

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР



9 класс



IX. 1

ТРОПИК И ПОЛЯРНЫЙ КРУГ

О.С. Угольников

? На некоторой планете сферической формы тропик вдвое длиннее полярного круга. Определите максимально возможную высоту одиночной центральной звезды на полярном круге. Угловыми размерами центральной звезды и рефракцией пренебречь.

! Широты тропика и полярного круга по модулю составляют

$$\varphi_1 = \varepsilon; \quad \varphi_2 = 90^\circ - \varepsilon.$$

Здесь ε – угол между плоскостью экватора и плоскостью орбиты планеты. Если длину окружности экватора обозначить через L_0 , то длины окружности тропика и полярного круга будут равны

$$\begin{aligned} L_1 &= L_0 \cos \varphi_1 = L_0 \cos \varepsilon, \\ L_2 &= L_0 \cos \varphi_2 = L_0 \sin \varepsilon. \end{aligned}$$

Из условия задачи $L_1 = 2L_2$, то есть

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} 1/2 = 26.5^\circ.$$

Высота центральной звезды на полярном круге будет максимальной в день солнцестояния (летнего для данного полушария) и составит

$$h = 90^\circ - \varphi_2 + \varepsilon = 2\varepsilon = 53^\circ.$$

IX. 2

ДВА ВОСХОДА

О.С. Угольников

? Два последовательных восхода планеты в некоторой точке экватора Земли разделены промежутком времени $24^{\text{ч}}03^{\text{м}}$. Что это за планета?

! Между восходами планеты на экваторе прошло время, большее звездных и даже солнечных суток. Следовательно, эта планета за день сместилась среди звезд с запада на восток (прямое движение), причем на больший угол, чем Солнце.

Сразу можно сделать вывод, что это внутренняя планета – Меркурий или Венера.

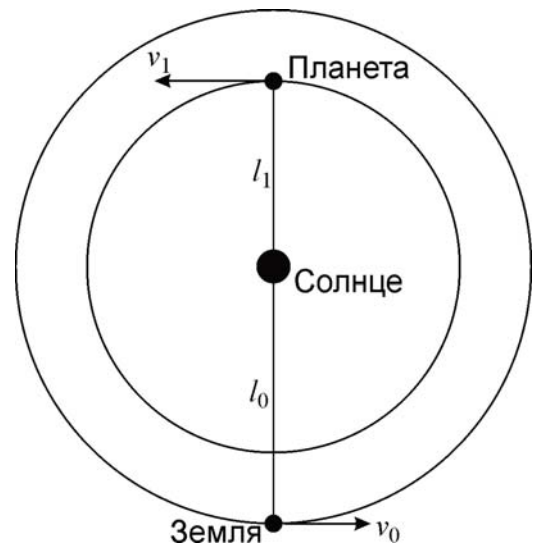
Так как дело происходит на экваторе, изменение склонения фактически не может влиять на время восхода планеты, расположенной далеко от полюсов мира. Уравнение времени также несущественно, так как его изменение за один день намного меньше одной минуты. Два восхода планеты разделены одними звездными сутками и еще 7 минутами – именно на 7 минут или на 1.75° увеличилось прямое восхождение планеты. Ее угловое перемещение среди звезд не менее, чем

$$\gamma \geq \Delta\alpha \cos \varepsilon = 1.6^\circ.$$

Здесь ε – наклон экватора к эклиптике. Покажем, что Венера не может переместиться на такой угол за один день. Ее максимальная угловая скорость достигается в верхнем соединении (см. рисунок) и равна

$$\omega = \frac{v_0 + v_1}{l_0 + l_1} = \frac{v_0(1 + a^{-1/2})}{l_0(a + 1)} = \omega_0 \frac{1 + a^{-1/2}}{1 + a}.$$

Здесь l_0 и l_1 – расстояния Земли и Венеры от Солнца, v_0 и v_1 – их орбитальные скорости. В последнем равенстве ω_0 – угловая скорость орбитального движения Земли (0.986° в сутки), a – радиус орбиты Венеры в астрономических единицах. Максимальная угловая скорость составляет 1.25° в день. Для Меркурия, даже в случае круговой орбиты, она может достичь 1.85° в день. Итак, эта планета – Меркурий.



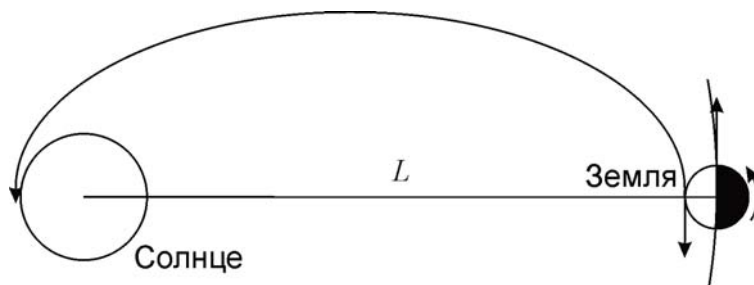
IX. 3 ПОЛЕТ НА СОЛНЦЕ

О.С. Угольников

? Всем известна шутка из фольклора времен СССР: «Товарищи космонавты! Американцы полетели на Луну, а вы первыми полетите на Солнце! И не бойтесь жары – ночью полетите». А в какое время суток на самом деле энергетически выгодней запустить одним импульсом с поверхности Земли космический аппарат, который должен будет подойти на близкое расстояние к Солнцу? Какова будет длительность такого перелета? Соппротивлением атмосферы пренебречь.

! Для того, чтобы отправить с Земли аппарат в окрестности Солнца, ему необходимо погасить гелиоцентрическую скорость, которая изначально будет почти такой же, как у самой Земли. Рассмотрим положение Солнца, Земли и траекторию аппарата.

Для выхода на траекторию во внутренние области Солнечной системы аппарату нужно получить геоцентрическую скорость, направленную против орбитальной скорости Земли. Энергетически выгодней это сделать тогда, когда вектор скорости осевого вращения Земли также направлен назад по отношению к ее орбитальному движению. Как можно увидеть из рисунка, такие условия наступают в экваториальной области Земли днём. Мы не рассматриваем энергетические затраты на преодоление поля тяжести Земли, так как они зависят только от широты, но не от времени суток. После преодоления поля тяжести Земли геоцентрическая скорость аппарата должна составить 29.8 км/с, а при старте – 31.8 км/с. При таких скоростях искривление траектории при вылете с Земли будет небольшим, и даже при его учете получаем, что старт лучше производить днём, перед полуднем. Известная шутка не соответствует энергетической эффективности перелета.



Чтобы определить длительность полета к Солнцу, отметим, что траектория аппарата будет эллипсом, у которого расстояние афелия будет равно радиусу орбиты Земли L , а расстояние перигелия – очень малым. Большая полуось этого эллипса составит $L/2$. По третьему закону Кеплера, орбитальный период будет равен $(1/2)^{3/2}$ лет. Время перелета составит половину этой величины или

$$T = (1/2)^{5/2} \text{ лет} = 64.5 \text{ дней.}$$

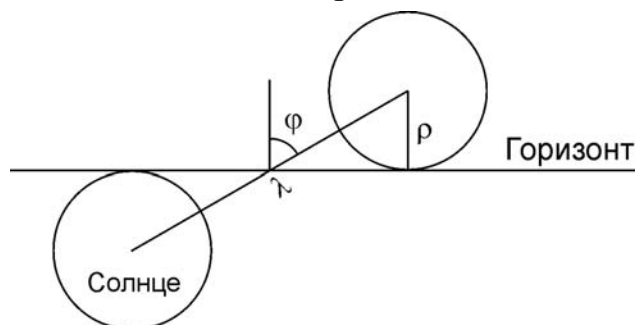
IX. 4 ВСТРЕЧАЯ РАССВЕТ

А.Н. Акинъщиков

? Какова продолжительность восхода Солнца в день весеннего равноденствия для первого наблюдателя на поверхности Земли и второго наблюдателя в самолете, летящем горизонтально со скоростью 250 м/с относительно поверхности на малой высоте в направлении с востока на запад? Считайте, что оба наблюдателя находятся на широте 60 градусов. Рефракцией пренебречь.

! Определим вначале продолжительность восхода Солнца для наблюдателя на поверхности Земли. В течение восхода Солнце должно пройти по небесной сфере угловой путь λ , равный

$$\lambda = \frac{2\rho}{\cos \varphi} = 64'$$



Здесь φ – широта места. Угловая скорость суточного движения Солнца со-

ставляет $15'$ /мин, и на преодоление указанного расстояния ему потребуется время T_0 , равное 4.3 минутам.

Чтобы определить продолжительность восхода Солнца для пассажира самолета, учтем, что точка поверхности Земли, находящаяся на широте 60° , за счет осевого движения движется относительно полуденного меридиана с запада на восток со скоростью

$$v_0 = \frac{2\pi R \cos\varphi}{T} = 231.6 \text{ м/с.}$$

Здесь T – продолжительность солнечных суток (нас интересует движение относительно полуденного меридиана). Если самолет летит со скоростью u в противоположную сторону, то результирующая скорость составит

$$v_1 = v_0 - u = -18.4 \text{ м/с.}$$

Отрицательный знак указывает на обратное направление скорости. Для пассажира самолета Солнце будет восходить на западе, в тот момент, когда на поверхности Земли под ним будет вечер. Продолжительность восхода (и захода) Солнца будет значительно больше и составит

$$T_1 = T_0 \left| \frac{v_0}{v_1} \right| = 53.7 \text{ мин.}$$

Понижение горизонта при наблюдении с самолета не скажется на продолжительности восхода, а рефракцией по условию задачи мы пренебрегаем.

IX/х - 5

ВНЕ ФОКУСА

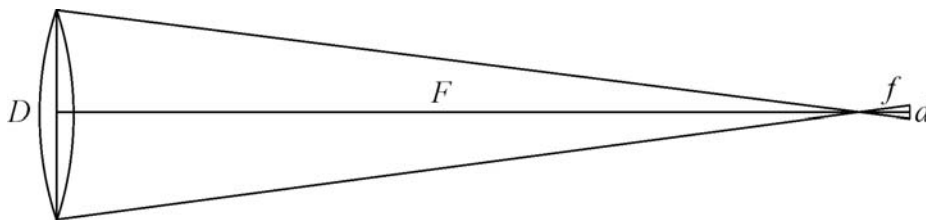
А.М. Татарников

? Перед фотографическими наблюдениями с линзовым астрографом (диаметр объектива 40 см, относительное отверстие $1/4$) была допущена ошибка при фокусировке на 2 мм. Определите, каким будет угловое разрешение при наблюдениях.

10 класс: Оцените, насколько изменится предельная звездная величина на снимках, если при идеальной фокусировке диаметр звездных изображений в фокальной плоскости равен 0.1 мм.

! Изобразим оптическую схему телескопа (справа). Диаметр объектива D равен 40 см, его фокусное расстояние $F = 4D$, то есть 160 см. Предположим, изображение фиксируется на расстоянии f от фокальной плоскости. Тогда размер изображений точечных источников увеличится до

$$d = D \frac{f}{F} = 0.5 \text{ мм.}$$



Это значительно больше размера звезды в фокусе, поэтому можно считать, что полученное значение есть размер звездных изображений вне фокуса. Это будет соответствовать угловому расстоянию на небе

$$\delta = \frac{d}{F} = \frac{Df}{F^2}.$$

Подставляя численные значения, получаем $1'$.

10 класс: Чтобы определить изменение проникающей способности телескопа, учтем, что больший диаметр изображений звезд (d вместо d_0) будет означать их меньшую поверхностную яркость. Падение яркости означает такое же увеличение минимального блеска звезды, необходимого для ее обнаружения. Таким образом, предельная звездная величина уменьшится:

$$\Delta m = -2.5 \lg \frac{d^2}{d_0^2} = -5 \lg \frac{d}{d_0} = -3.5.$$

IX. 6 ДАЛЕКАЯ СВЕРХНОВАЯ

О.С. Угольников

? Видимый поперечник у далекой галактики в небе Земли такой же, как у полной Луны, а реальный диаметр – 2.1 кпк. Можно ли будет увидеть в ней невооруженным глазом сверхновую звезду, аналогичную звезде Тихо Браге, которая вспыхнула в нашей Галактике на расстоянии 2.3 кпк и светила в небе Земли как Венера? Межзвездным поглощением пренебречь.

! Определим расстояние до галактики:

$$L = D / \delta = 230 \text{ кпк.}$$

Здесь D – диаметр галактики, а δ – ее угловой диаметр. Эта галактика в 100 раз дальше, чем Сверхновая Тихо Браге, значит, такая же звезда в этой галактике выглядела бы в 10^4 раз или на 10 звездных величин слабее. Венера светит в небе Земли как звезда -4^m , следовательно, блеск сверхновой составил бы около $+6^m$. Этого достаточно для наблюдений невооруженным глазом.

В реальности, звезда Тихо Браге находилась в диске Млечного Пути, и ее свечение было ослаблено межзвездным поглощением, которым мы в этой задаче пренебрегаем. Далекие галактики видны на небе вне проекции диска Млечного Пути, и поглощение там слабее. Поэтому реальный блеск такой сверхновой мог бы достичь 4^m .



X. 1

ЭКВАТОР, ТРОПИК И ПОЛЯРНЫЙ КРУГ

О.С. Угольников

? На некоторой планете сферической формы длины экватора и тропика относятся так же, как и длины тропика и полярного круга. Определите максимально возможную высоту одиночной центральной звезды на полярном круге. Угловыми размерами центральной звезды и рефракцией пренебречь.

! Широты тропика и полярного круга по модулю составляют

$$\varphi_1 = \varepsilon; \quad \varphi_2 = 90^\circ - \varepsilon.$$

Здесь ε – угол между плоскостью экватора и плоскостью орбиты планеты. Если длину окружности экватора обозначить через L_0 , то длины окружности тропика и полярного круга будут равны

$$\begin{aligned} L_1 &= L_0 \cos \varphi_1 = L_0 \cos \varepsilon, \\ L_2 &= L_0 \cos \varphi_2 = L_0 \sin \varepsilon. \end{aligned}$$

Из условия задачи

$$\frac{L_0}{L_1} = \frac{L_1}{L_2}; \quad \frac{1}{\cos \varepsilon} = \frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon}.$$

Данная пропорция может быть переписана как $1 - \sin^2 \varepsilon = \sin \varepsilon$. Квадратное уравнение имеет один корень на интервале $[0..1]$:

$$\sin \varepsilon = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.618; \quad \varepsilon = 38^\circ.$$

Высота центральной звезды на полярном круге будет максимальной в день солнцестояния (летнего для данного полушария) и составит

$$h = 90^\circ - \varphi_2 + \varepsilon = 2\varepsilon = 76^\circ.$$

X. 2

АПРЕЛЬ 2014

О.С. Угольников

? Во время XXI Всероссийской олимпиады по астрономии, 9 апреля 2014 г. в 1 час по московскому времени, наступит противостояние Марса, а 15 апреля в 12 часов по московскому времени – полное лунное затмение. Какое угловое расстояние разделит Луну и Марс в момент полной фазы затмения (при наблюдении в той зоне Земли, где они будут видны)? Орбиты Земли, Луны и Марса считать круговыми и лежащими в плоскости эклиптики. Суточный параллакс Луны не учитывать.

! Изобразим положения космических тел в оба указанных момента. Мы видим, что угловое расстояние между затмившейся Луной и Марсом есть сумма углов α и β . Угол α есть дуга, которую пройдет по орбите Земля в промежутке t между двумя явлениями:

$$\alpha = \omega_1 t = \frac{v_1}{l_1} t.$$

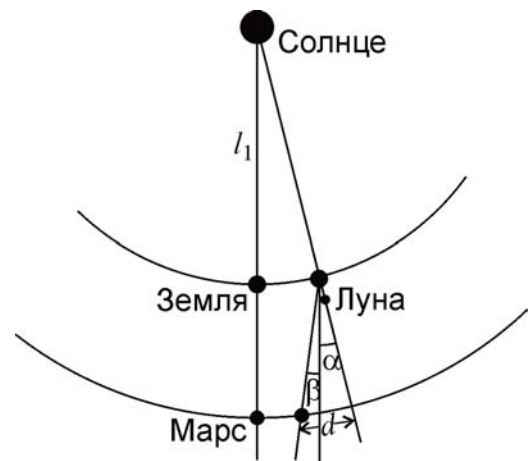
Здесь ω_1 и v_1 – угловая и линейная скорость Земли, l_1 – радиус ее орбиты. Угол β определяется попятным перемещением Марса среди звезд вблизи противостояния и равен

$$\beta = \frac{v_1 - v_2}{l_2 - l_1} t.$$

Здесь аналогичные обозначения с индексом 2 введены для Марса. Угловое расстояние между Луной и Марсом в момент затмения составит:

$$\gamma = \alpha + \beta = \left(\frac{v_1}{l_1} + \frac{v_1 - v_2}{l_2 - l_1} \right) t = \left(\frac{v_1}{l_1} + \frac{v_1(1 - a^{-1/2})}{l_1(a - 1)} \right) t = \omega_1 t \left(1 + \frac{1}{a + \sqrt{a}} \right).$$

Здесь a – отношение радиусов орбит Марса и Земли (или радиус орбиты Марса в астрономических единицах). Подставляя численные данные, получаем величину углового расстояния: 8.7° .



Х. 3 ХРУСТАЛЬНАЯ СФЕРА

О.С. Угольников

? В древности люди считали, что наш мир, содержащий Солнце, Землю и другие планеты, окружен хрустальной сферой, на которой располагаются звезды. Предположим, что вокруг Солнечной системы действительно есть сфера, причем совершенно прозрачная. На ней закреплены 6000 звезд со средней яркостью, соответствующей 4.8 звездной величине в небе Земли. Звезды светят равномерно во все стороны. Каков радиус этой сферы, если при наблюдении издалека она имеет такой же суммарный блеск, как и находящееся внутри нее Солнце?

! Коль скоро сфера издалека выглядит такой же по блеску, как и Солнце, ее суммарная абсолютная величина M_0 такая же, как и у Солнца: 4.7^m . Суммарная видимая звездная величина сферы на Земле равна

$$m_0 = m - 2.5 \lg N = -4.6.$$

Здесь m – звездная величина, соответствующая средней яркости звезды, N – количество звезд. Все звезды сферы находятся от Земли практически на одинаковом расстоянии, равном радиусу сферы R . Найдём его:

$$\lg R = 1 + \frac{m_0 - M_0}{5}.$$

Радиус сферы равен 0.14 пк.

X. 4 В ПОГОНЕ ЗА ЗВЕЗДАМИ

Е.Н. Фадеев

? Пилот самолета, движущегося со скоростью 800 км/ч, заметил, что альт-азимутальные координаты звезд остаются одинаковыми в течение всего полета длительностью в 6 часов. Определите, на сколько километров меньше пришлось бы преодолеть пилоту, если бы он летел кратчайшим маршрутом?

! Альт-азимутальные координаты звезд меняются из-за суточного вращения Земли. Значит, самолет должен лететь так, чтобы его движение компенсировало это вращение. Линейная скорость суточного вращения Земли на широте φ равна

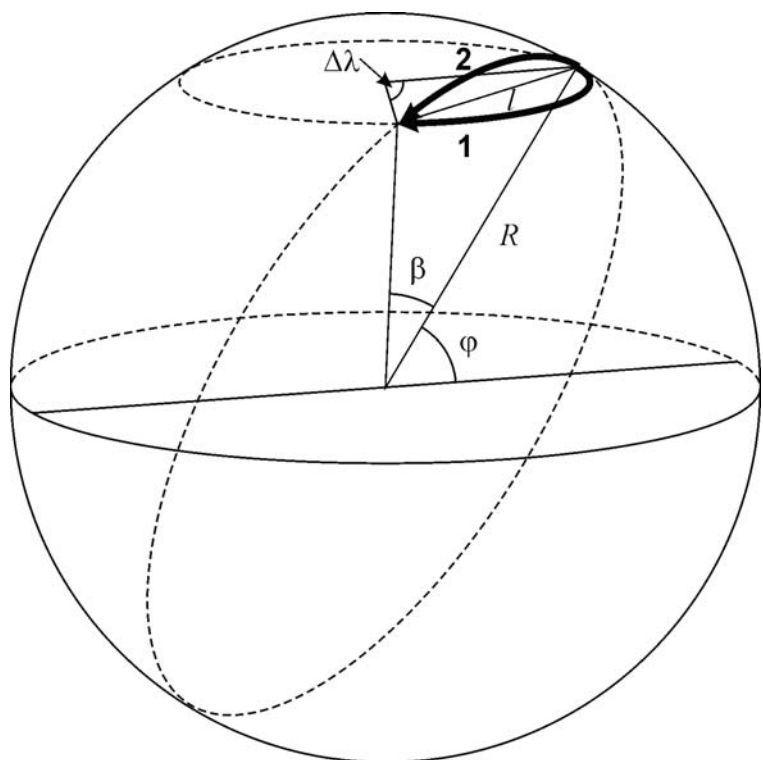
$$v = \frac{2\pi}{T} R \cos\varphi.$$

Эта скорость составляет 800 км/ч на широте 61° (в северном или южном полушарии). За 6 часов самолет преодолевает 4800 км по траектории 1 на рисунке, что соответствует разнице долгот $\Delta\lambda$ около 90° .

Ему пришлось бы преодолеть меньшее расстояние, если бы он летел вдоль дуги большого круга (траектория 2). Обозначим эту дугу как β . Расстояние между точкой старта и точкой финиша по прямой составляет

$$l = 2R \sin \frac{\beta}{2} = 2R \cos\varphi \sin \frac{\Delta\lambda}{2} = \sqrt{2} R \cos\varphi.$$

Отсюда получаем, что длина дуги большого круга β равна 40° , а соответствующее линейное расстояние равно 4400 км. В результате, пилот увеличил длину своего пути на 400 км.



X. 6**РАСПАД СКОПЛЕНИЯ**

О.С. Угольников

? Небольшое рассеянное звездное скопление состоит из 100 одинаковых звезд, не группирующихся в пары, и имеет радиус 1 пк. Через какое-то время скопление распадается, две его звезды образуют двойную систему, а остальные покидают область скопления по отдельности. Оцените расстояние между звездами в двойной системе. Начальные скорости звезд и их скорости после вылета из скопления считать малыми.

! Мы пренебрегаем начальными скоростями звезд скопления, поэтому можно сразу сказать, что оно гравитационно связано, его полная энергия отрицательна. В некоторый момент времени его покидает одна из звезд. Для этого ей необходимо выйти из «потенциальной ямы» с энергией

$$E_1 = -\frac{G(N-1)M^2}{R}.$$

Здесь N – число звезд в скоплении, M – масса одной звезды, R – характерное расстояние между звездами, которое можно считать равным радиусу скопления. Данная энергия есть потенциальная энергия взаимодействия покидающей скопление звезды с $(N-1)$ другими звездами. Следующей звезде будет немного проще покинуть скопление, в выражение для энергии E_2 будет стоять множитель $(N-2)$. Здесь мы не учитываем возможное уменьшение размеров скопления после вылета звезд, так как оно будет энергетически компенсировано появлением у оставшихся звезд кинетической энергии. В итоге, чтобы скопление покинули все звезды, кроме двух, нужна энергия

$$E = \sum_{i=1}^{N-2} E_i = -\frac{GM^2}{R} \sum_{i=1}^{N-2} (N-i) \approx -\frac{GM^2 N^2}{2R}.$$

Здесь мы учли, что число N достаточно велико. То же выражение можно было получить, просто просуммировав величины потенциальной энергии попарного взаимодействия звезд, считая расстояния между ними равными R . Дополнительной кинетической энергией, уносимой вылетающими звездами, мы по условию задачи пренебрегаем. Следовательно, именно такая отрицательная энергия E должна характеризовать единственную двойную систему, оставшуюся на месте скопления. Мы вновь пренебрегли изначальными потенциальными энергиями двух звезд как много меньшими по модулю, чем энергия E .

Предположим, что орбиты звезд в двойной системе круговые. Тогда полная энергия есть половина потенциальной энергии системы. Отсюда получаем выражение для потенциальной энергии:

$$E_p = -\frac{GM^2}{r} = 2E = -\frac{GM^2 N^2}{R}.$$

Расстояние между звездами составит

$$r = \frac{R}{N^2} = 20 \text{ а.е.}$$



XI. 1

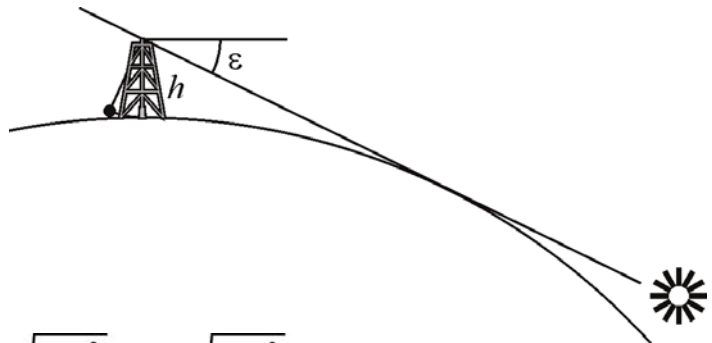
ГИГАНТСКИЙ МАЯТНИК

О.С. Угольников

? На северном полюсе далекой сферической планеты установили гигантский маятник Фуко. При наблюдении из точки подвеса маятника местное Солнце всегда было над горизонтом, касаясь его лишь раз в году. Груз маятника располагался вблизи поверхности планеты, а период колебаний составил 10 земных минут. Найдите среднюю плотность планеты. Наклон экватора планеты к плоскости ее орбиты вдвое меньше, чем у Земли. Атмосферными эффектами и угловыми размерами звезды пренебречь.

! Маятник находится на полюсе, и наименьшая высота центральной звезды достигается в день зимнего солнцестояния. Тогда оно находится глубже математического горизонта на угол ε , равный наклону экватора к плоскости орбиты планеты. По условию задачи, он вдвое меньше земного и равен 11.7° или 0.2 радиан. В этот момент касательные лучи освещают точку подвеса маятника. Высота подвеса составляет

$$h = R \cdot \left(\frac{1}{\cos \varepsilon} - 1 \right) \approx \frac{R \varepsilon^2}{2}.$$



Здесь R – радиус планеты, мы также учли, что угол ε невелик. Груз маятника колеблется у поверхности, и период будет равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{hR^2}{GM}} = \pi \varepsilon \sqrt{\frac{2R^3}{GM}}.$$

Средняя плотность планеты равна

$$\rho = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{M}{R^3} = \frac{3\pi \varepsilon^2}{2GT^2} = 8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

XI. 2

НЕБО СКОПЛЕНИЯ

О.С. Угольников

? На ясном дневном небе Земли можно с трудом увидеть Венеру, находящуюся в наибольшей элонгации от Солнца. Сколько звезд было бы видно на дневном небе Земли, находишь Солнце внутри шарового скопления радиусом 10 пк, состоящего из миллиона таких же, как Солнце, звезд, равномерно распределенных по объему скопления? Считать яркость фона неба одинаковой по всем направлениям.

! Определим концентрацию звезд в шаровом скоплении:

$$n = \frac{3N}{4\pi R^3} = 240 \text{ пк}^{-3}.$$

Найдем далее расстояние, с которого звезда солнечного типа (абсолютная звездная величина M равна +4.7) будет выглядеть как Венера в наибольшей элонгации (видимая звездная величина m равна -4.4):

$$\lg r = 1 + \frac{m - M}{5} = -0.82.$$

Соответствующее расстояние составляет 0.15 пк. Рассчитаем среднее количество звезд внутри полусферы с таким радиусом:

$$N_V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 n = \frac{N}{2} \cdot \frac{r^3}{R^3} \sim 2.$$

К этому числу можно добавить еще единицу, соответствующую самому Солнцу, видимому на дневном небе Земли. В любом случае, на небе планеты, находящейся в шаровом скоплении, днем было бы видно лишь несколько звезд.

XI. 3 ПЫЛЕВАЯ ОБОЛОЧКА

А.М. Татарников

? Вокруг звезды спектрального класса G2V на расстоянии 0.3 а.е. имеется пылевая оболочка толщиной 0.01 а.е. с концентрацией частиц 0.002 см^{-3} . Определите светимость и массу оболочки. Пылинки считать абсолютно черными телами радиусом 0.1 мкм, волновыми эффектами пренебречь.

! Вначале определим, какая часть излучения звезды будет задерживаться пылью. Для этого рассмотрим цилиндр с площадью основания S и высотой, равной толщине оболочки l . Число пылинок, попадающих в этот цилиндр, составит

$$N_S = S l n,$$

где n – концентрация пылинок. Если число пылинок невелико, и при наблюдении изнутри они не накладываются друг на друга, то их суммарная площадь на пути распространения света будет равна

$$\sigma = N_S \pi r^2,$$

где r – радиус пылинки. Среднее число пылинок на луче зрения от звезды:

$$N = \frac{\sigma}{S} = l \cdot n \cdot \pi r^2 = 0.1.$$

Это число невелико, и эффект видимого наложения пылинок друг на друга можно не учитывать. Так как пылинки черные, они будут поглощать все падающее на них излучение звезды, нагреваться и излучать в инфракрасном диапазоне. Свети-

мость оболочки составит 0.1 от светимости звезды, которая, как можно видеть по ее спектральному классу, похожа на Солнце. В итоге, светимость оболочки равна $4 \cdot 10^{25}$ Вт. Масса оболочки составляет

$$M = 4\pi R^2 l \cdot n \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho = \frac{16}{3} \pi^2 R^2 r^3 l \cdot n \rho.$$

Здесь ρ – плотность пылинок, которую можно принять равной 1 г/см^3 . Итоговое значение массы: $3 \cdot 10^{17}$ кг.

XI. 4 ОСТЫВАЮЩИЙ КАРЛИК

О.С. Угольников

? Белый карлик имеет массу, равную массе Солнца, и радиус, равный радиусу Земли. Температура его поверхности равна 10 000 кельвин, температура недр – 10 млн кельвин. Оцените время, которое этот объект будет выглядеть как белый карлик, т.е. излучать энергию в видимом диапазоне, до превращения в черный карлик. Считать для простоты, что теплоемкость вещества белого карлика соответствует теплоемкости идеального газа.

! Белый карлик, за исключением тонкого внешнего слоя, состоит из очень горячего вырожденного газа. Основу химического состава его недр представляет полностью ионизованный гелий-4 или более тяжелые ядра. Для гелия на 4 нуклона (протона или нейтрона) приходится три частицы – сам ион гелия и два электрона. Если считать, что теплоемкость вещества такая же, как и у идеального газа, то тепловой запас энергии белого карлика составит

$$E = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} kT_0 \cdot N \approx \frac{kT_0 M}{m}.$$

Здесь k – постоянная Больцмана, M и T_0 – масса и температура недр белого карлика, N – число нуклонов, m – масса протона (или нейтрона, разница в данной задаче несущественна). Данное выражение в целом справедливо и для углеродных белых карликов, в которых число частиц на один нуклон вместо $3/4$ составляет $7/12$, для кислорода – $9/16$. Светимость белого карлика равна

$$J = 4\pi\sigma R^2 T^4.$$

Здесь σ – постоянная Стефана-Больцмана, R – радиус белого карлика, T – температура его поверхности. С течением времени тепловой запас и светимость белого карлика будут уменьшаться, характерное время его угасания можно определить простым образом:

$$t = \frac{E}{J} = \frac{kT_0 M}{4\pi\sigma m R^2 T^4}.$$

Это время равно $6 \cdot 10^{17}$ секунд или 20 миллиардов лет. Запасов тепловой энергии белому карлику хватит на время, превышающее возраст Вселенной.

XI. 5

ДВА ЗАТМЕНИЯ ПОДРЯД

О.С. Угольников

? На какое минимальное расстояние по поверхности Земли должен переместиться наблюдатель, чтобы иметь возможность увидеть два частных солнечных затмения, разделенных интервалом в один лунный месяц? Орбиты Земли и Луны считать круговыми.

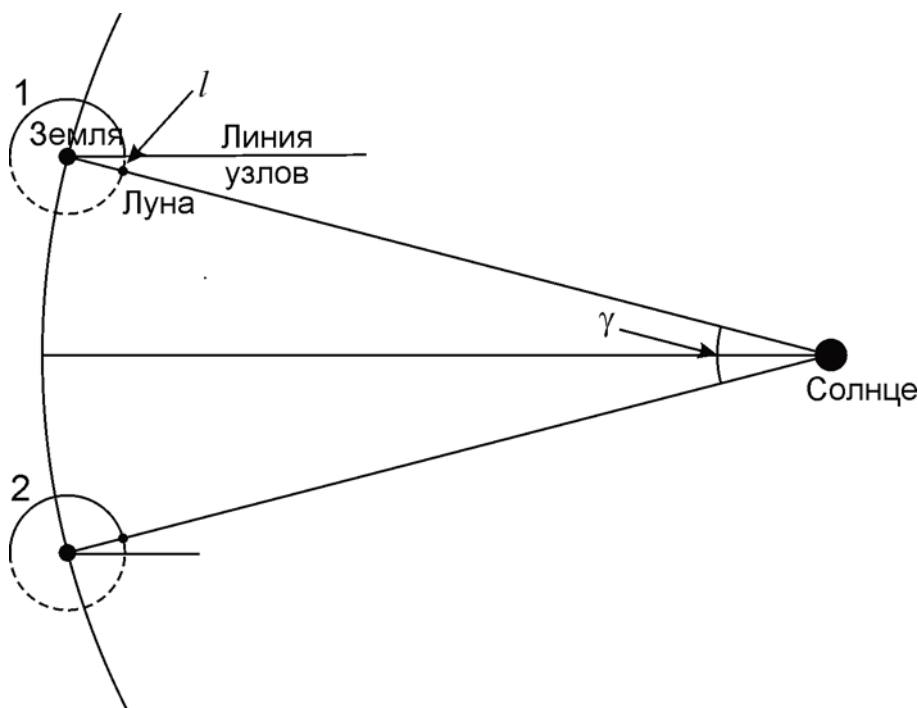
! Как известно, два солнечных затмения могут происходить с интервалом в один лунный месяц, если линия узлов орбиты Луны совпадет с линией Земля-Солнце посередине между этими новолуниями. В подавляющем большинстве случаев (а в модели круговых орбит Земли и Луны – всегда) эти затмения будут частными. Во время одного новолуния Луна будет располагаться севернее плоскости эклиптики, а во время другого – южнее плоскости эклиптики, поэтому затмения будут наблюдаться в разных полушариях Земли. В этой задаче нам нужно найти минимально возможное расстояние между областями видимости этих явлений.

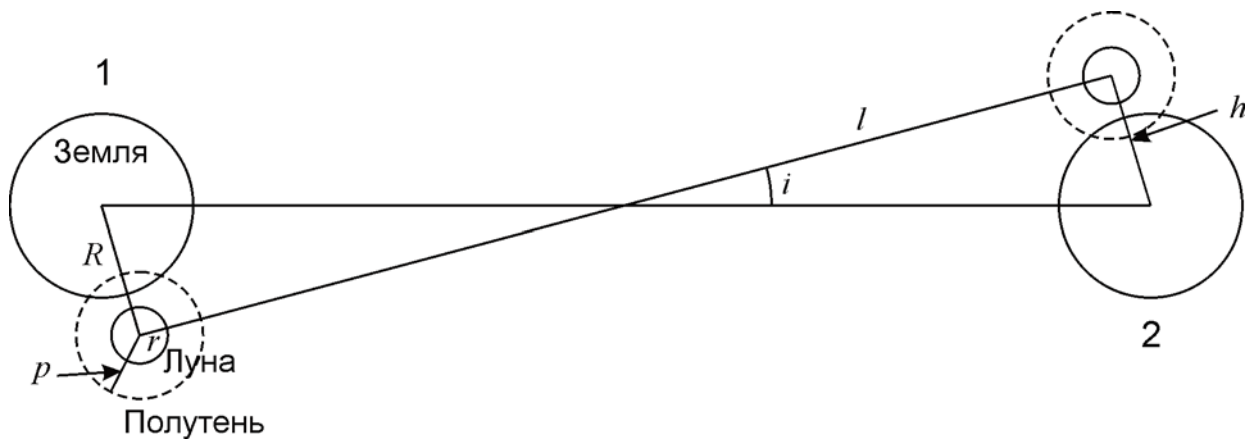
Синодический период Луны S составляет 29.53 дня. За это время Земля проходит в своем орбитальном движении дугу γ , равную 29.1° . Пусть положения Луны в оба новолуния симметричны относительно линии узлов, и во время этих новолуний Луна отстояла от линии узлов на угол $\gamma/2$. Пространственное расстояние от узла будет равно

$$l = L\gamma / 2 = 97.6 \text{ тыс. км.}$$

Здесь мы учли, что угол $\gamma/2$ невелик, L – радиус орбиты Луны.

Рассмотрим картину со стороны Солнца и учтем, что оно значительно дальше от Земли, нежели Луна. Минимальное расстояние между проекциями центров Земли и Луны составит





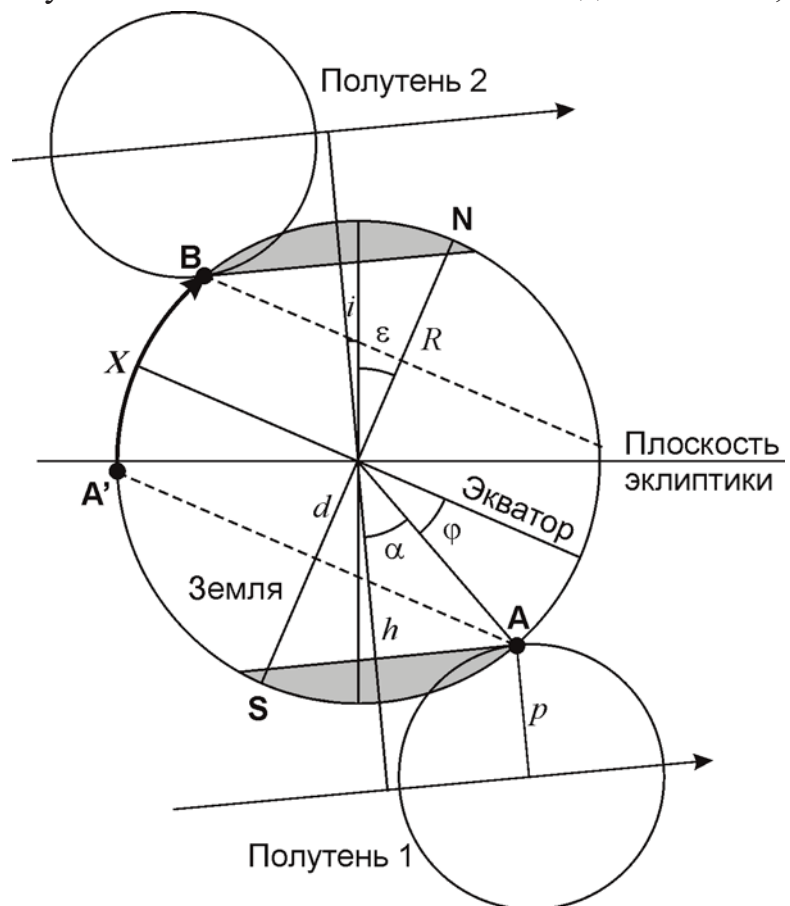
$$h = l \cdot i = L \cdot i \cdot \gamma / 2 = 8760 \text{ км.}$$

Это расстояние больше радиуса Земли, поэтому центральные солнечные затмения в такой конфигурации не наблюдаются. Но частные происходят, в чем можно убедиться, рассчитав радиус лунной полутени p (рисунок справа):

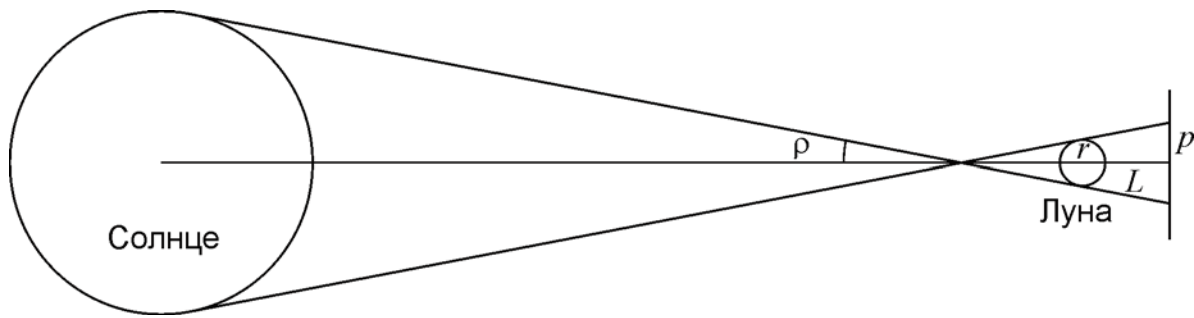
$$p = r + L\rho = 3500 \text{ км} \sim 2r.$$

Здесь ρ – угловой радиус Солнца. Мы вновь учли, что расстояние до Солнца велико. Угловые радиусы Солнца и Луны в небе Земли можно считать одинаковыми, и $L\rho \approx r$.

Изобразим Землю и две проекции полутени в более крупном масштабе. Обратим внимание, что области видимости обоих затмений (выделены серым цветом) могут смещаться ближе к экватору за счет наклона самого экватора и лунной орбиты к плоскости эклиптике. Эффект будет максимальным, если оба фактора сложатся друг с другом. Это будет иметь место вблизи весеннего равноденствия у восходящего узла орбиты Луны (на рисунке) или вблизи осеннего равноденствия у нисходящего узла орбиты Луны. Найдем минимальную (по модулю) широту точки наблюдения затмений:



$$\varphi = 90^\circ - \alpha - \varepsilon - i = 90^\circ - \arccos \frac{h-p}{R} - \varepsilon - i = 27.1^\circ.$$



По прошествии лунного месяца точка наблюдения первого затмения **A** может оказаться на другой стороне терминатора Земли за счет ее вращения – вспомним, что синодический период Луны близок к полуцелому числу суток. Наблюдателю достаточно будет преодолеть путь **X** вдоль меридиана из точки **A'** в точку **B**. Это соответствует дуге 2φ , длина пути составит 6000 км.

Ситуация, близкая к описанной в этой задаче, случится 13 июля и 11 августа 2018 года. Области видимости частных солнечных затмений будут разделены расстоянием около 6500 км.

XI. 6 КАТАЛОГ ЭЙТКЕНА

О.С. Угольников

? При составлении своего классического каталога двойных звезд американский астроном Роберт Грант Эйткен стремился отсеять оптические пары (звезды, не связанные друг с другом в пространстве), накладывая на двойные звезды ограничение:

$$\lg \rho < 2.8 - 0.2m.$$

Здесь ρ – угловое расстояние между компонентами в угловых секундах, а m – звездная величина более яркой из звезд. Оцените количество оптических двойных звезд с обеими компонентами ярче 6^m , которые все же могли попасть в каталог Эйткена. Считать, что 6000 звезд ярче 6^m распределены по небу случайным образом, а число звезд с видимой яркостью более J пропорционально $J^{-3/2}$.

! По заданной формуле мы видим, что в каталог могли попасть звездные пары с угловым расстоянием меньше заданного, причем требование тем жестче, чем слабее звезда. Это имеет логическое объяснение: более яркие звезды, скорее всего, ближе, и там физические двойные звезды могут быть видны под большими углами.

Пусть некоторая звезда имеет блеск m . Рассчитаем вероятность случайного появления другой звезды ярче 6^m на угловом расстоянии, не большим ρ'' . Последняя величина определяется формулой, заданной в условии. Определим, какую часть небесной сферы занимает окружность с радиусом ρ'' :

$$\sigma = \frac{\pi \cdot (\rho / 206265)^2}{4\pi} = \frac{\rho^2}{1.7 \cdot 10^{11}}.$$

Звезд ярче 6^m на небе 6000, и вероятность составляет

$$p = 6000 \cdot \sigma = \frac{\rho^2}{2.8 \cdot 10^7}.$$

Разделим все звезды на 6 групп по звездным величинам (ярче 1^m , от 1^m до 2^m и т.д., от 5^m до 6^m). Число звезд ярче 6^m на небе 6000, число звезд ярче 5^m (N_0) по условию задачи в $2.512^{1.5}$, то есть в 4 раза меньше и равно 1500. Звезд от 5^m до 6^m на небе около 4500. Аналогичным образом, мы можем рассчитать количество звезд N в каждой группе.

Предельная величина	N_0	m_{av}	N	$\lg \rho$	ρ''	p	$N \cdot p$
1	6	0.5	6	2.7	501	0.008971	0.054
2	23	1.5	18	2.5	316	0.003571	0.063
3	94	2.5	70	2.3	200	0.001422	0.100
4	375	3.5	281	2.1	126	0.000566	0.159
5	1500	4.5	1125	1.9	79	0.000225	0.254
6	6000	5.5	4500	1.7	50	0.000090	0.404

Будем считать, что средняя величина m_{av} звезд каждой группы равна среднему между максимумом и минимумом (0.5^m для группы самых ярких звезд, 1.5^m , 2.5^m и т.д.). Исходя из этого, рассчитаем величину ρ и вероятность случайного обнаружения другой звезды p для этих групп. Произведение числа звезд и вероятности $N \cdot p$ есть среднее число оптических звезд в каталоге Эйкена, соответствующее каждой группе (отметим, что небольшое количество ярких пар может быть учтено дважды). Данные произведения также приведены в таблице. Проведя суммирование произведений для всех групп, получаем общее вероятное число оптических двойных ярче 6^m в каталоге Эйткена, оно равно 1.

Полученный ответ показывает обоснованность критерия, введенного при составлении каталога. Более жесткие требования будут лишь исключать из каталога физические двойные звезды, а смягчение критерия резко увеличит число оптических двойных. Нужно также учесть, что реальное число оптических двойных в каталоге Эйткена может быть больше вследствие неравномерности распределения звезд на небе с повышенной плотностью вблизи Млечного Пути.