XXIV Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Смоленск, 2017 г.

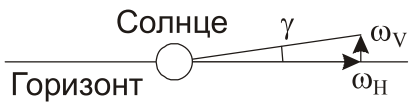
Теоретический тур

IX.1 СЕВЕРНЫЙ ЭКСПРЕСС

О.С. Угольников

Условие. Поезд движется точно на север. При наблюдении из этого поезда в момент пересечения Северного полярного круга Солнце появилось в точке севера и стало восходить, двигаясь под углом 5 градусов к горизонту. Определить скорость поезда. Рельефом Земли, рефракцией и угловыми размерами Солнца пренебречь.

Решение. Если в момент пересечения Северного полярного круга Солнце оказалось в точке севера, значит, дело происходило вблизи летнего солнцестояния, и склонение Солнца было равно ε=23.4°. Если бы наблюдатель на Земле был неподвижным, движение Солнца в этот момент происходило бы вдоль горизонта с угловой скоростью



$$\omega_H = \frac{2\pi \cos\varepsilon}{T} = 13.8^{\circ}/\text{ч}.$$

Здесь T – продолжительность солнечных суток. Движение поезда со скоростью v на север, в направлении восходящего Солнца, приводит к появлению вертикальной компоненты

$$\omega_V = \omega_H \operatorname{tg}\gamma = \frac{v}{R} = 1.2^{\circ}/\text{ч}.$$

Здесь R – радиус Земли. Отсюда мы получаем выражение для скорости поезда:

$$v = \frac{2\pi R \cos\varepsilon \cdot \operatorname{tg}\gamma}{T} = 135 \text{ км/ч}.$$

Система оценивания (от одного члена жюри). Решение задания разделяется на три этапа:

1 этап: 4 балла.

Выражение угловой скорости горизонтального перемещения Солнца или углового движения точки Земли с вокруг оси. Если при этом опускается множитель cos ε, и ответ слегка завышен, то оценка снижается на 1 балл (сумма за этап – 3 балла), дальнейшие вычисления оцениваются в полной мере.

2 этап: 2 балла.

Анализ вертикального перемещения Солнца, вычисление соответствующей угловой скорости.

3 этап: 2 балла.

Окончательное вычисление линейной скорости движения поезда.

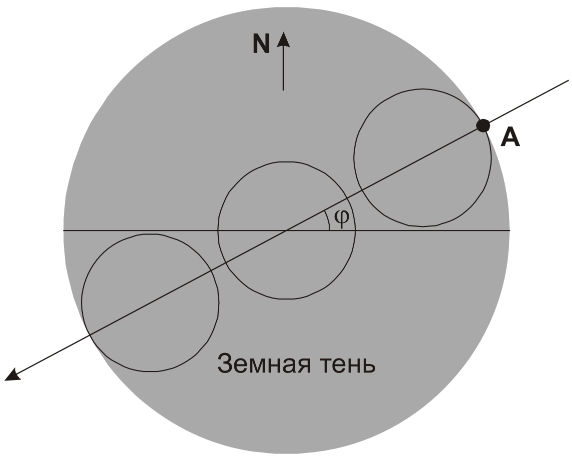
Вероятная ошибка при решении: участники могут предположить, что при учете вращения Земли сам поезд движется под углом 5° к параллели, что не соответствует действительности. Линейная скорость вращения Земли на полярном круге составляет 660 км/ч, и скорость поезда получается равной 58 км/ч. В подобном решении не оценивается первый этап (0 баллов из 4). За второй этап выставляется 1 балл из 2; третий этап засчитывается полностью в случае правильного математического выполнения с получением ответа 58 км/ч. Максимальная оценка за решение составляет 3 балла, она снижается в случае ошибок при выполнении.

IX.2 ТЕНЬ САХАРЫ НА ЛУНЕ

О.С. Угольников

Условие. На Земле наступило полное лунное затмение. В ходе его наблюдений в момент начала полной фазы ученые получили возможность исследовать состав атмосферы Земли над пустыней Сахара (28° с.ш., 10° в.д.), а в середине затмения центр видимого диска Луны совпал с центром земной тени. Определите примерную дату и всемирное время начала полного затмения. Было ли это затмение видно в России?

Решение. Изобразим путь Луны сквозь земную тень на небесной сфере так, чтобы верх рисунка соответствовал направлению на север – так, как это делается во всех астрономических справочниках. Тогда горизонтальное направление будет параллельно небесному и земному экватору.



Всю земную тень можно воспринимать как некое прямое изображение дневного полушария Земли (или зеркальное изображение ночного полушария), перенесенное на небесную сферу. Верхняя точка может не совпадать с северным полюсом (совпадение будет только в дни равноденствий), но боковые точки будут всегда соответствовать экватору.

В момент начала полной фазы солнечные лучи, идущие в тень Земли, проходили в земной атмосфере над точкой, соответствующей точке **A** края тени. Коль скоро она соответствует широте +28°, направление на точку **А** из центра тени должно образовывать с экватором угол, не меньший этой величины. Нам известно, что затмение было центральным. Максимальный угол между видимым путем Луны и экватором как раз близок к 28° (это сумма наклона экватора и наклона орбиты Луны к эклиптике). Этот угол достигается в равноденствия. Коль скоро Луна движется сквозь тень на юг, дело происходило вблизи весеннего равноденствия (сама Луна располагалась на небе около точки осеннего равноденствия).

Чтобы определить Всемирное время начала полной фазы учтем, что на точке Земли, соответствующей точке тени **А**, в этот момент наблюдался заход Солнца. Местное время T там составляло 18 часов. Обозначив долготу через λ и выразив ее в часовой мере, получаем выражение для Всемирного времени:

$$UT = T - \lambda = 17ч20м.$$

Затмение было видно на большей части территории России, где в это время ночь.

Система оценивания (от одного члена жюри). Решение задачи разбивается на четыре этапа, которые можно выполнять в разной последовательности:

1 этап: 3 балла.
Необходимо установить путь Луны через земную тень и указать, что дело происходило в весеннее равноденствие. Если при правильных рассуждениях участники олимпиады путают весеннее равноденствие с осенним, из этих 3 баллов выставляется только 1, но оставшееся решение оценивается в полной мере.
2 этап: 3 балла.
Необходимо сделать вывод, что в указанной точке Земли в момент начала затмения Солнце заходит за горизонт, либо другим способом верно описать положение полуденной или полуночной линии или терминатора на Земле. Если вместо вывода о заходе Солнца в Сахаре указывается восход Солнца, то вместо 3 баллов опять же выставляется только 1, при этом не оцениваются неверные выводы последнего этапа задания. Если указывается, что на Сахаре полночь, и Луна находится там в верхней кульминации, второй и третий этапы не оцениваются (0 баллов).
3 этап: 1 балл.
Определение Всемирного времени начала затмения. Один балл ставится только в случае правильного ответа.
4 этап: 1 балл.
Вывод о видимости затмения в России. Этот балл ***не выставляется***, если вывод о видимости делается без правильных обоснований, идущих из предыдущих этапов решения.

IX/X.3 ПЛАНЕТНОЕ ТРИО

О.С. Угольников

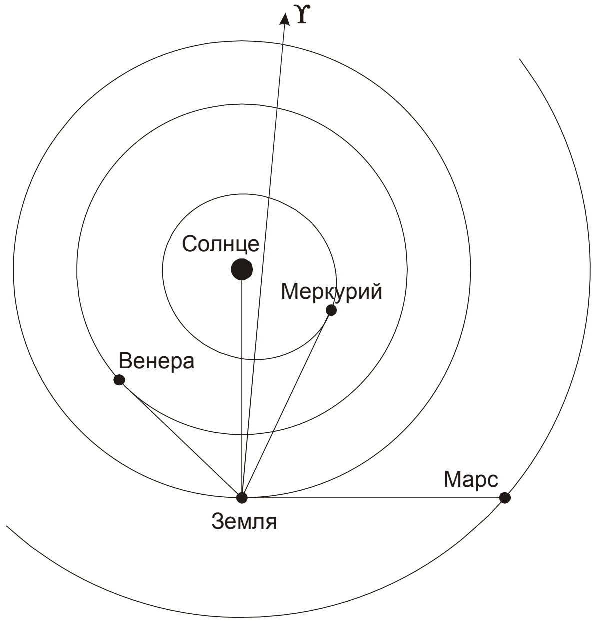
Условие. В таблице приведены экваториальные координаты Меркурия, Венеры и Марса на Земле в некоторый момент времени. Считая орбиту Марса круговой, определите его угловой диаметр в этот момент.

Планета	Прямое восхождение, α	Склонение, δ
Меркурий	22ч33.2м	–10° 27′
Венера	03ч06.0м	+20° 34′
Марс	18ч15.7м	–23° 32′

Решение. Казалось бы, задачу нельзя решить, не зная текущую конфигурацию Марса, зависящую от неизвестного положения Солнца. Однако мы можем подметить интересную особенность – внутренние планеты, Меркурий и Венера, располагаются необычно далеко друг от друга. Они находятся вблизи эклиптики по разные стороны от экватора, и угловое расстояние между ними можно найти по теореме Пифагора:

$$\lambda_{MV} = \sqrt{(\alpha_V - \alpha_M)^2 + (\delta_V - \delta_M)^2} = 75^O.$$

Здесь прямое восхождение Меркурия α_M уменьшено на 24 часа. Угловое расстояние между планетами равно сумме их максимальных элонгаций от Солнца: 28° для Меркурия и 47° для Венеры. Такое может быть, только если одновременно наступила наибольшая западная элонгация Меркурия (28°) и наибольшая восточная элонгация Венеры (47°). В этом случае мы можем найти положение Солнца на небе достаточно простым образом:



$$\alpha_0 = \alpha_M + \frac{28}{75}(\alpha_V - \alpha_M) = 0ч\,15м;$$

$$\delta_0 = \delta_M + \frac{28}{75}(\delta_V - \delta_M) = +0^O 45'.$$

Планеты не находятся точно на эклиптике, сделанные расчеты приближенные, поэтому положение Солнца также не попало точно на эклиптику. Главный вывод, который можно сделать по прямому восхождению Солнца – оно находится в 90° к востоку от Марса, и последний находится в западной квадратуре. Считая его орбиту круговой (орбита Земли тоже близка к окружности), определяем угловой диаметр планеты:

$$d = \frac{D}{\sqrt{a^2 - a_0^2}} = 4 \cdot 10^{-5}\ рад = 8''.$$

Здесь a и a_0 – радиусы орбит Марса и Земли, D – физический диаметр Марса.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 2 балла.
Определение углового расстояния между Меркурием и Венерой. Это можно делать как точно, так и приближенно, проецируя участок небесной сферы на плоскость.
2 этап: 2 балла.
Вывод о том, что Меркурий и Венера находятся в противоположных наибольших элонгациях.
3 этап: 1 балл.
Определение положения Солнца на небе (приближенно) в данный момент.
4 этап: 1 балл.
Вывод о квадратуре Марса либо вычисление его углового расстояния от Солнца.
5 этап: 2 балла.
Вычисление углового диаметра Марса.

Если участник сразу необоснованно пишет, что Марс располагается в квадратуре, то засчитаны могут быть только 4 и 5 этапы, и наибольшая оценка за все решение не может быть больше 3 баллов.

Возможный альтернативный подход к решению: участник олимпиады может определить диапазон возможных угловых расстояний Марса от Солнца, исходя из углового расстояния между Марсом и Меркурием, а потом провести такой же анализ, исходя из углового расстояния между Марсом и Венерой. Пересечение этих интервалов дает узкое множество возможных значений углового расстояния между Марсом и Солнцем около 90°. При условии верного выполнения такое решение засчитывается в полной мере.

Возможная ошибка при решении: максимальная элонгация Меркурия определяется в предположении его круговой орбиты и составляет 23°. Из этого делается вывод, что Меркурий и Венера не могут быть так далеко на небе друг от друга, и задание решения не имеет. В этом случае выставляется только 2 балла за первый этап решения.

IX.4 ЗВЕЗДА У ЗЕНИТА

О.С. Угольников

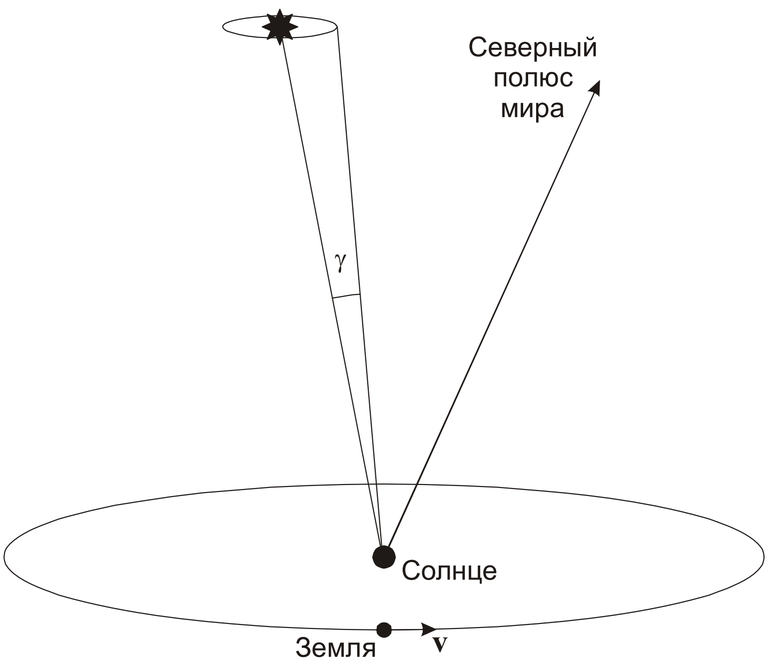
Условие. В начале XVIII века английский астроном Джеймс Бредли пытался определить параллакс звезды Этамин (γ Дракона) в обсерватории в Ванстеде, Лондон (51°34′40″ с.ш., 0°01′43″ в.д.). Параллакс он не обнаружил, но открыл явление аберрации света, вызванное движением Земли и конечностью скорости света. Тем самым Бредли доказал вращение Земли вокруг Солнца и существенно уточнил величину скорости света. В какой сезон и в какое местное (среднее солнечное) время эта звезда оказывалась ближе всего к зениту? Чему было равно минимальное зенитное расстояние звезды? Склонение звезды на эпоху наблюдений было равно +51°32′06″, прямое восхождение считать равным точно 18ч. Эксцентриситетом орбиты Земли, прецессией, уравнением времени, нутацией, параллаксом и собственным движением звезды пренебречь.

Решение. Аберрация света – явление отклонения положения звезды на небе, вызванное орбитальным движением Земли. Аберрационное смещение звезды направлено к точке неба, к которой движется Земля в настоящий момент. В общем случае (вообще говоря, не требующемся для решения данной задачи) величина аберрационного смещения в радианах равна

$$\gamma = v \sin\theta / c,$$

где v – орбитальная скорость Земли, c – скорость света, θ – угол между скоростью и направлением на звезду. Величина аберрации максимальная, когда движение нашей планеты происходит перпендикулярно направлению на звезду. Для указанной в условии задачи звезды Этамин близкая к этому ситуация наблюдается постоянно, так как эта звезда располагается недалеко от северного полюса эклиптики (прямое восхождение 18ч, склонение +66.6), угол θ всегда не меньше 75°, а его синус – не меньше 0.966. В этом случае звезда описывает на небе за год круг, а величина аберрации составляет

$$\gamma = v/c = 10^{-4} \text{ рад} \sim 20''.$$



Мы видим, что склонение звезды примерно на 2′ меньше широты обсерватории. Чтобы зенитное расстояние было минимальным, аберрационное смещение звезды должно быть направлено на север, вдоль меридиана. Это может быть, если Земля движется в направлении самой северной точки эклиптики – точки летнего солнцестояния, которая находится по другую сторону от полюса мира. Это имеет место около дня осеннего равноденствия 23 сентября. Минимальное зенитное расстояние звезды в этот день составляло

$$z = \varphi - \delta - \gamma = 2'14''.$$

Очевидно, это имело место в момент верхней кульминации звезды. В день осеннего равноденствия звездное время совпадает с местным, поэтому верхняя кульминация наступила в 18ч по местному времени.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 1 балл.
Правильное указание направления сдвига звезды за счет аберрации, описанное явно или следующее из решения.
2 этап: 1 балл.
Правильное указание величины аберрационного смещения звезды как известного, либо его получение на основе значения орбитальной скорости Земли.
3 этап: 2 балла.

Определение сезона, в который достигается минимум зенитного расстояния. Если в качестве момента указывается весеннее равноденствие или другой сезон, отличный от верного, оценка за 3 этап составляет 0 баллов.

4 этап: 2 балла.

Определение местного времени минимального зенитного расстояния. Если ошибка этой величины вызвана только неправильным выполнением 3 этапа, то 4 этап засчитывается полностью.

5 этап: 2 балла.

Нахождение минимального зенитного расстояния звезды.

Возможная ошибка при решении задачи: правильное определение величины аберрации, но ошибочное указание его направления (например, на 180° или на 90°, путая с явлением параллакса). В этом случае полностью не засчитывается первый этап (1 балл) и третий этап (2 балла) решения. Второй, четвертый и пятый этап засчитываются при условии их правильного выполнения (при этом значение местного времени будет иным). Максимальная оценка составляет 5 баллов.

Возможная ошибка при решении задачи: полное игнорирование явлением аберрации с вычислением минимального зенитного расстояния для заданных гелиоцентрических координат Земли (оно будет равно 2′34″). В этом случае засчитан может быть только пятый этап решения, оценка не может превышать 2 баллов при условии правильного выполнения.

IX.5 ВБЛИЗИ ДВОЙНОГО КАРЛИКА

М.И. Волобуева

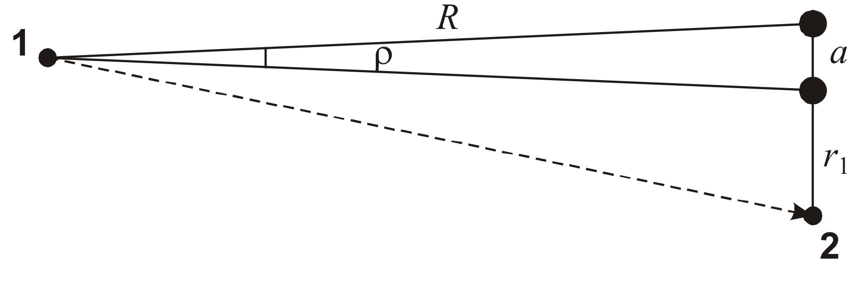
Условие. Штурман космического корабля наблюдает за двойной системой, состоящей их двух одинаковых белых карликов с массой каждого, равной массе Солнца, движущихся по круговой орбите с периодом 7.9 лет. В некоторый момент расстояние от корабля до обеих компонент системы было одинаковым, видимый блеск каждой из них был равен -1^m, а угловое расстояние между ними составляло 14′19.4″. Через некоторое время корабль, пролетая вблизи этой системы, оказался практически на одной линии со звездами на расстоянии 15 а.е. от ближайшей из них. Какую суммарную звездную величину будет иметь система в этот момент, если штурман видит обе звезды полностью?

Решение. Выражая массу компонент в массах Солнца, период в годах, а расстояние – в астрономических единицах, запишем III закон Кеплера и найдем расстояние между белыми карликами:

$$a = (T^2 \cdot (M_1 + M_2))^{1/3} = 5.0 \text{ а.е.}$$

В момент t_1, когда расстояние от корабля до обеих звезд одинаково, отрезок, соединяющий центры звезд, перпендикулярен лучу зрения. Отсюда получаем расстояние от каждой из компонент до корабля

$$R = a\ /\ \rho\ (\text{рад}) = 1200 \text{ а.е.}$$



Здесь ρ – угловое расстояние между звездами. В момент t_2, когда корабль оказался на одной линии со звездами, первая компонента оказалась ближе в 1200/15=80 раз, вторая – в 1200/(15+5)= 60 раз. Так как блеск обратно пропорционален квадрату расстояния, то суммарный блеск компонент в момент t_2 возрос в $60^2+80^2=10000$ раз по сравнению с блеском одиночной звезды в момент t_1, что соответствует разнице в 10^m. Таким образом, суммарный блеск системы в момент t_2 составит $-1^m - 10^m = -11^m$.

Система оценивания (от одного члена жюри). Решение задачи разбивается на несколько элементарных этапов, которые можно выполнять в разной последовательности.

1 этап: 2 балла.
Определение расстояния между двумя белыми карликами. Если при этом не учитывается их двойная масса (по сравнению с Солнцем), эти 2 балла не выставляются, но оставшаяся часть решения, несмотря на вытекающие ошибки, оценивается в полной мере.
2 этап: 1 балл.
Определение расстояния от звезд до корабля в первый момент времени.
3 этап: 2 балла.
Определение расстояния от корабля до каждой из звезд во второй момент времени (по 1 баллу за каждое). Данные величины могут не быть записаны в явном виде, но учитываться при вычислениях.
4 этап: 3 балла.
Нахождение звездной величины системы во второй момент времени. В случае ошибок, связанных с пренебрежением того, что в первый момент времени обе звезды светили как -1m каждая, оценка уменьшается на 1 балл.

IX/X.6 К НОВЫМ ГОРИЗОНТАМ

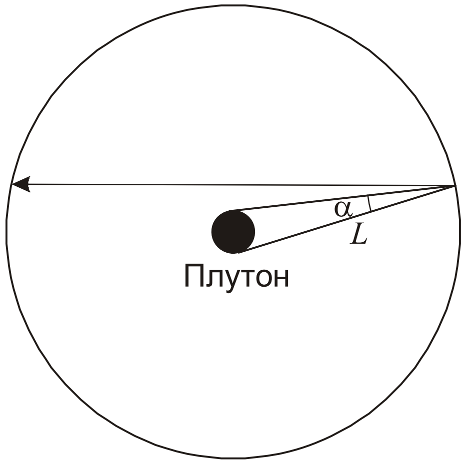
С.Г. Желтоухов

Условие. Когда межпланетная станция New Horizons пролетала около Плутона (радиус 1190 км) на расстоянии 33 а.е. от Солнца, угловой диаметр Плутона был больше одного градуса всего около 5 часов. В середине этого интервала угловой диаметр Плутона достиг 10°. Сможет ли эта межпланетная станция вылететь из Солнечной системы? Оцените, за какое время станция долетит до орбиты тела 2014 MU69, если радиус этой орбиты равен 44 астрономическим единицам. Орбиту этого тела можно считать круговой.

Решение. Определим расстояние L, с которого Плутон виден как диск с угловым диаметром α:

$$L = \frac{2R}{sin\alpha} = 135000 \text{ км.}$$

Если считать траекторию аппарата около Плутона прямой, проходящей вблизи Плутона (на это указывает большой угловой диаметр в середине интервала), а его скорость v – постоянной, то она будет равна $2L/t$ = 54000 км/ч или 15 км/с. Это существенно больше второй космической скорости даже на поверхности Плутона. Поэтому мы можем считать, что притяжение самого Плутона не оказало существенного влияния на скорость аппарата.



Сравним теперь полученную скорость (относительно Плутона) со скоростью движения по параболической орбите на таком расстоянии от Солнца a_1 (выраженном в астрономических единицах):

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{2}{a_1}} = 7.3\ км/с.$$

Здесь v_0 – круговая скорость на орбите Земли. Полученная скорость вдвое меньше скорости "Новых Горизонтов". Вне зависимости от направления движения относительно Плутона гелиоцентрическая скорость аппарата больше второй космической, и он может покинуть Солнечную систему.

Обратим внимание, что аппарат, имея столь высокую скорость, прилетел из внутренних областей Солнечной системы, с Земли. Следовательно, аппарат движется вблизи Плутона в направлении, близком к радиальному (от Солнца), перпендикулярно движению самого Плутона. Его гелиоцентрическая скорость мало отличается от плутоно-центрической и близка к v. Движение от Плутона к астероиду 2014 MU69 будет происходить по прямой линии с практически постоянной скоростью. Это займет время

$$t = \frac{a_2 - a_1}{v} = 3.5\ года.$$

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 2 балла.
Определение расстояния, с которого Плутон имеет заданные угловые размеры.
2 этап: 2 балла.
Определение скорости аппарата относительно Плутона. В случае ошибки в 2 раза, вызванной путаницей радиусов и диаметров, эти 2 балла не выставляются, но дальнейшее решение оценивается в полной мере. Предположение, что аппарат летел по хорде в случае правильного вычисления длины хорды оценивается в полной мере.
3 этап: 1 балл.
Вывод о том, что аппарат сможет покинуть Солнечную систему.
4 этап: 1 балл.
Вывод о радиальном направлении скорости аппарата. Если этот вывод не делается, то данный балл не выставляется даже при последующем верном решении.
5 этап: 2 балла.
Расчет времени перелета аппарата к астероиду 2014 MU69.

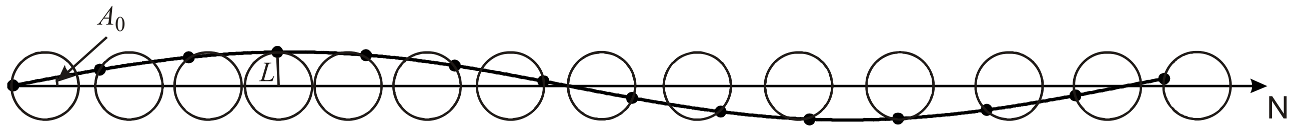
X.1 ПУТЕВОДНАЯ ЗВЕЗДА

О.С. Угольников

Условие. Океанский корабль движется в сторону севера, пересекая параллель +60° с.ш. Капитан корабля держит курс точно на Полярную звезду, забыв о том, что она не находится точно в Северном полюсе мира (склонение звезды на текущую эпоху +89°20′). Каково максимальное смещение корабля (в км) от прямолинейного курса (меридиана), если его скорость равна 30 км/ч? Считать, что оптические приборы на борту позволяют видеть Полярную звезду даже днем.

Решение. Полярная звезда не находится точно в Северном полюсе мира и описывает вокруг него суточный круг с радиусом ρ, равным 40′. Центр этого круга располагается на высоте φ=60°, на альмукантарате с длиной, вдвое меньшей горизонта (большого круга небесной сферы). Поэтому азимут Полярной звезды изменяется практически синусоидально с периодом в звездные сутки T и амплитудой A_0 (отклонением от севера) в $\rho/\cos\varphi = 80'$. В момент, когда азимут отличается от северного на эту величину, у скорости корабля появляется компонента, направленная вдоль параллели, и равная

$$v_P = v \sin A_0 = 0.70 \text{ км/ч.}$$



Здесь v – полная скорость корабля. Он идет по синусоиде, и этот путь можно представить как наложение прямолинейного и слегка неравномерного движения на север и вращения по кругу со скоростью v_P и периодом T. Максимальное отклонение корабля от курса есть радиус этого круга:

$$L = \frac{v_P T}{2\pi} = \frac{v \sin A_0 T}{2\pi} \approx \frac{v \rho T}{2\pi \cos\varphi} = 2.7 \text{ км.}$$

Система оценивания (от одного члена жюри).

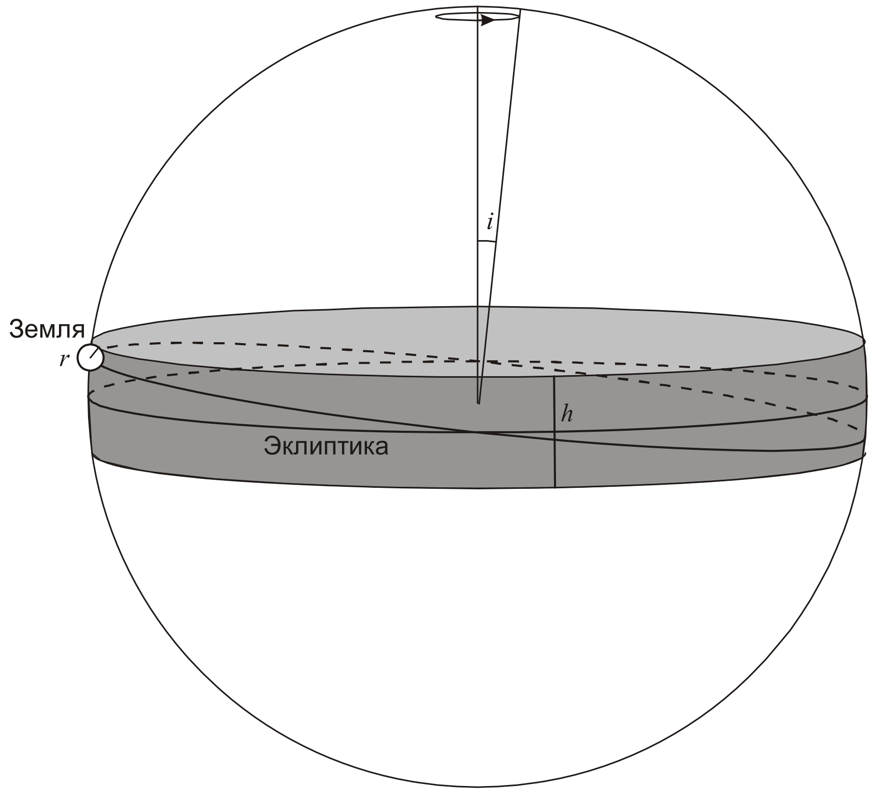
1 этап: 3 балла.
Определение максимального отклонения азимута Полярной звезды от направления на север. Это оценивается в 3 балла. Если при этом не учитывается фактор cos φ с итоговой ошибкой в 2 раза, данные 3 балла не выставляются, но оставшееся решение оценивается в полной мере.
2 этап: 2 балла.
Определение максимальной величины компоненты скорости корабля перпендикулярно меридиану.
3 этап: 3 балла.
Вычисление максимального отклонения от прямолинейного курса. Второй и третий этапы могут выполняться вместе без промежуточных численных выводов. Может использоваться как «модель круга», так и прямой анализ синусоидального движения.

X.2 ЛУННЫЙ ЗВЕЗДНЫЙ КАТАЛОГ

О.С. Угольников

Условие. На стационарной лунной обсерватории будущего проводится изучение атмосферы Земли на основе спектроскопии звезд у земного лимба. Для этой цели создан каталог звезд ярче 6^m, которые могут покрываться Землей при наблюдении из этой обсерватории. Оцените количество звезд в этом каталоге.

Решение. Перечислим все факторы, которые будут влиять на размер области неба, которая может быть покрыта Землей при наблюдении с лунной обсерватории. Земля имеет значительный угловой размер (максимально возможный радиус r около 1.02°) и движется относительно звезд вдоль линии пересечения небесной сферы и плоскости орбиты системы Земля-Луна. Ось этой линии наклонена на угол i (5.15°) к оси эклиптики и вращается вокруг нее с периодом 18.6 лет. Таким образом, Земля в своем движении заметает пояс вдоль эклиптики шириной



$$h = 2\,(i + r) \sim 12.3°.$$

Мы не учитываем здесь параллактический сдвиг Земли, зависящий от положения точки на Луне, так как за счет синхронного осевого вращения Луны этот сдвиг будет почти постоянным и приведет только к смещению серой области на рисунке как единого целого. Влияние лунных либраций будет исчисляться несколькими сотыми градуса, что можно не учитывать. Если лунная обсерватория установлена вдали от полюсов, то в разные моменты времени с нее будут доступны все участки области небесной сферы, которые могут быть покрыты Землей. Определим отношение площади данной области и всего неба:

$$\eta = \frac{2\pi R^2 h}{4\pi R^2} = \frac{h}{2} \approx 0.107.$$

Если считать, что 6000 звезд ярче 6^m распределены по небесной сфере равномерно (это можно делать, так как эклиптика образует большой угол с Млечным путем), то в данный каталог должно войти около 650 звезд.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 5 баллов.
Указание факторов, определяющих размер области неба, покрываемой Землей: прецессии плоскости орбиты системы Земля-Луна ($2i$ = 11.3°, 3 балла) и видимые размеры Земли ($2r$ = 2.0°, максимальные или средние, 2 балла). Не-учет фактора 2 на каждом из этапов уменьшает оценку на 1 балл. Если вместо угла (i+r) участники берут близкую величину либрации Луны по широте (около 7°), оценка уменьшается на 2 балла, так как на либрацию влияет также наклон оси вращения Луны к плоскости ее орбиты, а на покрытиях звезд он не сказывается. Если участники олимпиады дополнительно учитывают параллактическое смещение Земли за счет либраций (2*0.03°) – это не изменяет оценку, если же они берут полный параллакс (2*0.25°) – оценка уменьшается на 2 балла, так как при наблюдении из фиксированной точки Луны параллактическое смещение Земли практически постоянно. Неточности, допущенные на первом этапе, не являются основанием для снижения оценки на последующих этапах, если там не сделаны дополнительные ошибки.
2 этап: 2 балла.
Определение доли небесной сферы, где могут происходить покрытия. Эту долю участники могут считать как цилиндром, так и фрагментом сферы.
3 этап: 1 балл.
Определение числа звезд в каталоге. Необходимо принимать во внимание, что это лишь примерная оценка, участники могут брать несколько различающиеся значения общего числа ярких звезд на небе (5500-6500).

X.4 ЗВЕЗДА В ЗЕНИТЕ

О.С. Угольников

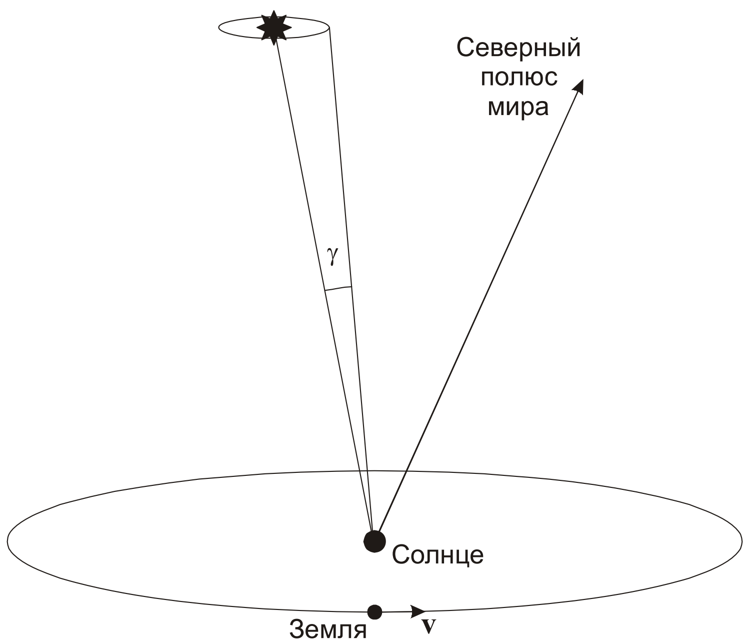
Условие. В какой сезон и в какое местное (среднее солнечное) время звезда Грумиум (ξ Дракона) может оказаться точно в зените в точке России с координатами 56°52′00″ с.ш., 30°00′00″ в.д.? Склонение звезды на эпоху 2017 года равно +56°52′13″, прямое восхождение считать равным точно 18ч. Эксцентриситетом орбиты Земли, уравнением времени, прецессией, нутацией, параллаксом и собственным движением звезды пренебречь.

Решение. Мы видим, что склонение звезды немного отличается от широты места наблюдения. Тем не менее, звезда может попасть в зенит, так как ее положение на небе смещается за счет аберрации света – явление, вызванного орбитальным движением Земли. Аберрационное смещение звезды направлено к точке неба, к которой движется Земля в настоящий момент. В общем случае (вообще говоря, не требующемся для решения данной задачи) величина аберрационного смещения в радианах равна

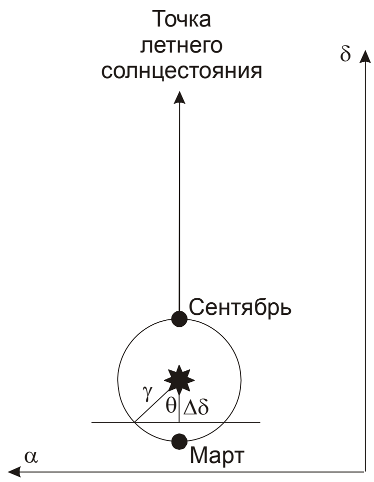
$$\gamma = v \sin\theta / c,$$

где v – орбитальная скорость Земли, c – скорость света, θ – угол между скоростью и направлением на звезду. Величина аберрации максимальна, когда движение нашей планеты происходит перпендикулярно направлению на звезду. Для указанной в условии задачи звезды Грумиум близкая к этому ситуация наблюдается постоянно, так как эта звезда располагается недалеко от северного полюса эклиптики (прямое восхождение 18ч, склонение +66.6°), угол θ всегда не меньше 80°, а его синус – не меньше 0.985. В этом случае звезда описывает на небе за год круг, а величина аберрации составляет

$$\gamma = v/c = 10^{-4} \text{ рад} \sim 20''.$$



В день осеннего равноденствия, когда орбитальная скорость Земли направлена вдоль плоскости меридиана в направлении точки летнего солнцестояния (рисунок), аберрационное смещение направлено на север. В день весеннего равноденствия видимое положение звезды смещается на юг. Склонение звезды на Δδ=13″ больше широты места наблюдения, и аберрация должна сместить ее на юг на эту величину.



Из рисунка видно, что условие задачи будет выполнено, если положение звезды на круге аберрации (и Земли на орбите) будет отстоять от положения, соответствующего весеннему равноденствию, на угол

$$\theta = \arccos\frac{\Delta\delta}{\gamma} \approx 50^{\circ} = 3\text{ч}20\text{м}.$$

Это происходит примерно за 51 день до и после весеннего равноденствия, то есть около 30 января и 10 мая. Если пренебречь уравнением времени, то звездное время в среднюю полночь S в эти дни равно 180 ± 50° или 12ч ± 3ч20м (январю соответствует знак "–", маю – знак "+"). Местное время верхней кульминации данной звезды в зените соответствует звездному времени, равному ее прямому восхождению α (его изменением за счет аберрации мы пренебрегаем) и равно

$$T = \alpha - S = 9м20м \text{ или } 2ч40м.$$

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 1 балл.
Указание аберрации света как причины изменения видимых экваториальных координат звезды.
2 этап: 1 балл.
Правильное указание величины аберрационного смещения звезды как известного, либо его получение на основе значения орбитальной скорости Земли.
3 этап: 2 балла.
Правильное указание направления сдвига звезды за счет аберрации в разные сезоны года, описанное явно или следующее из решения. Если направление отличается от правильного на значительный угол (90°, 180°), за 3 этап выставляется 0 баллов, но последующие этапы оцениваются в полной мере при условии их корректного выполнения.
4 этап: 2 балла.
Указание двух сезонов (каждый – по 1 баллу), в которые возможна кульминация звезды в зените. Учет изменения прямого восхождения звезды за счет аберрации на оценку не влияет.
5 этап: 2 балла.
Определение местного времени кульминации звезды в каждый из этих сезонов (по 1 баллу).

Возможная ошибка при решении: игнорирование явлением аберрации и вывод, что звезда в зенит не попадает. Оценка в этом случае составляет 1 балл.

X/XI.5 ОСКОЛКИ ЛУНЫ

Е.Н. Фадеев, О.С. Угольников

Условие. Враждебные инопланетяне разрушили Луну, превратив ее в огромное количество шарообразных осколков диаметром 10 м. Все эти тела стали двигаться, равномерно заполнив пространство вокруг Земли между сферами размером с перигей и апогей лунной орбиты. Оцените концентрацию этих осколков и звездную величину всей полусферы ночного неба на Земле. Влиянием земной атмосферы пренебречь. Считать все осколки одинаковыми, а их плотность и оптические свойства аналогичными самой Луне.

Решение. Ответим сначала на первый вопрос задачи. Пусть R – радиус Луны (1738 км), а r – радиус осколка (5 м). Объем Луны составляет $(4/3)\pi R^3$, Объем осколка – $(4/3)\pi r^3$. Поскольку объем всех осколков равен объему Луны, полное число этих тел равно

$$N = (R/r)^3 = 4.2\cdot10^{16}.$$

Пространство, заполненное осколками, представляет собой сферический слой со средним радиусом D (среднее расстояние от Земли до Луны) и толщиной $2De$ (e - эксцентриситет орбиты Луны), толщина существенно меньше радиуса. Объем этой области равен

$$V = 4\pi D^2\cdot 2De = 8\pi D^3 e = 7.8\cdot10^{16} \text{ км}^3.$$

Концентрация осколков $n=N/V$~0.55 км$^{-3}$. Если мы возьмем предельные значения расстояния Луны в перигее и апогее из справочных данных, то мы получим несколько большее значение объема ($9.2\cdot10^{16}$ км^3) и концентрации (0.45 км$^{-3}$).

Теперь нужно выяснить, какую яркость ночного неба будут создавать эти осколки. Казалось бы, мы можем достаточно просто решить эту задачу, определив яркость каждого осколка и умножив ее на число осколков видимых на небе. Луна и все осколки находятся на примерно одинаковом расстоянии от наблюдателя. Обозначив яркость Луны как J_0, получаем, что яркость одного осколка есть

$$j = Jr^2/R^2.$$

Из любой точки Земли будет видна примерно половина всех осколков. Их суммарная яркость составит

$$J = (N/2)\, j = JR/2r.$$

Соответствующая звездная величина будет равна

$$m = m_0 - 2.5 \lg (JR / 2r) = m_0 - 13.1.$$

Сам по себе этот ответ уже вызывает удивление: небо оказывается очень ярким. Действительно, среднюю звездную величину Луны можно взять для фазы, близкой к первой или последней четверти, а можно определить, зная ее сферическое альбедо A:

$$m_0 = M_0 - 2.5\lg\frac{\pi R^2 A}{4\pi D^2} = M_0 - 2.5\lg\frac{R^2 A}{4D^2} = M_0 + 16.1 = -10.6.$$

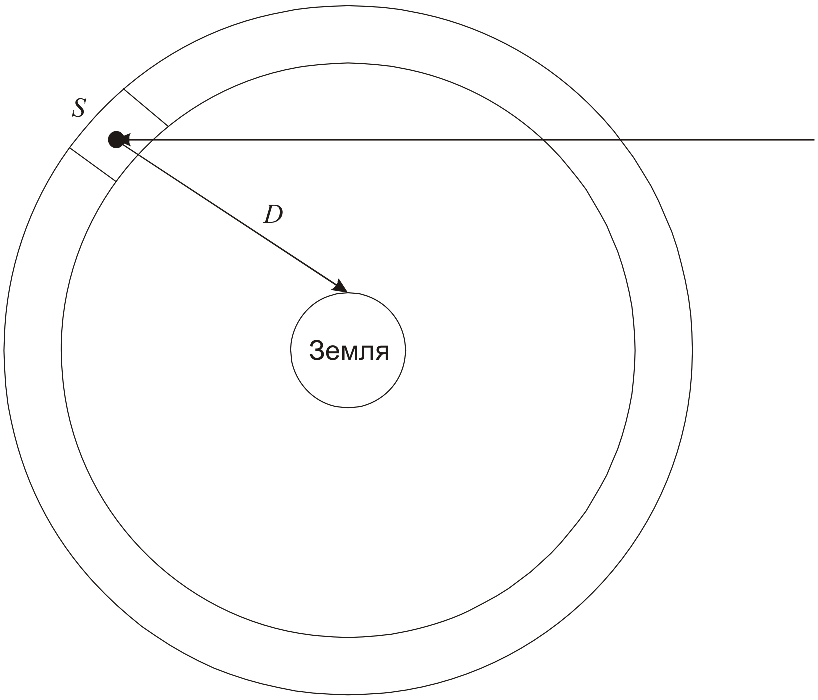
Выходит, что при сферическом альбедо 0.07 небо должно иметь величину -23.7^{m}, то есть всего на 3^{m} или в 16 раз слабее Солнца! Мысленно предположив большее альбедо (порядка единицы) и возможность наблюдения всей сферы из осколков, мы получим, что они светили бы ярче Солнца, чего не может быть (в реальности, даже при альбедо, равном единице, вся равномерно рассеивающая сфера не может светить ярче 1/4 от яркости Солнца).

Причина противоречия в том, что мы не учли высокую оптическую плотность слоя осколков. Умножим площадь, на которой осколок задерживает излучение (πr^2) на число осколков (R^3/r^3), и разделим это на площадь всей сферы:

$$\tau = \frac{\pi r^2 R^3}{r^3 4\pi D^2} = \frac{R^3}{4rD^2} = 1.8.$$

Полученная величина есть среднее количество осколков на пути луча, идущего перпендикулярно к слою (фактически, его оптическая толщина). Даже в этом случае осколки будут в заметной степени затенять друг друга. С другой стороны, коль скоро это число порядка единицы, значительное число света будет рассеиваться осколками и попадать к наблюдателю.

Точный расчет яркости сферы представляет собой достаточно сложную задачу, однако это можно сделать приближенно. Приведем один из наиболее простых и при этом эффективных способов. Рассмотрим одну из возможных траекторий луча света от Солнца к какому-либо осколку и далее к Земле.



Путь луча до осколка может быть разным, он может проходить через слой один или два раза с существенно разной длиной. Так как нас интересует полная яркость небесной полусферы, будем считать, что каждый равный элемент площади сферы S рассеивает одинаковое количество солнечного излучения. Будем считать, что вся солнечная энергия, попадающая на сферу, задерживается или рассеивается в ней (оптическая толщина по диаметру не менее 3.6, по хорде – еще больше). Сфера площадью $4\pi D^2$ за единицу времени задерживает $\pi D^2 \cdot J_0$ солнечной энергии (J_0 – плотность потока солнечного излучения на расстоянии Земли). 7% этой энергии рассеивается в окружающее пространство. Плотность потока энергии от элемента сферы с площадью S на Земле будет равна

$$j_S = J_0 \pi D^2 \frac{S}{4\pi D^2} \cdot \frac{A}{4\pi D^2} \cdot e^{-\tau/2}.$$

Последний множитель выражает ослабление излучения в сфере уже после рассеяния, средний путь через сферу при этом равен половине ее толщины. Суммируя все элементы с площадью S по полусфере, получаем общую плотность потока излучения от нее на Земле:

$$j = j_S \cdot \frac{2\pi D^2}{S} = J_0 \frac{A}{8} e^{-\tau/2}.$$

Переведем это в звездные величины:

$$m = M_0 - 2.5\lg\left(\frac{A}{8} e^{-\tau/2}\right) = M_0 - 2.5\lg\left(\frac{A}{8}\right) + \frac{1.08\tau}{2} = M_0 + 6.1 = -20.7.$$

Несмотря на большую оптическую плотность сферы, небо все равно остается достаточно ярким. Конечно, здесь мы не учли, что эта яркость будет существенно меньше в областях неба вдали от Солнца, но и там засветка останется значительной. Если говорить об астрономических наблюдениях, то они будут затруднены также тем, что сфера будет блокировать излучение далеких объектов.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 2 балла.
Определение концентрации осколков в слое.
2 этап: 1 балл.
Указание, что осколки будут затенять свет Солнца друг от друга, а также накладываться друг на друга при наблюдении с Земли.
3 этап: 3 балла.
Создание модели расчета звездной величины неба в условиях взаимного затенения осколков. Модель может отличаться от предложенной выше, оценка определяется ее адекватностью.
4 этап: 2 балла.
Расчет звездной величины неба.

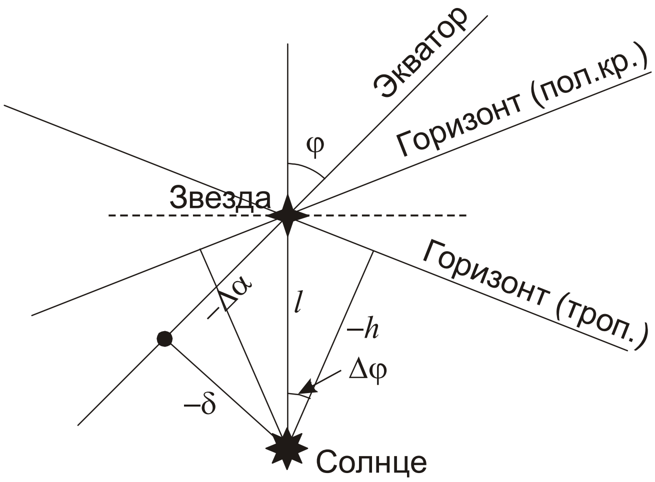
Вероятная ошибка при решении: Расчет звездной величины одного осколка, за которым следует прямой переход ко всей небесной полусфере с известным числом осколков, без учета эффекта затенения. В этом случае может быть выставлено 2 балла за первый этап и 2 балла за четвертый этап, с максимальной суммарной оценкой 4 балла. Если при этом не учитывается эффект фазы, и все осколки считаются полностью освещенными (с итоговым ответом около -25.8^m), то общая оценка уменьшается до (2+1)=3 баллов.

XI.1 ГЕЛИАКИЧЕСКИЙ ВОСХОД

О.С. Угольников

Условие. Гелиакическим восходом звезды называется ее восход на фоне утренней зари, при котором она впервые становится видимой после эпохи соединения с Солнцем. Известно, что у некоторой звезды на небесном экваторе гелиакический восход в двух пунктах на одном меридиане на северном тропике и северном полярном круге произошел одновременно. Определите прямое восхождение этой звезды. Считать, что звезда становится видимой на фоне зари при погружении Солнца под горизонт на 12°. Атмосферной рефракцией и поглощением света пренебречь.

Решение. Коль скоро звезда находится на небесном экваторе, ее восход будет происходить в точке востока. Изобразим звезду, Солнце и линии горизонта для обеих широт.



Горизонтальная пунктирная линия – биссектриса линий горизонта для двух указанных в условии широт. Она сама является горизонтом для широты φ=45° – среднего арифметического этих широт. Вертикальная линия направлена в зенит этой широты, и небесный экватор образует угол φ с этой линией. Модуль разницы между величинами каждой из широт и средней широтой φ есть Δφ (21.6°). Звезда находится в точке востока, на горизонте обеих широт, а Солнце располагается на высоте $-h=-12°$ на этих широтах, то есть равноудалено от линий горизонта. Следовательно, оно находится на вертикальной линии, ниже звезды. Отсюда мы можем получить угловое расстояние между звездой и Солнцем:

$$l = \frac{-h}{\cos\Delta\varphi} \approx 13^{\circ}.$$

Склонение Солнца отрицательно и равно

$$\delta = l\sin\varphi = \frac{-h\sin\varphi}{\cos\Delta\varphi} = -9^{\circ}.$$

Такое склонение у Солнца бывает вскоре после осеннего равноденствия и незадолго перед весенним равноденствием. Обозначив угол наклона экватора к эклиптике через ε, запишем выражения для прямого восхождения Солнца:

$$\alpha_{01} = 12\text{ч} + \frac{-\delta}{\text{tg}\varepsilon} = 13\text{ч}\,25\text{м}; \quad \alpha_{02} = 24\text{ч} - \frac{-\delta}{\text{tg}\varepsilon} = 22\text{ч}\,35\text{м}.$$

На рисунке видно, что звезда располагается западнее Солнца, ее прямое восхождение меньше. Соответствующая разница составляет

$$\Delta\alpha = l\cos\varphi = \frac{-h\cos\varphi}{\cos\Delta\varphi} \approx -35\text{ м}.$$

Итак, два возможных значения прямого восхождения звезды составляют

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{01,2} + \Delta\alpha = 12\text{ч}50\text{м};\ 22\text{ч}00\text{м}.$$

Система оценивания (от одного члена жюри).

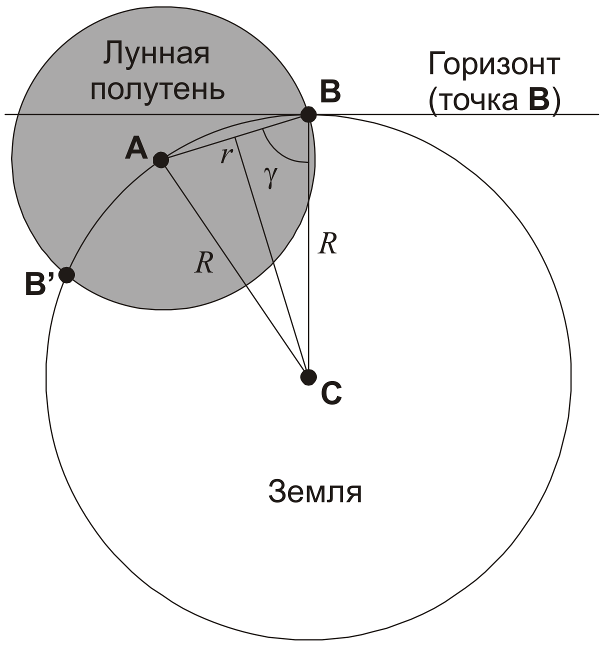
1 этап: 2 балла.
Правильное представление о взаимном расположении Солнца, звезды и горизонта на разных широтах (тропик, 45°, полярный круг).
2 этап: 1 балл.
Вычисление склонения Солнца.
3 этап: 2 балла.
Вычисление прямого восхождения Солнца (по 1 баллу за каждый из вариантов).
4 этап: 1 балл.
Определение разности прямых восхождений звезды и Солнца.
5 этап: 2 балла.
Определение прямого восхождения звезды (по 1 баллу за каждый из вариантов).

XI.2 ЗАТМЕНИЕ НА ГОРИЗОНТЕ

О.С. Угольников

Условие. В некоторый момент времени в пункте **A** на Земле наблюдается полное солнечное затмение с фазой 1.000, а в пункте **B** – частное солнечное затмение с фазой 0.001. В обоих случаях затмение наблюдается у горизонта. Нарисуйте вид Солнца и Луны в пункте **B**. С какой стороны (под каким углом по отношению к вертикали) располагается ущерб на диске Солнца при наблюдении в пункте **B**? Угловые размеры Солнца и Луны во время затмения одинаковы.

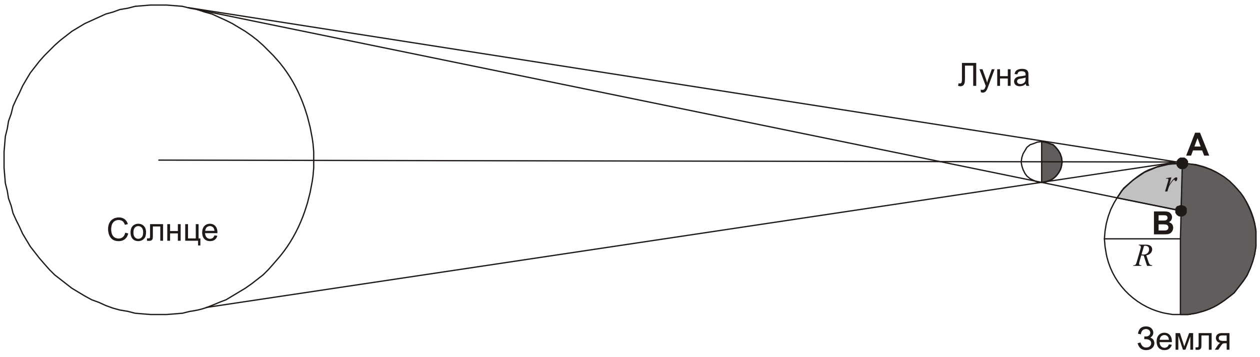
Решение. Изобразим Землю и лунную тень и полутень со стороны Солнца в указанный момент. Коль скоро полное затмение видно у горизонта, центр тени и полутени будет располагаться на краю изображения Земли. Для удобства расположим точку **B** в верхней части рисунка (в реальности таких точек две, **B** и **B'**, ответ на задачу в них будет одинаковым).



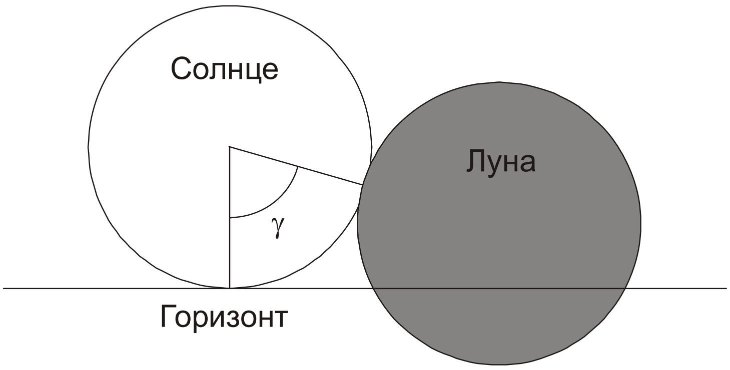
При наблюдении из пункта **B** линия на небесной сфере "Центр Солнца - центр Луны" будет указывать направление на центр тени, где в этот момент происходит полное затмение. По рисунку видно, что Луна в точке **B** окажется ниже Солнца, а ее положение относительно вертикали будет определяться углом γ. Треугольник **ABC** – равнобедренный, и данный угол можно вычислить как:

$$\gamma = \arccos\frac{r}{2R}.$$

Здесь R – радиус Земли, r – радиус лунной полутени. Последнюю величину можно легко определить из рисунка:



Если вершина конуса тени попадает на лимб Земли, то, с учетом несравнимых расстояний до Солнца и Луны радиус полутени r равен диаметру Луны, 3476 км. Итак, угол γ равен 74°, и вид Солнца и Луны в пункте **B** будет следующим:



В точке **B'** картина будет аналогичной, только диск Луны будет располагаться с другой стороны (слева) от диска Солнца.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 2 балла.
Правильное понимание положения тени и полутени Луны на Земле и расположения точек **A** и **B**, выраженное рисунком или текстовым описанием.
2 этап: 2 балла.
Указание, что угол γ с вершиной в точке **B**, есть позиционный угол (относительно вертикали), под которым будет появляться ущерб на диске Солнца. Второй этап может выполняться вместе по ходу четвертого, что не является ошибкой.
3 этап: 2 балла.
Расчет размеров полутени Земли (либо прямого указания, что ее радиус равен диаметру Луны, что также считается правильным, рисунок не является обязательным).
4 этап: 2 балла.
Вычисление угла γ. Рисунок, иллюстрирующий положение Луны на небе относительно Солнца, желателен, но не обязателен.

XI.3 ФОКУС В ТОЧКЕ ЛАГРАНЖА

С.Б. Борисов

Условие. Планета обращается вокруг звезды с массой M по круговой орбите с радиусом R. С нее стартует космический аппарат. Он выходит на эллиптическую орбиту вокруг звезды, у которой точка старта является апоцентром, а второй фокус (свободный от звезды) совпадает с текущим положением внутренней точки Лагранжа **L₁** системы "планета-звезда". При каком отношении масс планеты и звезды (m/M<1) аппарат сможет без коррекций орбиты быстрее всего вернуться к планете? Взаимодействие аппарата с планетой не учитывать.

Решение. Для начала определим расстояние точки Лагранжа $\mathbf{L_1}$ от планеты r. В этой точке физическое тело может вращаться вокруг звезды с той же угловой скоростью ω, что и планета. Запишем уравнения движения этого тела и планеты:

$$\omega^2(R-r) = \frac{GM}{(R-r)^2} - \frac{Gm}{r^2}; \quad \omega^2 R = \frac{GM}{R^2}.$$

Вычтем из второго уравнения первое:

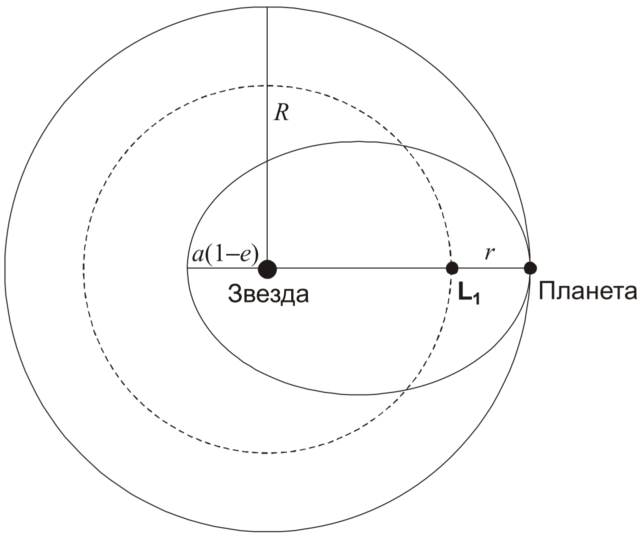
$$\frac{GMr}{R^3} = \frac{Gm}{r^2} + \left(\frac{GM}{R^2} - \frac{GM}{(R-r)^2}\right).$$

Воспользовавшись формулами для приближенного вычисления, получаем

$$\frac{GMr}{R^3} = \frac{Gm}{r^2} - \frac{2GMr}{R^3}.$$

В итоге имеем:

$$r = R \cdot \left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3}.$$



Коль скоро масса планеты меньше массы звезды, точка $\mathbf{L_1}$ располагается недалеко от планеты. Орбита аппарата – эллиптическая. Апоцентр орбиты аппарата – единственная ее точка, где он может вернуться к планете. Наиболее быстрое возвращение может случиться через один оборот планеты, когда она сама окажется в этой точке. Тогда орбитальный период аппарата t должен быть равен T/N, где T – орбитальный период планеты, а N – натуральное число. Считая массу планеты малой по сравнению с массой звезды и не учитывая взаимодействие аппарата с планетой, получаем выражение для большой полуоси орбиты аппарата

$$a = R \cdot \left(\frac{1}{N}\right)^{2/3}.$$

Физический смысл имеет только случай с N=2, так как уже при N=3 мы получим значение a, меньшее R/2, что невозможно для апоцентра аппарата на расстоянии R. Исходя из расстояния в апоцентре, получаем значение эксцентриситета орбиты:

$$e = \frac{R}{a} - 1 = 2^{2/3} - 1 = 0.59.$$

Точка $\mathbf{L_1}$ является фокусом эллипса, и $a(1-e)=r$:

$$R \cdot (2^{1/3} - 1) = R \cdot \left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3}.$$

Отсюда получаем соотношение масс планеты и звезды

$$\frac{m}{M} = 3 \cdot (2^{1/3} - 1)^3 \approx 0.05.$$

Система оценивания (от одного члена жюри). Решение задачи разбивается на несколько этапов, которые могут выполняться в произвольной последовательности.

1 этап: 3 балла.
Выражение для расстояния между планетой и точкой Лагранжа, которое можно вывести или взять как известное. Участники могут рассматривать более общий случай произвольного соотношения масс двух тел при вычислении положения точки Лагранжа. Это не считается ошибкой и оценивается полностью при условии правильности вычислений.
2 этап: 2 балла.
Формулировка условия скорейшего возвращения аппарата к планете. При этом нужно обосновать, что смысл имеет только случай N=2 (аппарат делает два, а не какое-либо другое целое число оборотов вокруг звезды). Если этого не делается и рассматривается только случай N=2, оценка уменьшается на 1 балл.
3 этап: 3 балла.
Вычисление отношения масс.

XI.4 ЭФФЕКТ ПОЙНТИНГА-РОБЕРТСОНА

О.С. Угольников

Условие. Суть известного эффекта Пойнтинга-Робертсона состоит в тормозящем действии боковых солнечных фотонов, имеющих встречную компоненту скорости относительно тела, движущегося вокруг Солнца. Как и насколько изменит расстояние от Солнца за один оборот сферическая графитовая частица радиусом 10 мкм и плотностью 2.1 г/см^3, изначально обращающаяся по орбите радиусом 1 а.е. и эксцентриситетом, равным нулю?

Решение. Вначале обратим внимание, что кроме эффекта Пойтинга-Робертсона на частицу будет действовать световое давление, основная компонента которого направлена от Солнца. Определим силу светового давления на расстоянии 1 а.е. от Солнца:

$$F_S = \frac{J_0}{4\pi R^2} \cdot \frac{\pi r^2}{c} = S\frac{\pi r^2}{c} = 1.4 \cdot 10^{-15}\ H.$$

Здесь J_0 – светимость Солнца, R – расстояние от Солнца до пылинки, r – радиус пылинки, S – солнечная постоянная. Мы учли, что пылинка графитовая, и свет в ней поглощается. Сила притяжения со стороны Солнца направлена в другую сторону и равна

$$F_G = \frac{GMm}{R^2} = \frac{4GM\rho r^3}{3R^2} = 1.7 \cdot 10^{-14}\ H.$$

Здесь M и m – массы Солнца и пылинки, ρ – плотность пылинки. Для частиц такого размера сила светового давления в 12 раз меньше силы притяжения. Важно понимать, что сила светового давления не приводит к изменению радиуса орбиты частицы, так как она продолжает двигаться в центральном поле Солнца с эффективной силой притяжения, зависящей от радиуса как $1/R^2$. Мы можем дальше не учитывать эту силу либо проводить расчеты с эффективной массой Солнца M', равной $0.92M$.

Сила Пойнтинга-Робертсона несравнимо меньше светового давления, но она направлена навстречу движения пылинки и поэтому будет изменять ее орбиту. Величина силы равна

$$F_{PR} = F_S\frac{v}{c} = \frac{J_0}{4\pi R^2} \cdot \frac{\pi r^2 v}{c^2}.$$

Здесь v – скорость пылинки. Работа этой силы за один оборот отрицательна и равна

$$A_{PR} = -F_{PR} \cdot 2\pi R = -\frac{J_0}{2R} \cdot \frac{\pi r^2 v}{c^2}.$$

Эта работа приводит к изменению полной энергии пылинки, равной для кругового вращения

$$E = -\frac{GM'm}{2R}.$$

Обозначим изменение радиуса орбиты как ΔR и учтем, что эта величина существенно меньше R. Тогда

$$-\frac{GM'm}{2(R+\Delta R)} = -\frac{GM'm}{2R} - \frac{J_0}{2R} \cdot \frac{\pi r^2 v}{c^2}.$$

В соответствии с формулами для малых приращений

$$\frac{1}{R+\Delta R} \approx \frac{1}{R} - \frac{\Delta R}{R^2}.$$

Подставляя это в предыдущую формулу, имеем:

$$-\frac{GM'm\Delta R}{2R^2} = \frac{J_0}{2R} \cdot \frac{\pi r^2 v}{c^2}.$$

Изменение радиуса орбиты за один оборот составит

$$\Delta R = -\frac{J_0 \pi r^2 v R}{GM' mc^2} = -\frac{J_0 \pi r^2}{mc^2}\sqrt{\frac{R}{GM'}} = -\frac{3J_0}{4\rho r c^2}\sqrt{\frac{R}{GM'}} \approx -5000 \text{ км}.$$

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 1 балл.
Проверка, что данная пылинка может обращаться по круговой орбите и не будет выброшена световым давлением, либо вычисление эффективной массы Солнца (его положительная величина автоматически означает выполнение проверки). В случае этой проверки в последующем решении участник может пользоваться как эффективной, так и обычной массой Солнца, что не является ошибкой.

2 этап: 3 балла.
Запись выражения для силы Пойнтинга-Робертсона.

3 этап: 4 балла.
Вычисление изменения радиуса орбиты за один оборот. Если участник олимпиады путает полную и кинетическую энергию частицы, получая тот же численный ответ, но с другим знаком (изменение кинетической, а не полной энергии, уменьшение скорости и удаление частицы от Солнца), эти 4 балла не выставляются.

XI.6 МЕЖЗВЕЗДНЫЙ ЭКРАН

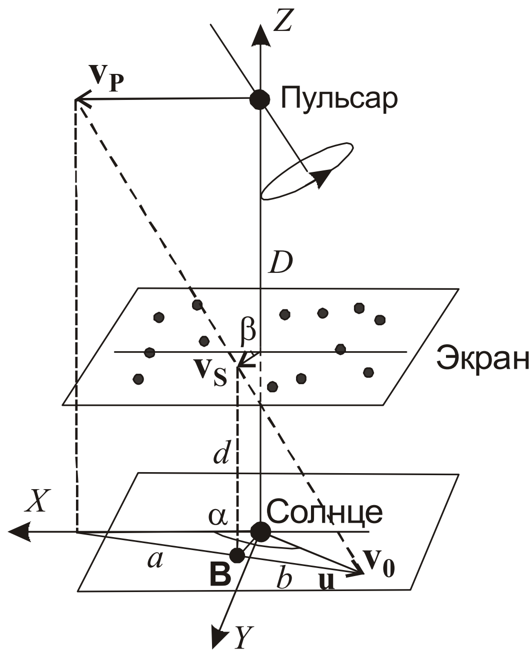
Е.Н. Фадеев

Условие. Излучение пульсара на пути к Земле проходит через тонкий рассеивающий слой (экран), расположенный на расстоянии двух третей пути до наблюдателя. В результате рассеяния на неоднородностях этого слоя к наблюдателю приходит не один луч, а множество, которые образуют интерференционную картину. Известно, что пульсар расположен на расстоянии 1 кпк от Солнца, его собственное движение равно 65 миллисекунд дуги в год. Измерения показали, что дифракционная картина движется относительно Солнца в плоскости, перпендикулярной направлению на пульсар, со скоростью 100 км/с под углом 150° к направлению движения пульсара. Определите возможные значения скорости и направления движения среды, составляющей экран.

Решение. Вначале определим величину тангенциальной скорости пульсара, исходя из его собственного движения μ и расстояния до него D:

$$v_P \text{ (км/с)} = 4.74\ \mu(''/\text{год})\ D \text{ (пк)} = 308 \text{ км/с}.$$

Введём декартову систему координат с центром в Солнце (рисунок). Ось Z направим на пульсар, ось X – параллельно тангенциальной скорости пульсара. Пусть $\mathbf{v}_0$, v_P и $\mathbf{v}_S$ – векторы скоростей дифракционной картины, пульсара и экрана соответственно, α=150° – угол между $\mathbf{v}_0$ и осью X, β – угол между $\mathbf{v}_S$ и осью X.



Рассмотрим движение пульсара и экрана на некотором интервале времени. Отметим, что этот интервал мал, и перемещения пульсара и экрана несопоставимо меньше их расстояния до Солнца. В этом случае линия, соединяющая пульсар и наблюдателя, все время образует очень малый угол с осью Z. Лучевые скорости экрана и пульсара не влияют на ситуацию, и мы их в расчет не принимаем.

Пусть в начальный момент времени пульсар находился на расстоянии D на оси Z. Тогда через некоторое время t его координаты будут $(v_p t, 0, D)$. За это же время то дифракционное пятно, которое находилось в начале координат, сместится в точку с координатами $(v_0 t\cos\alpha, v_0 t\sin\alpha, 0)$. Это дифракционное пятно сформировано лучами, которые в начальный момент времени проходили через область экрана вблизи оси Z. За время t центр этой области сместился в точку $(v_S t\cos\beta, v_S t\sin\beta, d)$. Здесь d – расстояние от Земли до экрана. Очевидно, что все три точки (пульсар, центр пятна рассеяния на экране и центр дифракционного пятна) находятся на одной прямой. Спроектируем эту прямую на плоскость OXY, получив вектор $\mathbf{u}t$. Сделаем то же самое с векторами перемещения пульсара и экрана, которые параллельны данной плоскости. Опустив постоянный множитель t, мы можем записать в векторном виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v_0} - \mathbf{v_P}.$$

Проекция центра пятна рассеяния на экране на плоскость OXY обозначена на рисунке как **B**. Она делит вектор **u** на части. Из подобия треугольников имеем

$$\frac{b}{d} = \frac{a+b}{D}.$$

Из этого мы можем записать выражение для тангенциального перемещения экрана:

$$\mathbf{v_S} = \mathbf{v_0} - \frac{b}{a+b}\mathbf{u} = \mathbf{v_0} - \frac{d}{D}\mathbf{u} = \frac{D-d}{D}\mathbf{v_0} + \frac{d}{D}\mathbf{v_P}.$$

Отсюда мы можем вычислить скорость и направление перемещения экрана, учитывая, что $D=3d$, $s=(D-d)/D=2/3$. Разложим вектора по координатным осям:

$$v_S \cos\beta = \frac{D-d}{D} v_0 \cos\alpha + \frac{d}{D} v_P; \quad v_S \sin\beta = \frac{D-d}{D} v_0 \sin\alpha.$$

Разделим второе уравнение на первое:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{s v_0 \sin\alpha}{s v_0 \cos\alpha + (1-s) v_P}. \quad \beta = arctg \frac{s v_0 \sin\alpha}{s v_0 \cos\alpha + (1-s) v_P} = 37^O.$$

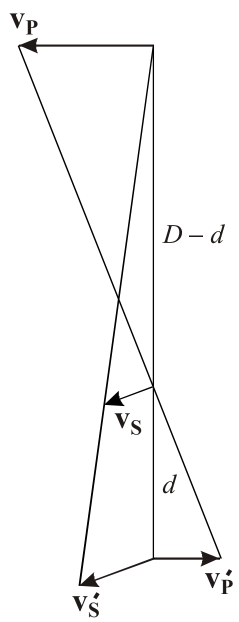
Теперь возведем оба уравнения системы в квадрат и сложим:

$$v_S^2 = s^2 v_0^2 \sin^2\alpha + s^2 v_0^2 \cos^2\alpha + (1-s)^2 v_p^2 + 2s(1-s) v_0 v_p \cos\alpha,$$

$$v_S = \sqrt{(1-s)^2 v_P^2 + s^2 v_0^2 + 2s(1-s) v_P v_S \cos\alpha} = 56 \text{ км/с}.$$

К этому же ответу можно прийти другим способом. Предположим, что экран неподвижен. Тогда движение дифракционной картины будет определяться только движением пульсара. Дифракционная картина будет двигаться со скоростью

$$v_P' = \frac{d}{D-d} v_P = \frac{1-s}{s} v_P.$$



Аналогично, если пульсар покоится, а движется только экран. Тогда скорость дифракционной картины будет неизменной и составит

$$v_S' = \frac{D}{D-d} v_S = \frac{1}{s} v_S.$$

В случае, когда и пульсар, и экран движутся, смещение дифракционной картины будет векторной суммой этих двух векторов. Поскольку нам известен угол α, воспользуемся теоремой косинусов:

$$v_S'^2 = v_0^2 + v_P'^2 - 2 v_0 v_P' \cos(\pi - \alpha),$$

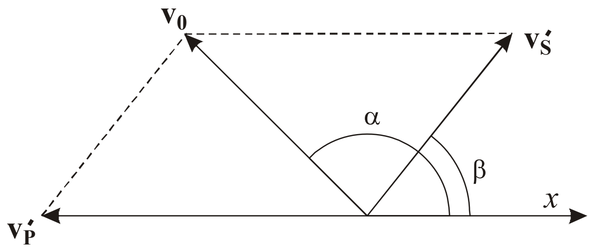
$$\frac{v_S^2}{s^2} = v_0^2 + \frac{(1-s)^2}{s^2} v_P^2 + 2v_0 \frac{1-s}{s} v_P \cos\alpha \ ,$$

$$v_S = \sqrt{(1-s)^2 v_P^2 + s^2 v_0^2 + 2s(1-s) v_P v_S \cos\alpha} = 56 \ км/с.$$

Мы пришли к тому же ответу. Для нахождения угла β воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{v_0}{\sin\beta} = \frac{v_S{}'}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{v_S}{s \cdot \sin\alpha} \ ,$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{sv_0}{v_s}\sin\alpha\right) \approx 37^\circ \ .$$



Наконец, запишем третий вариант решения задачи. Уравнение прямой в пространстве в симметричной форме имеет вид

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} .$$

Запишем в такой форме уравнение прямой, соединяющей концы векторов $\mathbf{v}_P$ и $\mathbf{v}_0$, понимая под координатами с индексами 1 и 2 координаты концов векторов $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_P$, а без индекса – $\mathbf{v}_S$:

$$\frac{v_S\cos\beta - v_P}{v_0\cos\alpha - v_P} = \frac{v_S\sin\beta}{v_0\sin\alpha} = \frac{d - D}{-D} = \frac{D - d}{D} = s \ .$$

На самом деле, это система из двух независимых уравнений. Решая эту систему, мы придем к такому же результату, как и в первом варианте решения задачи.

6. Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 2 балла.
Правильная геометрическая модель происходящего явления.
2 этап: 1 балл.
Вычисление тангенциальной скорости пульсара.
3 этап: 1 балл.
Получение векторной формулы (или системы из двух формул в проекциях) для связи скоростей пульсара, экрана и интерференционной картины.
4 этап: 2 балла.
Получение формул для величины и направления скорости экрана (по 1 баллу за каждую).
5 этап: 2 балла.
Определение численных значений величины скорости и угла (по 1 баллу за каждое).