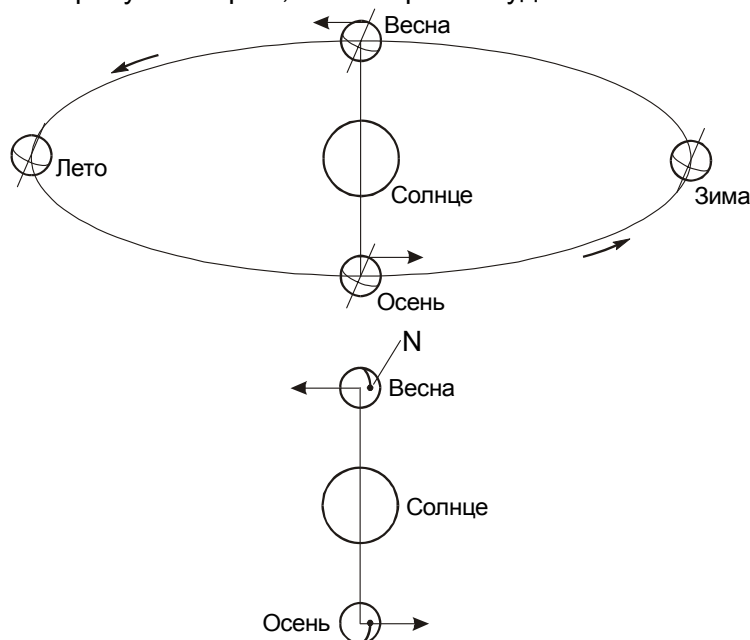
исчезающее маловероятно. В обыденной речи понятие «пересечь орбиту» носит условный характер: имеется в виду, имеется в виду, что пересечение траекторий состоялось бы, если бы они лежали в одной плоскости, например в плоскости эклиптики.

Что касается второго обстоятельства, то в данном случае журналисты не ошиблись: часть орбиты Плутона вследствие её большого эксцентриситета лежит внутри орбиты Нептуна, поэтому, двигаясь в области перигелия Нептуна, «Пионер-10» действительно сначала «пересёк» орбиту девятой планеты, а только затем – восьмой. Любопытно, что как раз в те годы и сам Плутон был в этой же области: с 1979 по 1998 г. он был к Солнцу ближе, чем Нептун. Однако о встрече «Пионера-10» с планетой не могло быть и речи: орбита Плутона слишком сильно наклонена к плоскости эклиптики.

Третий подозрительный момент может быть правдой. Ведь аппарат летел не по прямой, а по участкам эллипсов, то есть длина его траектории должна быть больше 4,5 млрд. км.

6. **Спорадические метеоры. (О.С. Угольников, 2004.)**

На верхнем рисунке показана орбита Земли вокруг Солнца и положение нашей планеты и ее оси вращения в моменты равноденствий и солнцестояний. На рисунке видно, что в день весеннего равноденствия северный полюс Земли и его окрестности вне зависимости от времени суток оказываются в задней полусфере Земли относительно направления её движения вокруг Солнца. Следовательно, большинство спорадических метеоров, падающих на эту часть Земли, будут «догонять» её в своём движении, следовательно, их средняя скорость относительно движущейся Земли, будет несколько меньше их истинной скорости в пространстве. Напротив, в день осеннего равноденствия северная часть Земли будет лететь навстречу метеорам, и их скорость будет выше.



в полночь достигнет максимума 23 сентября.

Максимум средней скорости спорадических метеоров будет наблюдаться 23 сентября не только на полюсе, но и на всем северном полушарии Земли. Это видно на нижнем рисунке, где показано положение Земли в дни равноденствий со стороны северного полюса эклиптики. На этом рисунке также показано положение северного полюса и северной половины полночного меридиана. В день весеннего равноденствия весь этот полу-меридиан оказывается в задней, в день осеннего равноденствия – в передней полусфере Земли. Итак, средняя скорость спорадических метеоров



Теоретический тур, решения задач

10 класс.

1. Шаровое скопление. (О.С. Угольников, 2004.)

Возраст шарового скопления очень велик, он сопоставим с возрастом нашей Галактики. За это время шаровое скопление не распалось, значит, составляющие его звёзды гравитационно связаны. Характерная скорость звезды, находящейся вблизи края скопления, должна быть порядка первой космической скорости. Среднюю массу звёзд скопления примем равной массе Солнца, то есть масса скопления – $10^6 M_{\odot}$ или $2 \cdot 10^{36}$ кг, радиус равен 30 пк или $9,3 \cdot 10^{17}$ м. Первая космическая скорость равна

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \approx 1,2 \cdot 10^4 \text{ м/с}$$

или 12 км/с.

2. Новолуние. (А.В. Засов, 2004.)

Ответ: одно. Новолуние будет наблюдаться, когда Луна окажется между наблюдателем и Солнцем. Ее положение относительно Земли при этом не играет роли.

3. Кинетическая энергия. (А.В. Засов, 2004.)

Пусть M и m – массы Солнца и Земли, R и r – радиусы их орбит вокруг общего центра масс, а V и v – скорости их движения по орбитам (соответственно). Центр масс находится на прямой, соединяющей центры Земли и Солнца, поэтому периоды обращения Земли и Солнца равны: $T = 2\pi R/V = 2\pi r/v$. Отношение расстояний этих тел от центра масс $R/r = m/M$. Отсюда следует, что $V/v = m/M$. Тогда для отношения кинетических энергий орбитального движения Земли и Солнца можно записать: $E_z/E_c = mv^2/MV^2 = M/m$.

Ответ: у Земли, в 300 тысяч раз.

4. Период обращения планеты (В.В. Порфирьев, 2004, обработка и дополнение – М.Г. Гаврилов, 2004)

Если на планете тот же климат, что и Земле, то поток энергии падающей на нее совпадает с потоком энергии, падающим на Землю:

$$\frac{4\pi R_Q^2 T_Q^4}{a_i^2} = \frac{4\pi R^2 T^4}{a^2}$$

где a_i и a – расстояния от Земли до Солнца и от планеты до звезды соответственно. Полагая $a_i = 1$, получим (в астрономических единицах):

$$a = \sqrt{\left(\frac{R}{R_Q}\right)^2 \left(\frac{T}{T_Q}\right)^4} = \frac{R}{R_Q} \left(\frac{T}{T_Q}\right)^2 \approx 9.35 \text{ а.е.}$$

Период обращения планеты определяем по обобщенному III закону Кеплера. Если t брать в годах, a – в астрономических единицах, M – в массах Солнца, то:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{M}} \approx 24,2 \text{ года}$$

Примечание: справедливости ради надо отметить, что в данном решении для того, чтобы климат на планете был такой же, как на Земле, необходимо, чтобы и альbedo Земли и планеты были одинаковы.

5. Звездная величина Луны. (М.Г. Гаврилов, 2004.)

Для сравнения нужно рассмотреть два крайних случая. Наибольший блеск (наименьшую звездную величину) Луна будет иметь в том случае, когда она находится в перигее своей орбиты, а Земля в перигелии. Наименьший блеск – наоборот, когда она в апогее, а Земля – в афелии. Сравним эти два случая.

В первом случае, падающий на Луну поток солнечного света пропорционален $1/(a(1-e))^2$, во втором – $\sim 1/(a(1+e))^2$, где a – среднее расстояние от Солнца до Луны, e – эксцентриситет земной орбиты (расстоянием Земля-Луна пренебрегаем по сравнению с расстоянием Солнце-Земля).

Кроме того, для первого случая уже идущий от Луны поток света к земному наблюдателю пропорционален $1/(a(1-e_R))^2$, для второго – $\sim 1/(a(1+e_R))^2$, где r – среднее расстояние от Земли до Луны, e_R – эксцентриситет орбиты Луны (a здесь мы пренебрегаем размерами Земли и Луны по сравнению с расстоянием Земля-Луна).

Таким образом, в первом случае поток света к земному наблюдателю пропорционален $1/(r(1-e_R) \cdot a(1-e))^2$, во втором – $\sim 1/(r(1+e_R) \cdot a(1+e))^2$. Их отношение даёт

$$\left(\frac{1+e_R}{1-e_R}\right)^2 \times \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2;$$

$$\Delta m = 2,51g \left[\left(\frac{1+e_R}{1-e_R}\right)^2 \times \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 \right] = 51g \frac{1+e_R}{1-e_R} + 51g \frac{1+e}{1-e}.$$

Подстановка численных данных даёт:

$$\Delta m = 0,239 + 0,074 \approx 0.31$$

Как видим, второй член (возникающий из-за эксцентриситета земной орбиты) мал, но, всё же, существенен.

6. Приливная гравитация. (М.Г. Гаврилов, 1999)

Первая и главная часть решения задачи фактически представляет собой вывод формулы для приливных сил. Центр аппарата обращается вокруг чёрной дыры по круговой траектории с угловой скоростью ω , определяемой из условия нахождения на орбите:

$$\omega^2 R = \frac{GM}{R^2},$$

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3},$$

Точки А и В обращаются с этой же угловой скоростью, но силы притяжения со стороны чёрной дыры, действующие на тела в этих точках, иные:

$$\frac{GM}{(R-L/2)^2} \text{ и } \frac{GM}{(R+L/2)^2} \text{ соответственно.}$$

В результате в точке А тела будут как бы испытывать искусственное тяготение (ускорение силы тяжести), направленное по направлению к чёрной дыре и равное

$$g_{иск} = \frac{GM}{(R-L/2)^2} - \omega^2(R-L/2),$$

а в точке В – искусственное тяготение, направленное по направлению от чёрной дыры и равное

$$g_{иск} = \omega^2(R+L/2) - \frac{GM}{(R+L/2)^2}.$$

Подставляя значение ω^2 , получаем для первого случая:

$$g_{иск} = GM \left(\frac{1}{(R-L/2)^2} - \frac{R-L/2}{R^3} \right),$$

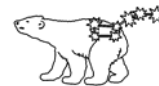
$$g_{иск} = GM \frac{R^3 - (R-L/2)^3}{R^3(R-L/2)^2} = GM \frac{(R^3 - R^3 + 3R^2 L/2 + 3R(L/2)^2 - (L/2)^3)}{R^3(R-L/2)^2} \approx GM \frac{3R^2 L}{2R^5} \approx \frac{3}{2} GM \frac{L}{R^3}.$$

Аналогично для второго случая получаем эту же величину (только направление её, напомним, от чёрной дыры).

Таким образом, ответ будет одинаковым для пунктов а) и б) задачи. Учитывая, что нам необходимо $g_{иск} = g_{земн} = 9,81 \text{ м/с}^2$, получаем

$$R^3 = \frac{3}{2} GM \frac{L}{g},$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{2} GM \frac{L}{g}} \approx 1,83 \cdot 10^7 \text{ м} = 18,3 \text{ тыс. км}.$$



Теоретический тур, решения задач

11 класс.

1. **Созвездия в Подмоскowie (Н.Е. Шатовская, обработка и дополнения – О.С. Угольников, 2004.)**

На нашем небе нельзя одновременно увидеть созвездия Ворона и Рыб. Их прямые восхождения отличаются на 12 часов, при этом Рыбы находятся вблизи небесного экватора, а Ворон – южнее его. Поэтому он восходит после захода Рыб, а заходит – до их восхода, независимо от сезона года. Но вот пять из шести перечисленных созвездий, все, кроме Рыб, можно увидеть на небе весенними ночами.

2. **Прохождение Луны (А.В. Засов, 2004, обработка – М.Г. Гаврилов, 2004.)**

Максимальное расстояние, на которое Луна «приподнимается» над плоскостью земной орбиты, равно $h=R \times \sin i$. Значения $R = 384$ тыс. км и $i = 5,15^\circ$ берем из таблицы Солнечной Системы.

$$h = L \times \sin i = 384 \text{ тыс. км} \times \sin 5,15^\circ \approx 34,5 \text{ тыс. км.}$$

В проекции на диск Солнца это расстояние составит

$$2h / D = 2L \times \sin i / D = 2 \times 34,5 \text{ тыс. км} / 1392 \text{ тыс. км} \approx 0,050$$

Или примерно 1/20 долю диаметра Солнца.

3. **Точка Лагранжа (Е.Б. Постников, дополнения - А.В. Засов, М.Г. Гаврилов, О.С. Угольников)**

По описанию, корабль находится в той точке либрации, которая располагается на прямой, соединяющей Юпитер и Ио и находится между ними. Так как масса Юпитера M и Ио μ много больше массы корабля m , то вращение этой прямой в пространстве определяется вращением Ио вокруг Юпитера с угловой скоростью ω .

Эта угловая скорость определяется равенством $\frac{GM}{L^2} = \omega^2 L$, откуда $\omega^2 = \frac{GM}{L^3}$.

Обозначим через ΔL расстояние от корабля до Ио. Корабль находится в равновесии под действием противоположно направленных сил притяжения со стороны Юпитера $\frac{GMm}{(L-\Delta L)^2}$ и Ио $\frac{G\mu m}{(\Delta L)^2}$, которые сообщают ему центростремительное ускорение $a = \omega^2(L-\Delta L)$. По второму закону Ньютона:

$$\frac{GMm}{(L-\Delta L)^2} - \frac{G\mu m}{\Delta L^2} = m\omega^2(L-\Delta L);$$

$$\frac{GM}{(L-\Delta L)^2} - \frac{G\mu}{\Delta L^2} = \omega^2(L-\Delta L);$$

$$\frac{GM}{L^2 \left(1 - \frac{\Delta L}{L}\right)^2} - \frac{G\mu}{\Delta L^2} = \omega^2(L-\Delta L)$$

Так как $\mu \ll M$, то точка либрации находится гораздо ближе к Ио, чем к центру Юпитера, то есть $\frac{\Delta L}{L} \ll 1$ и $\frac{1}{\left(1 - \frac{\Delta L}{L}\right)^2} \approx 1 + 2\frac{\Delta L}{L}$,

$$\frac{GM \left(1 + 2\frac{\Delta L}{L}\right)}{L^2} - \frac{G\mu}{\Delta L^2} = \omega^2(L-\Delta L).$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$\frac{GM}{L^2} + \frac{2GM\Delta L}{L^3} - \frac{G\mu}{\Delta L^2} = \omega^2 L - \omega^2 \Delta L.$$

Учитывая, что $\omega^2 = GM/L^3$ и сокращая соответствующие слагаемые, получаем:

$$\frac{2GM\Delta L}{L^3} - \frac{G\mu}{\Delta L^2} = \frac{GM\Delta L}{L^3}.$$

Окончательный ответ: $\Delta L = L^3 \sqrt[3]{\frac{\mu}{3M}}$.

Подставим числа: $\Delta L = 422 \text{ тыс. км} \times (89,4 \cdot 10^{21} \text{ кг} / 3 \cdot 1,90 \cdot 10^{27} \text{ кг})^{1/3} = 10,6 \text{ тыс. км}$. Таким образом, у Артура Кларка приведено абсолютно правильное положение точки Лагранжа.

Теперь ответим на вопрос о видимых радиусах Юпитера и Ио.

Обозначим радиусы Юпитера и Ио, соответственно, как R и r , их видимые угловые радиусы – как P и p , а плотности – как ρ_1 и ρ_2 . Учитывая, что

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho_1 R^3, \quad \mu = \frac{4}{3} \pi \rho_2 r^3,$$

получаем, что

$$P = \frac{R}{L - \Delta L} = \frac{3M}{4\pi\rho_1(L - \Delta L)},$$

$$p = \frac{r}{\Delta L} = \frac{3\mu}{4\pi\rho_2\Delta L}.$$

Откуда

$$\frac{p}{P} = \frac{L - \Delta L}{\Delta L} \times \sqrt[3]{\frac{\mu}{M}} \times \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = \left(\sqrt[3]{\frac{3M}{\mu}} - 1 \right) \times \sqrt[3]{\frac{\mu}{M}} \times \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{\frac{\mu}{M}} \right) \times \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}.$$

Подставим значения μ , M , ρ_1 и ρ_2 , взяв их из таблицы Солнечной системы. Благодаря тому, что средняя плотность Ио как раз примерно втрое больше, чем у Юпитера ($3,55$ против $1,33 \text{ г/см}^3$) получается, что видимый радиус Ио будет всего лишь в $1,014$ раза больше. Разницу в $1,4 \%$ обычный наблюдатель не замечает (тем более, в противоположных точках горизонта). То есть, Юпитер и Ио действительно выглядят одинаковыми из этой точки.

Примечание: Кстати, заметим интересный факт. Соотношение видимых из точки Лагранжа угловых размеров планеты и спутника определяется, главным образом, соотношением их плотностей. А если масса спутника пренебрежимо мала по сравнению с массой планеты, что имеет место и в нашем случае ($\mu \ll M$: $\mu/M \approx 1/20000$), то исключительно соотношением их плотностей.

Если в последней формуле сделать приближение, учтя, что $\mu \ll M$, получим:

$$\frac{p}{P} \approx \sqrt[3]{\frac{3\rho_1}{\rho_2}}.$$

В таком приближении видимый радиус Ио будет всего в $(3,99/3,55)^{1/3} \approx 1,04$ раза больше. Разница в 4% – тоже небольшая. Обычный наблюдатель о в противоположных точках горизонта её также не замечает.

4. Период обращения планеты (В.В. Порфирьев, 2004, обработка и дополнение – М.Г. Гаврилов, 2004)

Если на планете тот же климат, что и Земле, то поток энергии падающей на нее совпадает с потоком энергии, падающим на Землю:

$$\frac{4\pi R_Q^2 T_Q^4}{a^2} = \frac{4\pi R^2 T^4}{a^2}$$

где a_i и a – расстояния от Земли до Солнца и от планеты до звезды соответственно. Полагая $a_i = 1$, получим (в астрономических единицах):

$$a = \sqrt{\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4} = \frac{R}{R_\odot} \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^2 \approx 9.35 \text{ а.е.}$$

Период обращения планеты определяем по обобщенному III закону Кеплера. Если t брать в годах, a – в астрономических единицах, M – в массах Солнца, то:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{M}} \approx 24,2 \text{ года}$$

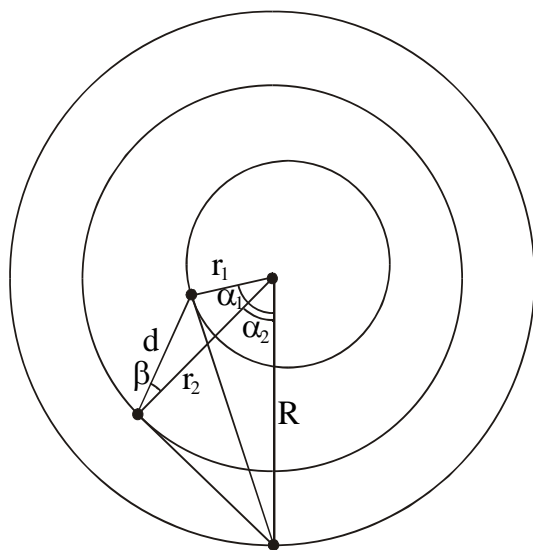
Примечание: справедливости ради надо отметить, что в данном решении для того, чтобы климат на планете был такой же, как на Земле, необходимо, необходимо, чтобы и альbedo Земли и планеты были одинаковы.

На второй вопрос задачи ответить труднее. Стадия красного гиганта в эволюции звезды следует после стадии главной последовательности. На главной последовательности светимость нашей звезды примерно в 3 раза меньше. Соответственно и поток энергии, падающий на планету во столько же раз меньше. Температура (абсолютная) пропорциональна корню четвертой степени из потока излучения, то есть меньше в 1,3 раза. Если считать, что на Земле средняя температура 287 К, то на нашей планете, когда звезда проходит на стадию главной последовательности, температура была равной 218 К или -55 С. При такой температуре планета покрыта льдом и появление жизни на ней представляется мало вероятной.

С другой стороны, парниковый эффект может значительно поднять температуру на поверхности планеты. В этом случае, вероятность появления жизни становится достаточно большой. То есть, ответ на второй вопрос задачи зависит от химического состава атмосферы планеты. Второй вариант ответа (жизнь на планете возможна) представляется более вероятным.

5. Меркурий и Венера. (Н.Е. Шатовская, обработка и дополнения – О.С. Угольников, М.Г. Гаврилов, 2004.)

Орбита Венеры практически круглая, и ее наибольшая элонгация наступает, когда угол с вершиной в Венере между направлениями на Солнце и Землю составляет 90° . Для Меркурия,



чья орбита сильно вытянута, такое выполняется, только если наибольшая элонгация наступает вблизи его перигелия или афелия. Именно первый из этих двух случаев реализуется 29 марта 2004 года. Точные расстояния Меркурия и Венеры от Солнца можно вычислить, зная их угловые расстояния от Солнца (расстояние Земли от Солнца в этот день очень близко к 1 а.е.):

$$r_1 = R \cdot \sin 19^\circ = 0.326 \text{ а.е.},$$

$$r_2 = R \cdot \sin 46^\circ = 0.719 \text{ а.е.}$$

Разности гелиоцентрических долгот Земли и Меркурия (Венеры) $\alpha_{1,2}$ вычисляются в данном случае очень просто:

$$\alpha_1 = 90^\circ - 19^\circ = 71^\circ$$

$$\alpha_2 = 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ$$

Расстояние между Меркурием и Венерой:

$$d = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2))^{1/2} = 0.453 \text{ а.е.}$$

Косинус угла β с вершиной в Венере между направлениями на Солнце и Меркурий равен

$$\cos \beta = ((r_2^2 + d^2 - r_1^2)/(2*r_2*d)) = 0.945.$$

Фаза Венеры, видимая с Меркурия, равна $\Phi = (1 + \cos \beta)/2 = 0.973$.

6. Приливная гравитация. (М.Г. Гаврилов, 1999)

Первая и главная часть решения задачи фактически представляет собой вывод формулы для приливных сил. Центр аппарата обращается вокруг чёрной дыры по круговой траектории с угловой скоростью ω , определяемой из условия нахождения на орбите:

$$\omega^2 R = \frac{GM}{R^2},$$

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3},$$

Точки А и В обращаются с этой же угловой скоростью, но силы притяжения со стороны чёрной дыры, действующие на тела в этих точках, иные:

$$\frac{GM}{(R-L/2)^2} \text{ и } \frac{GM}{(R+L/2)^2} \text{ соответственно.}$$

В результате в точке А тела будут как бы испытывать искусственное тяготение (ускорение силы тяжести), направленное по направлению к чёрной дыре и равное

$$g_{иск} = \frac{GM}{(R-L/2)^2} - \omega^2(R-L/2),$$

а в точке В – искусственное тяготение, направленное по направлению от чёрной дыры и равное

$$g_{иск} = \omega^2(R+L/2) - \frac{GM}{(R+L/2)^2}.$$

Подставляя значение ω^2 , получаем для первого случая:

$$g_{иск} = GM \left(\frac{1}{(R-L/2)^2} - \frac{R-L/2}{R^3} \right),$$

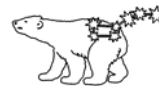
$$g_{иск} = GM \frac{R^3 - (R-L/2)^3}{R^3(R-L/2)^2} = GM \frac{(R^3 - R^3 + 3R^2 L/2 + 3R(L/2)^2 - (L/2)^3)}{R^3(R-L/2)^2} \approx GM \frac{3R^2 L}{2R^5} \approx \frac{3}{2} GM \frac{L}{R^3}.$$

Аналогично для второго случая получаем эту же величину (только направление её, напомним, от чёрной дыры).

Таким образом, ответ будет одинаковым для пунктов а) и б) задачи. Учитывая, что нам необходимо $g_{иск} = g_{земн} = 9,81 \text{ м/с}^2$, получаем

$$R^3 = \frac{3}{2} GM \frac{L}{g},$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{2} GM \frac{L}{g}} \approx 1,83 \cdot 10^7 \text{ м} = 18,3 \text{ тыс. км}.$$



Практический тур, решения задач

11 класс.

7. Движение Солнца по небу. (В.В.Порфирьев, 2004, обработка и дополнения – О.С. Угольников, М.Г. Гаврилов)

На широте -90° (Южный полюс) Солнце всегда движется влево, в зимнее солнцестояние (здесь и далее имеется в виду 22 декабря) круглые сутки его высота равна $23,5^\circ$, в равноденствие – 0° , долгота дня 24 часа, в летнее солнцестояние (21 июня) высота равна $-23,5^\circ$, долгота дня = 0.

На широте $-66,5^\circ$ (Южный полярный круг) Солнце всегда движется влево. В зимнее солнцестояние высота в верхней кульминации 47° , в нижней кульминации 0° , долгота дня 24 часа. В равноденствие высота в верхней кульминации $23,5^\circ$, в нижней – $-23,5^\circ$, долгота дня 12 часов. В летнее солнцестояние высота в верхней кульминации 0° , в нижней -47° ; Солнце лишь на мгновение появляется на небе.

Широта $-23,5^\circ$ (Южный тропик). Солнце движется влево, кроме момента верхней кульминации в день зимнего солнцестояния, когда оно находится в зените и понятие "стороны" теряет смысл. В этот день его высота в верхней кульминации 90° , в нижней – -43° , долгота дня около 13 часов (точное значение – 13^h25^m , но в решении этого не требуется). В дни равноденствий высота в верхней кульминации равна $66,5^\circ$, в нижней – $-66,5^\circ$, долгота дня 12 часов. В день летнего солнцестояния высота в верхней кульминации составляет 43° , в нижней – -90° , долгота дня, если точно, то 10^h35^m , но достаточно написать "около 11 часов".

На экваторе (широта 0°) в равноденствия Солнце движется точно вверх до полудня и вниз после него, высота в полдень 90° , в полночь -90° . В день зимнего солнцестояния Солнце движется вправо, в день летнего солнцестояния – влево, высота в полдень $66,5^\circ$, в полночь – $66,5^\circ$. Долгота дня всегда равна 12 часам.

На широте $+23,5^\circ$ (Северный тропик) Солнце движется вправо, кроме момента верхней кульминации в день летнего солнцестояния, когда оно находится в зените и понятие "стороны" теряет смысл. В этот день его высота в верхней кульминации – 90° , в нижней – -43° , долгота дня около 13 часов (точное значение – 13^h25^m , но в решении этого не требуется). В равноденствия высота в верхней кульминации $66,5^\circ$, в нижней – $-66,5^\circ$, долгота дня 12 часов. В день зимнего солнцестояния высота в верхней кульминации 43° , в нижней – -90° , долгота дня 10^h35^m (достаточно написать "около 11 часов").

На широте Северного полярного круга ($\varphi = +66,5^\circ$) Солнце всегда движется вправо, в летнее солнцестояние высота в верхней кульминации равна 47° , в нижней кульминации – 0° , долгота дня – 24 часа, в равноденствие высота в верхней кульминации $23,5^\circ$, в нижней – $-23,5^\circ$, долгота дня – 12 часов, в зимнее солнцестояние высота в верхней кульминации – 0° , в нижней – -47° , Солнце лишь на мгновение появляется на горизонте.

На широте $+90^\circ$ (Северный полюс, Белые медведи) Солнце всегда движется влево, в летнее солнцестояние круглые сутки его высота над горизонтом равна $23,5^\circ$, в равноденствие – 0° , долгота дня – 24 часа, в зимнее солнцестояние высота равна – $-23,5^\circ$, Солнце не показывается над горизонтом, долгота дня равна нулю.