ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

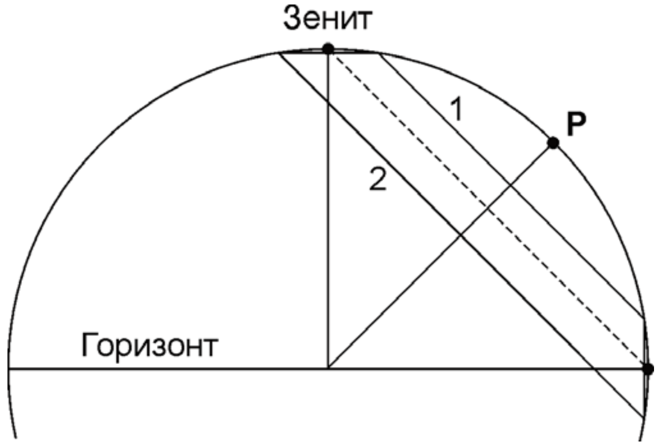
IX/X.1 СИНХРОННЫЕ КУЛЬМИНАЦИИ

О.С. Угольников

? Верхние кульминации двух далеких звезд происходят одновременно, при этом звезды располагаются симметрично относительно зенита. Во время нижней кульминации эти звезды располагаются симметрично относительно горизонта. Определите широту места наблюдения. Атмосферную рефракцию не учитывать.

! Очевидно, что раз верхние кульминации двух далеких звезд происходят одновременно, то и нижние кульминации произойдут одновременно, через половину звездных суток. В нижней кульминации положения звезд симметричны относительно горизонта, следовательно, одна из звезд расположена выше него. Значит, верхняя кульминация этой звезды тоже будет над горизонтом, ровно как и верхняя кульминация другой звезды, расположенной симметрично относительно зенита, на той же высоте. Изобразим проекцию небесной сферы на плоскость небесного меридиана.

Суточные пути двух звезд в этой проекции будут выглядеть как параллельные линии. Проведем еще одну линию, параллельную этим двум и находящуюся посередине между ними (пунктирную). Она также будет суточной параллелью некоторого объекта неба, у которого верхняя кульминация произойдет в зените, а нижняя – на горизонте. Такое может быть на широте ±45°. В этом можно убедиться также, взяв середину дуги меридиана между точками верхней и нижней кульминации любой из двух звезд. Эта точка **P** – один из полюсов мира – будет расположена на высоте 45°.



IX/X.2 ВСТРЕЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Е.Н. Фадеев

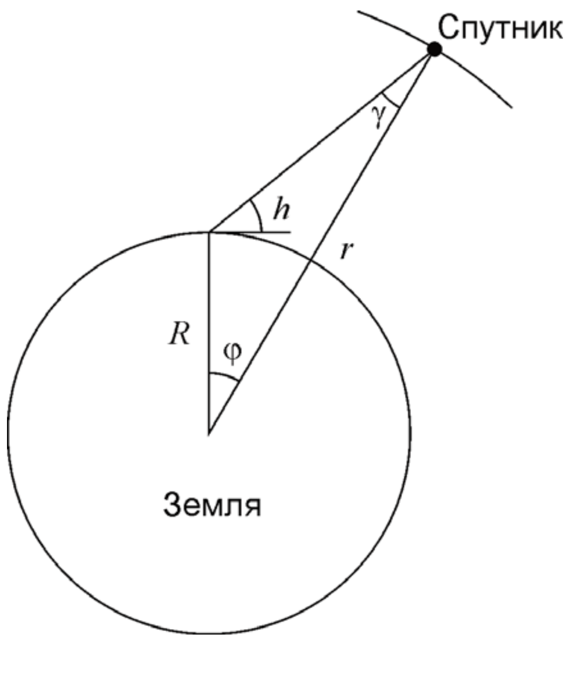
? Два спутника вращаются по круговым экваториальным орбитам вокруг Земли. Известно, что спутник 1 имеет радиус орбиты 18650 км (*10 класс*: горизонтальный параллакс 20°) и обратное движение (противоположно осевому вращению Земли), а спутник 2 – радиус орбиты 36700 км (*10 класс*: горизонтальный параллакс 10°) и прямое движение. Для наблюдателя на экваторе в некоторый момент времени спутники находятся в западной полусфере. Высота первого спутника 30°, высота второго спутника 60°. Какой из спутников раньше попадет в зенит и через какой промежуток времени? Атмосферной рефракцией пренебречь.

! Угловую скорость вращения спутника можно определить из III закона Кеплера:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}},$$

где M – масса Земли, r – радиус орбиты спутника. Если задан горизонтальный параллакс спутника p, то радиус и угловую скорость можно определить по формулам:

$$r = \frac{R}{\sin p}; \quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}\sin^3 p}\,.$$



Для двух спутников, заданных в условии задачи, мы получаем $\omega_1 = 2.5{\cdot}10^{-4}$ с$^{-1}$ ~ ~ 51.5°/ч и $\omega_2 = 9.0{\cdot}10^{-5}$ с$^{-1}$ ~ 18.5°/ч. Зная высоту спутника над горизонтом (h), можно вычислить его геоцентрическое зенитное расстояние (см. рисунок):

$$\sin\gamma = \frac{R}{r}\cos h;$$

$$\varphi = 180^\circ - \gamma - (90^\circ + h) = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{R}{r}\cos h\right) - h = 90^\circ - \arcsin(\sin p \cos h) - h.$$

Получаем, что в системе координат, связанной с центром Земли, в начальный момент времени первый спутник отстоял от зенита на угол $\varphi_{01} = 43°$, а второй – на угол $\varphi_{02} = 25°$. Угловая скорость вращения Земли равна

$$\omega_0 = \frac{360^\circ}{T} = 15^\circ\,/\,\text{ч}.$$

Здесь T – продолжительность звездных суток. Очевидно, параллактическое смещение спутника не влияет на момент прохождения зенита, и мы можем далее решать задачу в геоцентрической системе. Тогда первый спутник движется относительно звезд к западу со скоростью ω_1. При этом зенит наблюдателя движется относительно звезд в противоположном направлении со скоростью ω_0. Значит, для того, чтобы попасть в зенит, спутнику необходимо зайти за горизонт на западе, а затем взойти на востоке. Для этого необходимо пройти угол $\varphi_1 = 360° - \varphi_{01} = 317°$. Спутник достигнет зенита через время

$$t_1 = \frac{\varphi_1}{\omega_1 + \omega_0} = 4.8\,\text{ч}.$$

Второй спутник со скоростью ω_2 движется прямым движением в восточном направлении, и в том же направлении со скоростью ω_0 движется зенит наблюдателя. Поскольку $\omega_2 > \omega_0$, спутник будет медленно перемещаться по небу в восточном направлении. Чтобы попасть в зенит, спутнику надо преодолеть угловое расстояние $\varphi_2 = \varphi_{02} = 25°$. На это потребуется время

$$t_2 = \frac{\varphi_2}{\omega_1 - \omega_0} = 7.2\,\text{ч}.$$

Итого, первый спутник достигнет зенита раньше. Произойдет это через 4.8 ч.

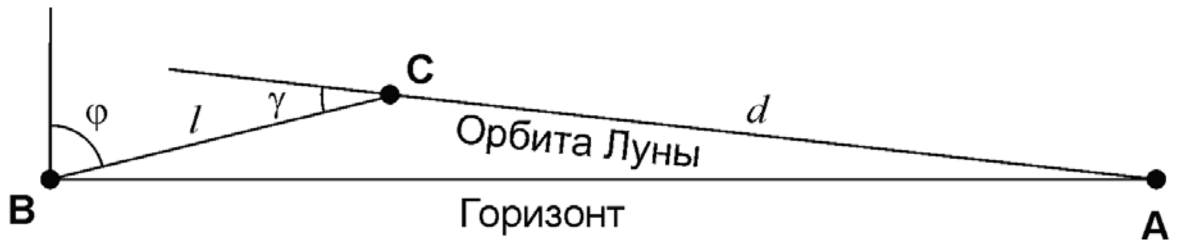
IX.3 ОПЕРЕЖАЮЩИЙ ВОСХОД

О.С. Угольников

? В некотором пункте Земли центр диска Луны взошел на 20 минут раньше по местному (среднему солнечному) времени, чем в предыдущие сутки, находясь в созвездии Рыб. Определите возможные значения широты этого пункта. Атмосферной рефракцией, суточным параллаксом Луны и эксцентриситетом ее орбиты пренебречь.

! Как известно, Луна движется по своей орбите с запада на восток и при наблюдении с большей части поверхности Земли каждый день восходит позже, чем накануне. Ситуация, описанная в условии задачи, может наступить только в приполярных районах нашей планеты, где продолжительность видимости Луны может резко изменяться даже за одни сутки. Так как Луна находится в созвездии Рыб и движется среди звезд на северо-восток, мы можем сделать вывод, что картина наблюдалась в северных полярных широтах. Чтобы решить задачу, изобразим положение Луны вблизи двух последовательных восходов (на обороте).

В первый день Луна появилась на горизонте в точке **A**. Через звездные сутки, когда орбита Луны заняла то же положение на небе, Луна уже находилась над горизонтом в точке **C**. Так как звездные сутки на 4 минуты короче солнечных, получаем, что с момента восхода Луны на второй день (точка **B**) прошло 16 минут. Пренебрегая орбитальным движением Луны за это время, получаем, что в ходе своего суточного движения (скорость 15° в час) Луна прошла путь l, равный 4°. Линия, по которой проходило это движение (**BC**), параллельна небесному экватору и достаточно близка к нему, так как Луна находится в созвездии Рыб.



Орбитальное перемещение Луны происходило вдоль линии **AC** (суточным параллаксом Луны мы пренебрегаем). Эта линия образует с небесным экватором (и линией **BC**) угол γ, который вблизи точки весеннего равноденствия может принимать значения от $\varepsilon - i$ до $\varepsilon + i$, где ε – угол наклона экватора к эклиптике (23.45°), а i – угол наклона орбиты Луны к эклиптике (5.15°). Численно это соответствует интервалу от 18.3° до 28.6°. Сама линия **BC** вблизи точки востока образует угол φ (широта места) с вертикалью. Величина суточного перемещения Луны по круговой орбите d равна $(360°/T) = 13.2°$ (здесь T – сидерический период обращения Луны). В треугольнике на рисунке угол **BAC** равен

$$\mathbf{BAC} = 180° - (90° - \varphi) - (180° - \gamma) = \varphi + \gamma - 90°.$$

Из теоремы синусов имеем

$$\frac{d}{\sin(90^{\circ} - \varphi)} = \frac{l}{\sin(\varphi + \gamma - 90^{\circ})};$$

$$\frac{d}{\cos\varphi} = \frac{l}{-\cos(\varphi + \gamma)} = \frac{l}{\sin\gamma\,\sin\varphi - \cos\gamma\,\cos\varphi}.$$

Отсюда

$$\sin\gamma\,\sin\varphi - (\cos\gamma + (l/d))\cos\varphi = 0.$$

В итоге,

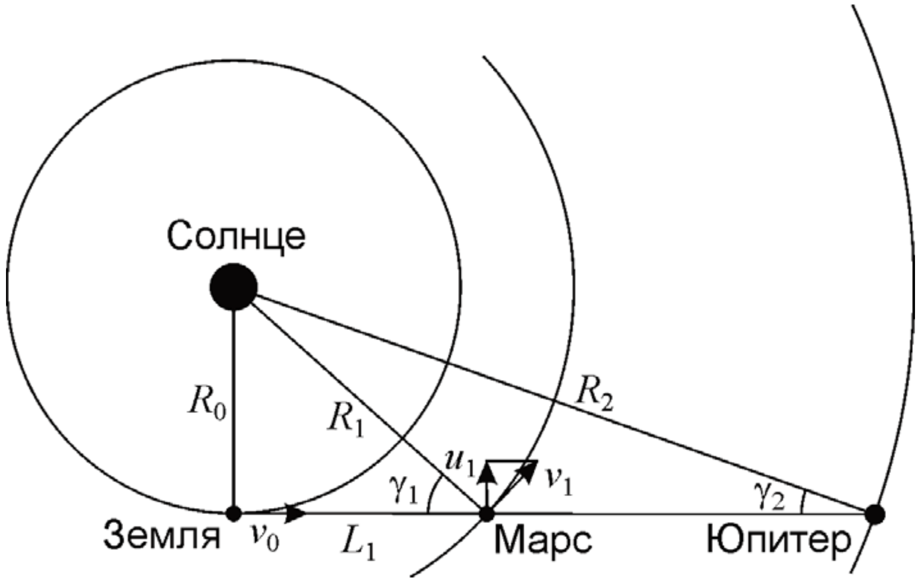
$$\varphi = \arctan\frac{\cos\gamma + (l/d)}{\sin\gamma}.$$

Подставляя границы интервала возможных значений угла γ, получаем интервал широт: от +68° до +76°. Отметим, что минимальное значение угла γ соответствует максимальной широте и наоборот.

IX.4 МАРС НА ДИСКЕ ЮПИТЕРА

О.С. Угольников

? Предположим, Вы стали свидетелем редчайшего явления для Земли: Марс, находясь в точке западной квадратуры, прошел по диаметру диска Юпитера. Сколько времени будет длиться это явление (вместе с частными фазами) в одном пункте нашей планеты? Эксцентриситетом и наклоном орбит планет к плоскости эклиптики, движением наблюдателя за счет осевого вращения Земли пренебречь.



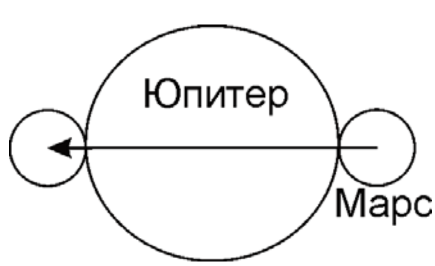
! Изобразим положение Земли, Марса и Юпитера в момент явления. Обе планеты находятся в западной квадратуре, Земля при наблюдении с кажой из них оказывается в наибольшей восточной элонгации. Нам нужно определить угловую скорость Марса и Юпитера в небе Земли. Собственная скорость Земли v_0 направлена вдоль прямой, соединяющей ее с планетами, и на их угловую скорость не влияет. Скорость Марса v_1 имеет составляющую u_1, перпендикулярную направлению на Землю. Угловая скорость Марса равна

$$\omega_1 = \frac{u_1}{L_1} = \frac{v_1 \cos\gamma_1}{R_1 \cos\gamma_1} = \frac{v_1}{R_1}.$$

Мы получили, что угловая скорость движения Марса по небу в момент квадратуры равна угловой скорости его движения по орбите. К этому выводу можно было прийти другим путем: Земля должна двигаться с той же угловой скоростью в небе Марса. Коль скоро она находится в наибольшей элонгации, ее угловая скорость равна угловой скорости Солнца. Она, в свою очередь, равна угловой скорости движения Марса по орбите. Аналогичные выводы мы можем сделать для угловой скорости Юпитера в небе Земли ω_2. Из III закона Кеплера имеем:

$$\omega_{1,2} = \frac{v_{1,2}}{R_{1,2}} = \omega_0 \left(\frac{R_0}{R_{1,2}} \right)^{3/2}.$$

Здесь ω_0 – угловая скорость движения Земли по орбите (0.986°/сутки). В момент прохождения Марс движется по небу относительно Юпитера с угловой скоростью ($\omega_1 - \omega_2$) и должен пройти дугу, равную сумме угловых диаметров планет ($\delta_1 + \delta_2$). В случае Юпитера нас интересует экваториальный диаметр, так как экватор Юпитера практически параллелен плоскости его орбиты. Продолжительность явления составит



$$T = \frac{\delta_1 + \delta_2}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{\dfrac{d_1}{\sqrt{R_1^2 - R_0^2}} + \dfrac{d_2}{\sqrt{R_2^2 - R_0^2}}}{\omega_0\left(\left(\dfrac{R_0}{R_1}\right)^{3/2} - \left(\dfrac{R_0}{R_2}\right)^{3/2}\right)} = \frac{(d_1 / R_0)(a_1^2 - 1)^{-1/2} + (d_2 / R_0)(a_2^2 - 1)^{-1/2}}{\omega_0(a_1^{-3/2} - a_2^{-3/2})}.$$

Здесь a_1 и a_2 – радиусы орбит Марса и Юпитера в астрономических единицах. Подставляя численные значения, получаем 41 минуту.

IX.5 ВИЗИТ КОМЕТЫ

М.И. Волобуева

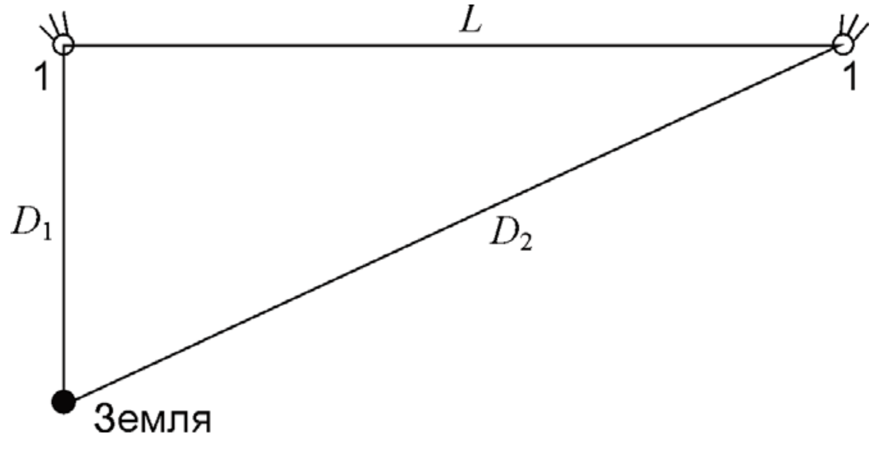
? **17 января 2016 года комета C/2013 US10 (Каталина) приблизилась к Земле на минимальное расстояние. При этом ее горизонтальный параллакс составил 12.0″. 18 марта того же года параллакс кометы был равен 4.0″. С какой средней пространственной скоростью относительно Земли двигалась комета за этот период?**

! Находим расстояния от Земли до кометы в указанные моменты времени:

$$D_{1,2} = R / \sin p_{1,2}$$

Здесь R – радиус Земли, $p_{1,2}$ – параллаксы кометы в оба момента времени. Учитывая малость углов параллакса, их синусы можно заменить значениями самих углов в радианах. Мы получаем расстояние 0.73 а.е. для 17 января и 2.20 а.е. для 18 марта. Промежуток времени T между этими моментами составляет 61 день. Так как нас интересует средняя скорость движения кометы относительно Земли, а указанный промежуток времени существенно меньше одного года, будем считать путь кометы прямой линией. Учтем, что 17 января комета приблизилась к Земле на минимальное расстояние, то есть ее геоцентрическая траектория была перпендикулярна направлению на Землю. Средняя геоцентрическая скорость кометы равна

$$v = \frac{L}{T} = \frac{\sqrt{D_2^2 - D_1^2}}{T} = 59\ \text{км/с}.$$



IX.6 ЗВЕЗДНЫЕ ВОЙНЫ

М.И. Волобуева

? Желая внушить страх сторонникам Сопротивления, Новый Орден, преемник Галактической Империи, с помощью базы «Старкиллер» уничтожил планетную систему Хосниан, в которой располагалась столица Новой Республики Хосниан-Прайм. Получившаяся вспышка была настолько яркой, что была видна на планетах других систем даже днем. Например, на Токадане взрыв самой маленькой из планет выглядел как вспышка с блеском -8^m. Найдите суммарную видимую звездную величину вспышки на Токадане, если известно, что в системе Хосниан было четыре планеты с одинаковыми плотностями, а их радиусы соотносились как 1:2:3:4. Считать, что мощность взрыва пропорциональна массе планеты, а его длительность на всех планетах одинакова.

! Плотности планет равны, значит отношение масс планет равно отношению кубов их радиусов. Мощность взрыва самой маленькой из планет меньше суммарной мощности взрыва всей системы в

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)/1^3 = 100 \text{ раз.}$$

Так как расстояния между взорвавшимися планетами гораздо меньше расстояния до других планетных систем, то можно считать, что все планеты находятся на одинаковом расстоянии от Токадана, и суммарная вспышка будет там также в 100 раз ярче, чем взрыв наименьшей из планет. Разница в блеске в 100 раз соответствует пяти звездным величинам. В итоге получаем:

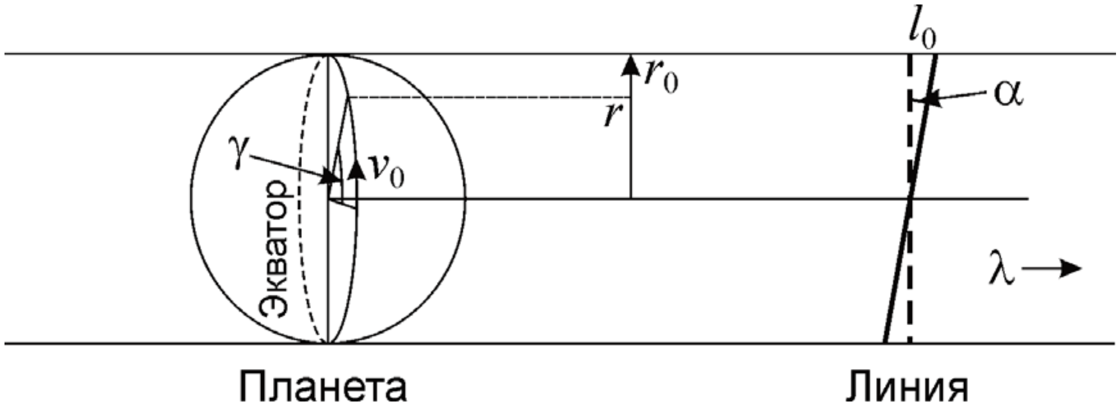
$$m = -8^m - 5^m = -13^m.$$

10 класс

X/XI.3 НАКЛОННАЯ ЛИНИЯ

О.С. Угольников

? С помощью системы из телескопа и спектрографа с фокусным расстоянием 5 м и разрешением (масштабом) 10 Å/мм получен спектр некоторой планеты. Наблюдатель находится в плоскости экватора планеты, щель спектрографа ориентирована вдоль этой же плоскости. Атмосферные линии в спектре планеты оказались наклоненными на угол 5° по отношению к линиям лабораторного источника света. Найдите расстояние до планеты, если ее период обращения вокруг своей оси равен 10 часам. Наблюдения проводятся в спектральной области около длины волны 5500 Å.



! Разрешение спектрографа ρ есть отношение разности длин волн двух соседних спектральных линий к расстоянию между этими линиями в наблюдаемом спектре. Для прибора, описанного в условии задачи, эта величина составляет:

$$\rho = \frac{\Delta\lambda}{\Delta l} = 10^{-6}.$$

Спектральная линия, которая наблюдается с этим прибором, есть изображение щели спектрографа в данной длине волны, в которой объект темнее (для линии поглощения) или светлее (для линии излучения), чем в окружающей спектральной области. По условию задачи, щель спектрографа параллельна экватору планеты.

Пусть планета создает в фокальной плоскости прибора изображение с экваториальным радиусом r_0. Тогда за счет вращения планеты вид спектральной линии будет искажен, но она останется прямой. Это легко показать: возьмем точку экватора с долготой γ относительно меридиана, повернутого к Земле. При наблюдении с Земли она будет отстоять от центра диска на угловое расстояние

$$r = r_0 \sin\gamma,$$

а ее лучевая скорость будет равна

$$v = v_0 \sin\gamma = v_0 \frac{r}{r_0}.$$

Смещение соответствующего участка спектральной линии составит

$$\Delta l = \frac{\Delta\lambda}{\rho} = \frac{v\lambda}{c\rho} = \frac{v_0\lambda}{c\rho} \cdot \frac{r}{r_0} = \alpha \cdot r.$$

Здесь c – скорость света, λ – длина волны спектрального диапазона, в котором проводятся наблюдения. Линия остается прямой, но наклоняется на угол α, выраженный в последней формуле в радианах (мы учитываем, что этот угол невелик). Теперь мы можем выразить величину линейной скорости на экваторе планеты:

$$v_0 = \frac{c\rho r_0\alpha}{\lambda} = \frac{2\pi R}{T}.$$

Здесь R – пространственный экваториальный радиус планеты, а T – период ее осевого вращения. Видимый радиус планеты b равен r_0/F, где F – эффективное фокусное расстояние оптической системы. Расстояние до планеты равно

$$D = \frac{R}{b} = \frac{R}{r_0 / F} = \frac{RF}{r_0} = \frac{v_0 T}{2\pi} \cdot F \cdot \frac{c\rho\alpha}{v_0 \lambda} = \frac{FTc\rho\alpha}{2\pi\lambda}.$$

Подставляя численные данные, получаем расстояние в 1.35 млрд км или 9 а.е.

X/XI.4 ЦЕПОЧКА НА ОРБИТЕ

О.С. Угольников

? На одну и ту же околосолнечную орбиту с небольшим эксцентриситетом *e* было запущено 10000 одинаковых спутников – больших гладких металлических шаров, с интервалом 1/10000 орбитального периода *T*. С одного спутника ведутся измерения видимой звездной величины соседнего спутника. С каким периодом и какой амплитудой (разницей максимума и минимума) будет меняться эта звездная величина? Гравитационное взаимодействие шаров друг с другом и с планетами не учитывать.

! Количество шаров достаточно велико, и участок орбиты между двумя соседними шарами можно считать прямой линией. Расстояние между шарами равно $d=vt$, где v – скорость шаров (которую можно считать одинаковой), а t – временной интервал между моментами запуска соседних спутников (или интервал между моментами прохождения ими какой-то фиксированной точки орбиты). Это время равно T/10000. Для расстояния от Солнца r скорость равна

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Металлические шары отражают свет равномерно во все стороны. В этом случае яркость одного шара при наблюдении с соседнего шара будет обратно пропорциональна квадрату их расстояния от Солнца и квадрату расстояния между ними:

$$J = \frac{const}{d^2 r^2} = \frac{const}{v^2 r^2} = \frac{const}{GMr^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \frac{const}{2x - x^2}; \quad x = \frac{r}{a}.$$

Величина x изменяется от $(1-e)$ до $(1+e)$. Можно сделать вывод, что вблизи перигелия и афелия яркость соседнего спутника будет одинаковой: меньшее расстояние от Солнца будет компенсировано большим расстоянием между соседними спутниками и наоборот. Данный вывод можно получить и из II закона Кеплера. Между перигелием и афелием яркость будет уменьшаться. Так как эксцентриситет орбит небольшой, минимум будет достигаться примерно посередине между этими точками. Период изменения видимой яркости соседнего спутника составит T/2. Чтобы определить амплитуду, запишем выражение для звездной величины соседнего спутника:

$$m = const - 2.5\lg J = m_0 + 2.5\lg(2x - x^2) = m_0 + 2.5\lg(1-(x-1)^2).$$

В перигелии ($x=1-e$) величина в скобках равна ($1-e^2$), такой же она будет и в афелии ($x=1+e$). Когда расстояние сравняется со средним ($x=1$), величина в скобках будет равна единице. В итоге, разность звездных величин будет равна

$$\Delta m = 2.5\lg(1-e^2) \approx 2.5e^2/\ln 10 = 1.08e^2.$$

Последние два равенства справедливы, если эксцентриситет орбит существенно меньше единицы.

X.5 ПОХОЖИЕ, НО РАЗНЫЕ ЗВЕЗДЫ

О.С. Угольников

? Две звезды имеют в небе Земли одинаковую звездную величину в полосе V, а в полосе B первая звезда ярче второй. У какой из этих двух звезд больше угловой диаметр? Межзвездным поглощением света пренебречь.

! По условию задачи, межзвездное поглощение для этих звезд несущественно и не сказывается на их цветовых характеристиках. Поэтому цвет звезд определяется только их эффективной температурой. В полосе V (желто-зеленой) видимый блеск звезд одинаков, а в полосе B (синей) первая звезда ярче второй. Следовательно, максимум излучения в спектре первой звезды приходится на меньшую длину волны, и температура первой звезды больше.

В отсутствие межзвездного поглощения видимая яркость звезды пропорциональна $R^2f(T)/D^2$, где R и T – радиус и температура звезды, D – расстояние до нее. Функция температуры $f(T)$ является возрастающей для любого спектрального интервала (для интегральной светимости эта функция есть четвертая степень температуры T^4). В полосе V яркости звезд одинаковы, следовательно, у второй звезды больше отношение R/D, то есть больше угловой радиус и диаметр.

X.6 СФЕРИЧЕСКАЯ АБЕРРАЦИЯ

Е.Н. Фадеев

? Определите радиус кружка сферической аберрации в фокусе сферического зеркала с диаметром *d* и фокусным расстоянием *f*, если далекий точечный источник света расположен на оптической оси зеркала. Фокус зеркального объектива находится посередине между центром кривизны и поверхностью зеркала. Если фокусное расстояние равно 1 м, то какого диаметра может быть зеркало, чтобы кружок сферической аберрации был меньше, чем дифракционный кружок на длине волны 550 нм?

! Рассмотрим луч, идущий вдоль оптической оси на расстоянии h от нее. Этот луч, отразившись от зеркала, пересечет оптическую ось на расстоянии x от центра кривизны. Пусть угол отражения равен α. Тогда

$$\sin\alpha = \frac{h}{2f}.$$

Обратим внимание, что угол между оптической осью зеркала и радиусом в точке касания также равен α. Воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{2f}{\sin(\pi - 2\alpha)}; \qquad x = 2f\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{f}{\cos\alpha} = f\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}.$$

Из этой формулы видно, что, чем дальше от оптической оси шел луч до отражения, тем дальше от фокуса он пересечет оптическую ось после отражения и, очевидно, тем дальше от оптической оси попадет на фокальную плоскость. Расстояние от точки пересечения оптической оси до фокуса составит

$$\delta = x - f = f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} - 1\right) \approx f\frac{\sin^2\alpha}{2}.$$

Полученная величина называется продольной сферической аберрацией. Продолжая свой путь, луч пересечет фокальную плоскость на расстоянии y от оптической оси. Поскольку δ и y – стороны прямоугольного треугольника,

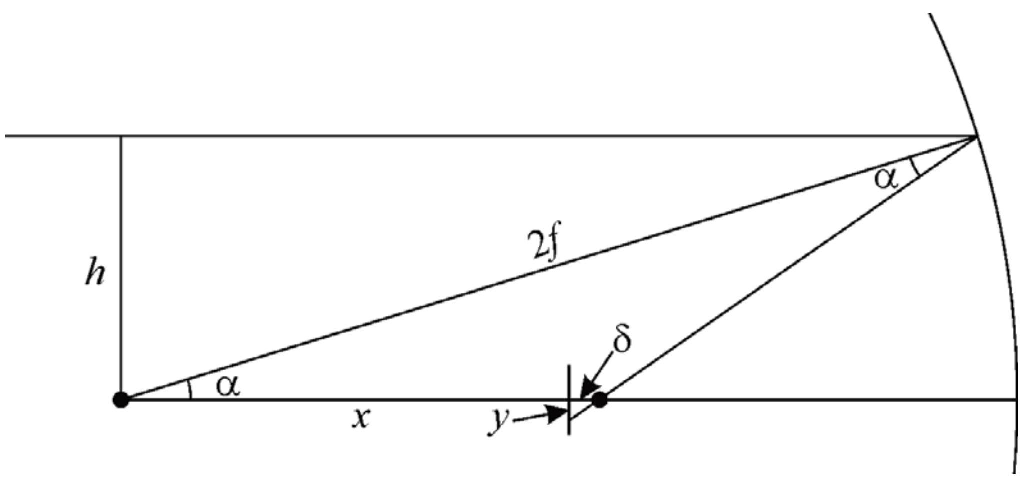
$$y = \delta \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = f\frac{\sin^2\alpha}{2}\cdot\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = f\frac{\sin^3\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}.$$

Учтем, что угол α мал:

$$y = f\sin^3\alpha = \frac{h^3}{8f^2}.$$

Самое большое отклонение претерпит луч, попадающий на край зеркала, т.е. при $h = d/2$:

$$y_0 = f\sin^3\alpha = \frac{d^3}{64f^2}.$$



Эта величина, являющаяся радиусом кружка рассеяния, называется поперечной сферической аберрацией.

В то же время, точечный источник из-за дифракции будет виден в виде кружка (кружка Эйри) с угловым радиусом $\varphi = 1.22\ \lambda/d$. Таким образом, в фокальной плоскости получится кружок размером

$$r_d = f\varphi = 1.22\frac{f\lambda}{d}.$$

Чтобы кружок сферической аберрации был меньше дифракционного, должно выполняться условие:

$$1.22\frac{f\lambda}{d} > \frac{d^3}{64f^2}.$$

Отсюда имеем:

$$d < (1.22\cdot 64\cdot f^3\cdot\lambda)^{1/4}.$$

Для фокусного расстояния 1 м и длины волны 550 нм диаметр объектива должен быть не более 8 см.

11 класс

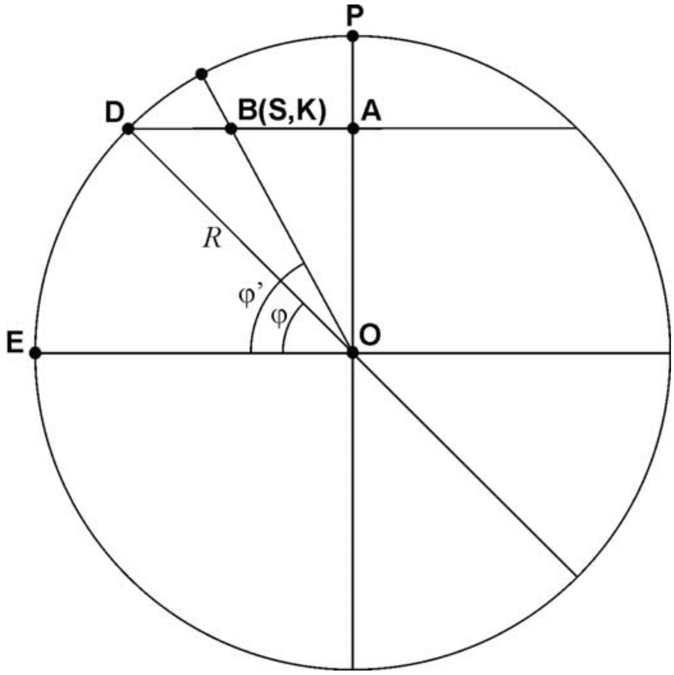
XI.1 ТРАНССИЙСКИЙ ПЕРЕЛЕТ

Е.Н. Фадеев

? Самолет вылетел из Симферополя в $03^ч45^м$ местного (среднего солнечного) времени в день летнего солнцестояния и направился с постоянной скоростью кратчайшим путем в Курильск, куда прибыл в $20^ч15^м$ местного времени того же дня. На какой высоте над горизонтом пассажиры могли видеть Солнце в середине полета, если он происходил на высоте 10 км? Широта и долгота Симферополя равны 45° с.ш., 34° в.д.; Курильска – 45° с.ш., 148° в.д. Атмосферной рефракцией и уравнением времени пренебречь. Считать Землю шаром.

! Симферополь и Курильск находятся на одной параллели. Однако кратчайшим расстоянием на сфере будет дуга большого круга, а не дуга параллели. Поскольку события разворачиваются в северном полушарии, после вылета самолет начнет отклоняться к северу от той параллели, с которой он стартовал и максимально приблизится к северному полюсу в середине полета. Поскольку разность долгот Курильска и Симферополя $\Delta\lambda = 114°$, то в середине полета самолет будет иметь долготу 91° в.д.

Изобразим проекцию земного шара на плоскость меридиана 91° в.д. Обратим внимание, что вследствие равенства широт Симферополя и Курильска траектория самолета будет симметричной относительно данного меридиана и перпенди-



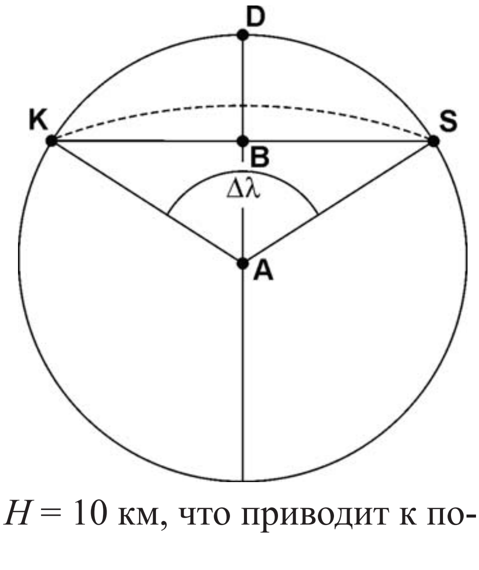
кулярной ему. В настоящей проекции траектория будет выглядеть как короткий отрезок прямой, проходящей через центр окружности **O**. Проекция Симферополя и Курильска на плоскость рисунка попадут в одну и ту же точку **B**. Она будет отстоять от горизонтальной линии на то же расстояние, что и точка **D**, имеющая ту же широту φ (45° с.ш.) и долготу 91° в.д.

Обозначим радиус земного шара как R. Тогда длина отрезка **AO** равна $R\sin\varphi$, а длина отрезка **DA** – $R\cos\varphi$. Изобразим теперь плоскость параллели 45° (рисунок внизу). Еще раз укажем, что полет самолета происходит не в этой плоскости, его проекция показана пунктирной линией. Мы видим, что длина отрезка **AB** равна $R\cos\varphi\cos(\Delta\lambda/2)$. Возвращаясь к треугольнику **ABO** на первом рисунке, мы можем записать:

$$\mathrm{tg}\varphi' = \frac{\mathbf{AO}}{\mathbf{AB}} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi\cos(\Delta\lambda/2)} = \frac{\mathrm{tg}\varphi}{\cos(\Delta\lambda/2)}.$$

Отсюда мы получаем значение широты $\varphi' = +61.5°$. Самолет в середине полета находился на 16.5° севернее точек взлета и посадки.

Мы можем обратить внимание, что взлет самолета произошел за $8^ч15^м$ до местного полудня в Симферополе, а сел он через $8^м15^м$ после местного полудня в Курильске. Можно сразу догадаться, что самолет пересек полуденную линию в середине своего полета. Действительно, можно определить Всемирное время взлета и посадки самолета:



$$UT_1 = T_1 - \lambda_1 = 01^ч29^м;$$
$$UT_2 = T_2 - \lambda_2 = 10^ч23^м.$$

Здесь T_1 и T_2 – моменты вылета и посадки по местному времени. Середина полета приходится на $05^ч56^м$ по Всемирному времени. На долготе 91° в.д. ($06^ч04^м$) местное время составит ровно 12 часов. Полуденная высота Солнца в день летнего солнцестояния там будет равна

$$h = 90° - \varphi + \varepsilon = 52°.$$

Можно также учесть, что самолет летит на высоте H = 10 км, что приводит к понижению видимого горизонта на угол

$$\Delta h = \arccos\frac{R}{R+H} = 3°.$$

Тогда высота Солнца над видимым горизонтом увеличится до 55°.

XI.2 ЭРА АЛЬДЕБАРАНА

О.С. Угольников

? В феврале 2015 года на Земле началась серия ежемесячных покрытий звезды Альдебаран (α Тельца) Луной. Каждое покрытие видно из разных областей Земли. Эклиптическая широта Альдебарана составляет –5.47°. Определите, до какого времени будет продолжаться эта серия. Орбиту Луны считать круговой.

! Модуль эклиптической широты Альдебарана немного превосходит величину наклона орбиты Луны к плоскости эклиптики i_0 (5.15°). Тем не менее, за счет угловых размеров Луны и ее суточного параллакса покрытия происходят в течение значительного периода времени, когда южная часть орбиты Луны (относительно эклиптики) располагается в том же направлении от Земли, что и Альдебаран. Рассчитаем минимальную (по модулю) геоцентрическую эклиптическую широту Луны, при которой может произойти покрытие.

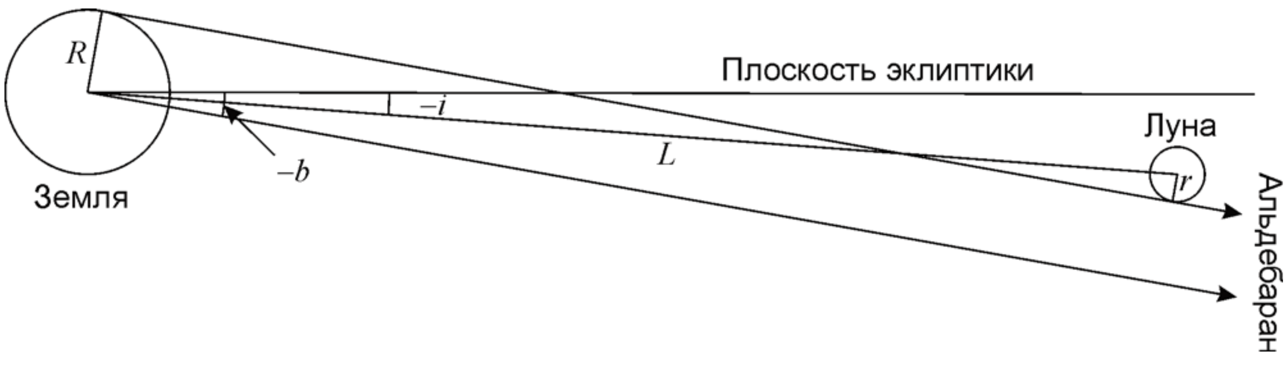
На рисунке изображен предельный случай, при котором покрытие видно в одной точке Земли. Обратим внимание, что эта точка располагается в северных широтах Земли. Обозначив эклиптическую широту Альдебарана через b, радиусы Земли и Луны – через R и r, расстояние между ними – через L, запишем выражение для минимальной эклиптической широты Луны, при которой возможно покрытие:

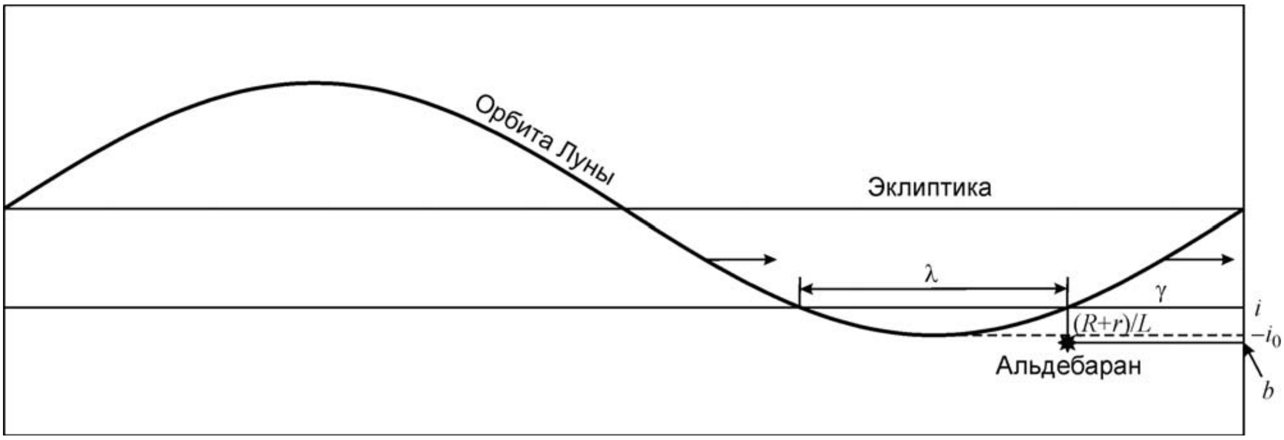
$$i = b + \arcsin\frac{R+r}{L} = -4.26^{\circ}.$$

Эта величина по модулю меньше наклона орбиты Луны i_0, поэтому покрытия Альдебарана наблюдаются на Земле. Рассмотрим орбиту Луны, как она расположена относительно эклиптики (рисунок справа). Углы i_0, i и b невелики, поэтому проекцию орбиты Луны на плоскость рисунка мы можем считать синусоидой. Покрытия Альдебарана возможны вблизи дуги орбиты длиной λ, равной

$$\lambda = 2\cdot(90^{\circ} - \gamma) = 2\cdot\left(90^{\circ} - \arcsin\left|\frac{i}{i_0}\right|\right) = 2\arccos\left|\frac{i}{i_0}\right| = 68^{\circ}.$$

Орбита Луны прецессирует (стрелка на рисунке), завершая полный круг за время T, равное 18.6 годам. Определим, за какое время она преодолеет угловой путь λ:





$$t = T\frac{\lambda}{360^{\circ}} = 3.5 \text{ года.}$$

Получается, что серия покрытий должна продолжаться до августа 2018 года. Этот ответ близок к истине: на самом деле, последнее покрытие Альдебарана в данной серии состоится 3 сентября 2018 года.

XI.5 СВЕРХНОВАЯ ЗВЕЗДА

О.С. Угольников

? В далекой галактике с красным смещением 0.1 вспыхнула сверхновая звезда. Телескоп с каким диаметром объектива понадобится для ее визуальных наблюдений? Межзвездным поглощением света, атмосферными помехами и аберрациями оптики пренебречь.

! Лучевая скорость галактики *v* равна произведению скорости света и красного смещения $c \cdot z$. С другой стороны, она равна произведению постоянной Хаббла и расстояния до галактики $H \cdot r$. Отсюда определим расстояние:

$$r = \frac{c \cdot z}{H} = 4.4 \cdot 10^{8} \text{ пк.}$$

Здесь *c* – скорость света, *z* – красное смещение галактики, *H* – постоянная Хаббла. Ввиду того, что красное смещение галактики невелико, мы можем не учитывать космологические эффекты, уменьшающие видимую яркость светил. Яркость Сверхновой звезды зависит от ее типа, будем считать ее абсолютную звездную величину *M* равной -18^{m}. Определим ее видимую звездную величину:

$$m = M - 5 + 5 \lg r = +20.$$

Для визуальных наблюдений такой звезды при идеальных условиях необходим телескоп с диаметром объектива

$$D = d \cdot 10^{0.2(m-m_0)} \approx 4 \text{ м.}$$

Здесь *d* – диаметр зрачка человеческого глаза (6 мм), m_0 – предельная звездная величина для невооруженного глаза (6^{m}).

XI.6 КОСМИЧЕСКИЙ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТР

Е.Н. Фадеев

? **Наземный радиотелескоп, расположенный на экваторе, и орбитальный радиотелескоп, размещенный на спутнике Земли, проводят совместный радиоинтерферометрический сеанс наблюдения за далеким источником, также находящимся в экваториальной плоскости. В начале наблюдений для наземного телескопа источник находился в зените, а спутник – в 30° к западу от зенита. Орбита спутника лежит в плоскости экватора, ее радиус 16000 км, направление движения совпадает с направлением осевого вращения Земли. Определите:**

1. максимальную продолжительность сеанса, начиная с текущего момента;

2. величину минимальной проекции базы интерферометра (линии, соединяющей телескопы) на плоскость, перпендикулярную направлению на источник.

Учесть, что видимость спутника из точки расположения наземного телескопа не является обязательной для проведения сеанса.

! Продолжительность сеанса ограничена временем видимости объекта. Для наземного наблюдателя источник зайдет за горизонт спустя примерно четверть суток или 6 часов после описанного в условии момента. Через некоторое время Земля закроет исследуемый источник и от спутника. Определим длину дуги, которую пройдет космический телескоп, прежде чем попадет в "тень" Земли. Рассмотрим треугольник "центр Земли – антенна – спутник". Найдем в нем величину угла при спутнике, воспользовавшись теоремой синусов:

$$\sin\alpha = \sin(\pi - z)\frac{R}{r}.$$

Здесь z – зенитное расстояние спутника в момент начала сеанса, R и r – экваториальный радиус Земли и радиус орбиты спутника соответственно. Угол α составляет 11.5°. Спутник находится к западу от направления на источник и вращается в ту же сторону, что и Земля вокруг своей оси – на восток. Ему осталось дойти до направления "центр Земли – источник" дугу, равную

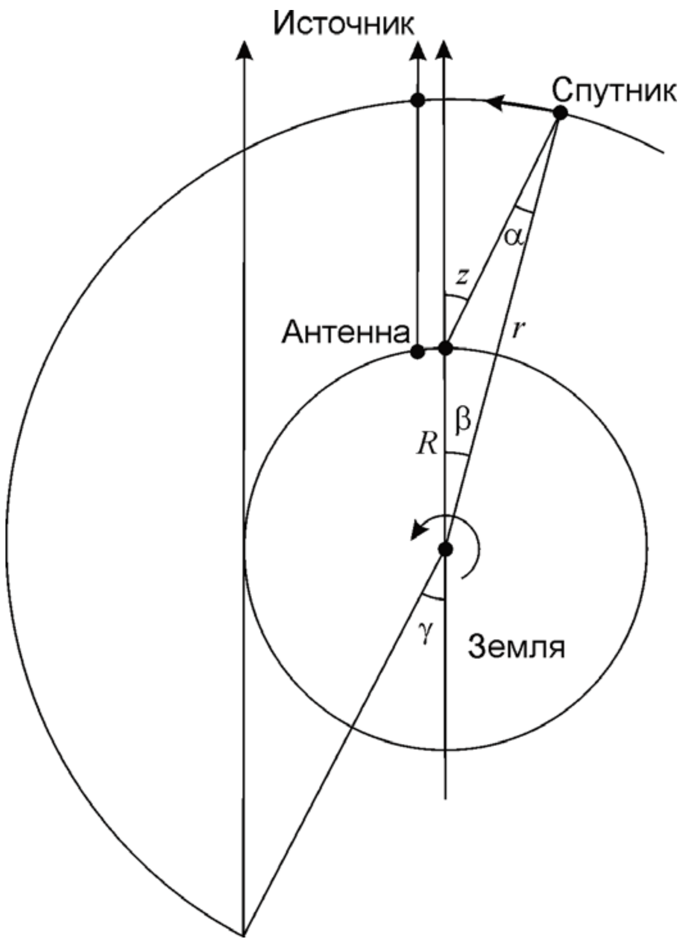
$$\beta = 180° - (180° - z) - \alpha = z - \alpha = 18.5° .$$

Половина тени Земли (области невидимости источника с орбиты спутника) занимает дугу

$$\gamma = \arcsin\frac{R}{r} = 23.5^\circ.$$

Период обращения спутника можно узнать из III-го закона Кеплера, сравнив спутник, например, с Луной:

$$T = T_L \left(\frac{r}{r_L} \right)^{3/2} = 0.232 \text{ сут } = 5.6 \text{ ч.}$$



Источник для спутника будет доступен в течении времени

$$t = T\,\frac{180^{\circ} + \beta - \gamma}{360^{\circ}} = 2.7 \text{ ч.}$$

Мы получили ответ на первый вопрос задачи. Чтобы ответить на второй вопрос, обратим внимание, что спутник "догоняет" наземную антенну в своем орбитальном вращении – его период меньше звездных суток S. В некоторый момент времени спутник пройдет между источником и антенной. Тогда проекция линии, соединяющей наземную антенну и спутник (базы), на плоскость, перпендикулярную направлению на источник, достигнет минимального значения – нуля. Можно убедиться, что это произойдет достаточно скоро, задолго до окончания сеанса. Учитывая небольшое значение угла β, будем считать движение спутника и наземного телескопа на этом коротком интервале прямолинейными. Вначале спутник отстает от антенны на расстояние $\beta\, r$. Он ликвидирует это отставание за время

$$\tau = \frac{\beta\, r}{v - V} = \frac{\beta\, r}{\omega r - \Omega R} = \beta\, r \cdot \left(\frac{360^{\circ}\, r}{T} - \frac{360^{\circ}\, R}{S} \right)^{-1} = 18 \text{ мин.}$$

Здесь v и V – линейные скорости спутника и антенны, ω и Ω – их угловые скорости. Полученный интервал значительно короче продолжительности сеанса.