

Часть 3. 59 Московская Астрономическая Олимпиада (2005 год)

I ТУР

7 класс и моложе

- 3.1. Звезда кульминировала в 00ч00м, а зашла в 07ч00м. В какое время произойдет ее ближайший восход?
- 3.2. Яркая комета видна на небе рядом с Венерой, имеющей вид тонкого серпа. Как расположен серп Венеры относительно направления хвоста кометы?
- 3.3. Можно ли увидеть невооруженным глазом Меркурий в Санкт-Петербурге 22 июня, если он в это время находится в верхнем соединении? в нижнем соединении? в наибольшей западной элонгации? в наибольшей восточной элонгации?
- 3.4. Как известно, в далеком инфракрасном диапазоне спектра планеты Солнечной системы и их спутники сами могут излучать энергию. Когда Луна бывает ярче в инфракрасных лучах – в первой или последней четверти?

8-9 классы

- 3.5. Предположим, в день весеннего равноденствия планета Венера оказалась в точке наибольшей восточной элонгации, находясь при этом вблизи эклиптики. На каких широтах Земли Венеру удастся увидеть на небе, когда на нем не будет Солнца? Атмосферной рефракцией пренебречь.
- 3.6. Искусственный спутник Земли имеет массу 100 кг и обращается вокруг Земли по круговой орбите с радиусом, равным среднему расстоянию Луны от Земли. Спутник состоит из двух одинаковых частей, соединенных стержнем. По команде с Земли в стержне срабатывает импульсный двигатель, отстреливающий две части друг от друга. Какая энергия требуется, чтобы после такого маневра из окрестностей Земли улетела одна из двух частей спутника? обе части спутника? Какое направление импульса энергетически более выгодно в первом и во втором случаях?
- 3.7. В пункте **A** в зените наблюдается метеор, имеющий блеск 0^m . В пункте **B** этот же метеор был виден на высоте 30° над горизонтом. Какой блеск был у него в этом пункте? Поглощением света в атмосфере пренебречь.
- 3.8. Как известно, один тропический год – это промежуток между двумя последовательными моментами весеннего равноденствия. Сколько тропических лет проходит между последовательными покрытиями Солнцем какой-нибудь далекой звезды, находящейся вблизи эклиптики?

10-11 классы

3.9. Звезда А видна один час после наступления темноты на широте Москвы 1 февраля, а у звезды В такие же условия видимости наступают 1 августа. Какая из этих звезд будет дольше видна на широте Москвы по вечерам после этих дат?

3.10. Что происходит чаще и во сколько раз: прохождения Венеры по диску Солнца или прохождения Венеры за диском Солнца?

3.11. У затменной переменной звезды глубина главного и вторичного минимумов составляет соответственно 0.55^m и 0.11^m . Определите, если это возможно: отношение масс, отношение радиусов, отношение эффективных температур и отношение светимостей двух звезд, входящих в систему. Потемнением дисков звезд к краю пренебречь.

3.12. Вокруг далекой звезды по круговой орбите обращается двойная планета, состоящая из двух одинаковых тел со средней плотностью, равной средней плотности звезды. Планеты обращаются вокруг общего центра масс по круговой орбите так, что тень одной из них всегда падает по нормали на другую планету. Определите фазу теневого затмения второй планеты, считая, что размеры и массы обеих планет несравнимо меньше размеров и массы звезды.

II ТУР

7 класс и моложе

3.13. Перечислите все небесные объекты, которые можно одновременно увидеть невооруженным глазом с северного и южного полюсов Земли.

3.14. Почему безлунные ясные ночи на широте Москвы оказываются самыми темными в апреле – начале мая?

3.15. В один момент времени Венера оказалась в наибольшей восточной элонгации как для землян, так и для наблюдателей на Марсе. На каком угловом расстоянии от Солнца был виден Марс на Земле в этот момент? Орбиты всех трех планет считать круговыми.

3.16. Одна двойная звезда состоит из двух звезд 2^m , а другая – из одной звезды 1^m и одной звезды 3^m . Какая из этих пар ярче?

3.17. На одном из информационных Интернет-сайтов заметка о предстоящем астрономическом явлении была проиллюстрирована данной фотографией. Откуда могла быть сделана фотография, и какая фаза была в этот момент у Луны для наблюдателей на Земле?



8-9 классы

3.18. Касательное покрытие Марса Луной наблюдается в зените на рассвете. Найти ширину полосы видимости частного покрытия Марса Луной.

3.19. Что энергетически проще – запустить межпланетный аппарат к Венере или запустить тот же аппарат к Марсу? Орбиты Венеры, Земли и Марса считать круговыми.

3.20. Во время солнечного затмения в некотором пункте Земли на самом горизонте виден диск Солнца с маленьким ущербом точно снизу. Возможно ли наблюдение в этом пункте полного солнечного затмения?

3.21. На далекой обитаемой планете в нашей Галактике у астрономов-наблюдателей нет спектральных приборов, но есть фотометр, регистрирующий изменения яркости светил, количественно равные яркости одной звезды 20^m . На каком расстоянии от Солнца с помощью такого прибора можно установить существование у Солнца планетной системы?

3.22. В некоторой точке Земли ведутся наблюдения за искусственным спутником Земли, двигающимся по круговой орбите. В точке наблюдения спутник описывает узкую «восьмерку», регулярно проходя через зенит, затем почти вертикально опускаясь вниз, касаясь горизонта и вновь поднимаясь наверх к зениту. На какой широте ведутся наблюдения?

10-11 классы

3.23. Светлой июньской ночью на широте 60° с.ш. скоростной поезд-экспресс движется со скоростью 120 км/ч в северном направлении. В какое местное время его пассажиры зафиксируют истинную солнечную полночь – самый темный момент ночи? Уравнением времени пренебречь.

3.24. 1 мая наступило противостояние Марса. В некоторой точке Земли в момент противостояния Солнце и Марс одновременно взошли над горизонтом. Найдите широту данной точки и определите, над какими сторонами горизонта располагались Солнце и Марс. Наклоном плоскости орбиты Марса к эклиптике и рефракцией пренебречь.

3.25. Каким должен был быть радиус круговой лунной орбиты, чтобы на Земле иногда исчезали приливы и отливы? Какова была бы периодичность таких «исчезновений»?

3.26. Яркая туманность размером 1° представляет собой остаток вспышки сверхновой, произошедшей 10 тысяч лет назад. Сквозь туманность хорошо видны более далекие объекты, а в ее спектре видна яркая широкая линия водорода $H\alpha$, занимающая область длин волн от 6541 до 6585 ангстрем. Туманность подсвечивается находящейся неподалеку очень горячей звездой спектрального класса O, имеющей блеск 3^m . Оцените радиус этой звезды.

3.27. *«Мощный радиопередатчик был установлен на Луне точно в центре ее видимого полушария 24 декабря, в тот же день, когда на экваторе Земли наблюдалось продолжительное полное солнечное затмение. На следующий день первые сигналы были приняты во многих пунктах нашей страны, в том числе и за полярным кругом. А через неделю лунная станция отправила землянам поздравление с наступающим Новым Годом».*

В какую область диска Луны нужно было навести узконаправленные антенны, чтобы получить новогодние поздравления?

Часть 3. 59 Московская Астрономическая Олимпиада (2005 год)

I ТУР

7 класс и моложе

3.1. Промежутки времени между восходом и верхней кульминацией и верхней кульминацией и заходом звезды равны друг другу, следовательно, предыдущий восход звезды произошел в 17ч00м в предшествующий день. Промежуток времени между двумя восходами звезды равен одним звездным суткам, составляющим около 23ч56м (за счет обращения Земли вокруг Солнца один год содержит звездных суток на один больше, чем солнечных). В результате, ближайший восход звезды произойдет в 16ч56м.

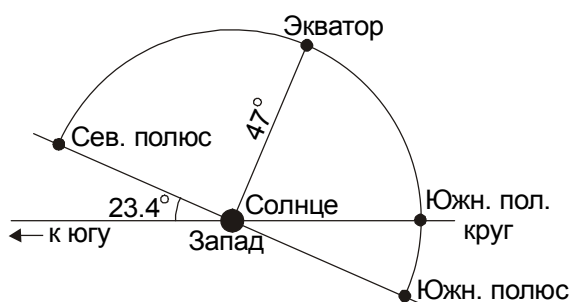
3.2. Хвост кометы направлен в пространстве и на небе в сторону, противоположную Солнцу. В эту же сторону направлены рога серпа Венеры. Следовательно, хвост кометы будет направлен в ту же сторону, что и рога серпа Венеры.

3.3. Планета Меркурий всегда располагается на небе вблизи эклиптики не далее чем в 28 градусах от Солнца. 22 июня, в день летнего солнцестояния, Солнце в Санкт-Петербурге погружается под горизонт неглубоко и ненадолго. Все это время остается достаточно светло. Даже если Меркурий в этот день окажется в наибольшей элонгации, его склонение будет меньше солнечного, и он будет восходить незадолго до него или заходить сразу же после Солнца, оставаясь невидимым на ярком фоне зари. Находясь в верхнем или нижнем соединении, Меркурий тем более не может быть виден рядом с ярким Солнцем.

3.4. Яркость собственного излучения небесного тела в инфракрасных лучах сильно зависит от его температуры. Когда Луна находится в первой четверти, на ее видимом полушарии утро, и Солнце только восходит или недавно взошло над горизонтом. В это время ее поверхность в среднем холоднее, чем во время последней четверти, когда на видимом полушарии вечер. Кроме этого, во время последней четверти Солнце освещает более темные области видимого полушария Луны (океан Бурь и окрестные моря), которые от этого сильнее нагреваются. В результате, Луна в последней четверти в инфракрасных лучах ярче, чем в первой четверти.

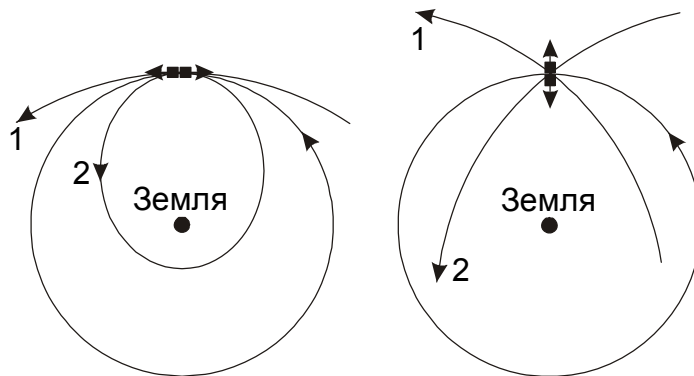
8-9 классы

3.5. Во время наибольшей восточной элонгации Венера находится в 47° восточней Солнца вдоль эклиптики, то есть, учитывая дату, в созвездии Овна. В это время она лучше всего видна по вечерам. В момент захода Солнца, имеющего координаты $\alpha = 0^h$, $\delta = 0^\circ$, звездное время составляет 6 часов. Положение Венеры на небе в момент захода Солнца для различных широт показано на рисунке. В это время на Южном полярном круге эклиптика совпадает с горизонтом, и Венера зайдет за горизонт одновременно с Солнцем, а взойдет значительно позже него. При дальнейшем смещении на юг условия видимости Венеры, имеющей северное склонение, будут еще хуже – она будет видна на небе только днем или не будет видна вообще.



В экваториальной зоне и северном полушарии Земли Венера будет находиться над горизонтом после захода Солнца, и лишь вблизи Северного полюса ее не удастся увидеть на темном небе, так как Солнце там не будет заходить за горизонт. С учетом угловых размеров Солнца окончательный ответ таков: Венера будет видна на небе, когда на нем не будет Солнца, на широтах от -66.2° до $+89.8^\circ$.

3.6. По III закону Ньютона в результате работы двигателя в стержне две одинаковые части спутника получают приращения скорости, равные по величине и противоположные по направлению. Если перед нами стоит задача вывести из поля тяготения Земли только одну часть, то можно использовать ее вращение вокруг Земли, придав ей дополнительную скорость в этом же направлении (левый рисунок). При этом второй спутник перейдет на эллиптическую орбиту.



Приращение скорости, которое получит первая часть спутника, равна разности второй и первой космических скоростей для данного расстояния от Земли:

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} - \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{GM}{R}}(\sqrt{2} - 1).$$

Здесь M – масса Земли, R – радиус круговой орбиты спутника, равный среднему расстоянию до Луны. Вторая часть спутника получает такое же по модулю приращение скорости. В системе отсчета, двигавшейся до включения двигателя вместе со спутником, обе части покоились, а после его работы они стали двигаться со скоростью Δv . Следовательно, полученная ими энергия равна

$$E = \frac{m(\Delta v)^2}{2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \frac{GMm}{R},$$

что составляет $8.89 \cdot 10^6$ Дж. Здесь m – масса спутника (обеих частей вместе).

Если же необходимо вывести на параболические орбиты обе половины спутника, то придавать им импульс, параллельный направлению их орбитального движения, уже не будет энергетически выгодно, так как это будет способствовать переводу на параболическую орбиту одной половины, но существенно затруднит перевод второй половины. Проще всего придать обеим частям приращение скорости, перпендикулярное их орбитальному движению (правый рисунок). Чтобы обе части после импульса имели вторую космическую скорость, приращение должно быть равным

$$\Delta v = \sqrt{v_2^2 - v_1^2} = \sqrt{\frac{GM}{R}},$$

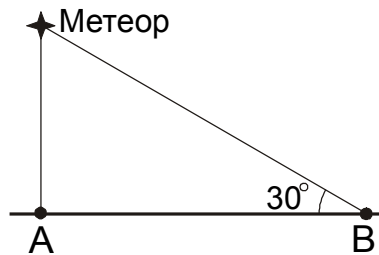
то есть первой космической скорости. Для этого потребуется энергия

$$E = \frac{m(\Delta v)^2}{2} = \frac{GMm}{2R},$$

равная $5.18 \cdot 10^7$ Дж. Этот же результат можно напрямую получить из закона сохранения энергии с учетом того, что все части спутника в результате покинут окрестности Земли. Обратите внимание, что данная энергия почти в 6 раз больше, чем в случае вывода на параболическую орбиту только одной половины спутника!

3.7. Явления метеоров происходят на высотах порядка 100 км. Это значительно меньше радиуса Земли, и для решения задачи мы можем забыть о сферичности нашей планеты и считать ее плоской. Из рисунка видно, что расстояние от метеора до точки **В**, где он был виден на высоте 30° , в $(1/\sin 30^\circ)=2$ раза больше, чем из точки **А**, находящейся прямо под метеором. Следовательно, его блеск в точке **В** без учета атмосферного поглощения составил

$$m = 0 + 5 \lg 2 = 1.5.$$



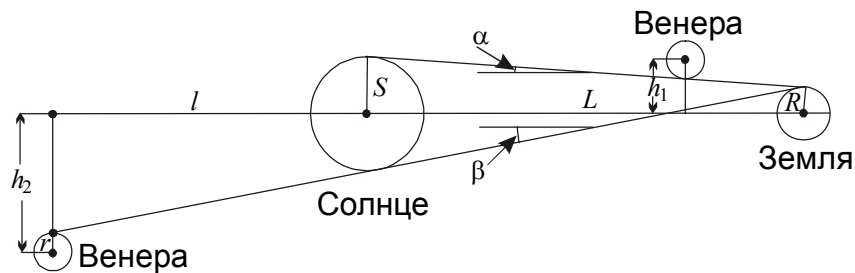
3.8. Промежуток между двумя покрытиями Солнцем далекой звезды (если звезда абсолютно неподвижна, этот промежуток равен периоду обращения Земли вокруг Солнца) и тропический год – разные промежутки времени, хотя и очень близкие друг к другу. Причина разницы состоит в явлении прецессии земной оси, из-за которого точка весеннего равноденствия движется по эклиптике навстречу видимому движению Солнца, завершая один оборот примерно за 26000 лет. В результате, возвращаясь к той же звезде, Солнце совершает чуть более одного оборота относительно точки весеннего равноденствия. За этот период проходит $1 + (1/26000)$, то есть около 1.00004 тропического года.

10-11 классы

3.9. Момент захода любой звезды на какой-либо фиксированной широте соответствует определенному звездному времени, не зависящему от сезона года. Каждый последующий день Солнце кульминирует примерно на 4 минуты позже по звездному времени, однако звездное время захода Солнца и окончания вечерних сумерек смещается на другую величину. В начале февраля продолжительность светового дня на широте Москвы увеличивается, и звездное время захода Солнца каждый последующий день возрастает более чем на 4 минуты. Поэтому продолжительность вечерней видимости звезды **А** в феврале будет быстро уменьшаться, и вскоре эта звезда исчезнет в лучах заходящего Солнца.

В августе, когда продолжительность светового дня уменьшается, звездное время захода Солнца увеличивается значительно медленней. За счет более раннего наступления темноты звезда **В** будет видна по вечерам еще долго после 1 августа.

3.10. Выясним, при каких условиях наступают прохождения Венеры по диску Солнца или за ним. Обозначим через S , R и r радиусы Солнца, Земли и Венеры, а через L и l – расстояния от Солнца до Земли и Венеры (будем считать их орбиты круговыми).



На рисунке видно, что для наступления прохождения Венеры по диску Солнца нужно, чтобы Венера хотя бы задела краем конус, описанный вокруг поверхностей Солнца и Земли. Учтем, что все угловые величины, о которых пойдет речь, малы. В этом случае угол раствора конуса α равен

$$\alpha = \frac{S - R}{L}.$$

Прохождение произойдет, если в момент нижнего соединения Венера будет отстоять от плоскости эклиптики на расстояние, не превышающее величину h_1 :

$$h_1 = S - \alpha l + r = S \left(1 - \frac{l}{L}\right) + R \frac{l}{L} + r = 203700 \text{ км.}$$

В случае покрытия Венеры Солнцем угол раствора конуса составит

$$\beta = \frac{S + R}{L},$$

а максимальное расстояние Венеры от плоскости эклиптики в момент уже верхнего соединения

$$h_2 = S + \beta l + r = S \left(1 + \frac{l}{L}\right) + R \frac{l}{L} + r = 1210100 \text{ км.}$$

В течение своего орбитального периода Венера может отходить от плоскости эклиптики на значительно большие расстояния (более 6 млн. км). Поэтому вероятность наступления прохождения по диску Солнца или за ним можно считать пропорциональной величине h_1 или h_2 , соответственно. А это значит, что прохождения за диском Солнца происходят в среднем в $h_2/h_1 = 5.94$ раза чаще, чем прохождения по его диску.

Интересно, что прохождения Венеры за диском Солнца происходят в ту же эпоху и в том же календарном месяце, что и прохождения по диску дневного светила. Так, более редкие прохождения Венеры по диску Солнца в июне 2004 и 2012 года сопровождаются сразу десятью покрытиями Венеры Солнцем, которые также происходят в июне каждые 8 лет с 1976 до 2048 года.

3.11. Расстояние между двумя звездами, входящими в пару, много меньше расстояния от них до Земли. Поэтому если во время главного максимума от нас скрыта какая-то угловая площадь S от диска одной звезды, то во время вторичного минимума закрытой будет та же площадь S , но на диске другой звезды. При этом каждое из покрытий может быть как полным, так и частным, и это заранее неизвестно.

Так как расстояния до обеих звезд можно считать одинаковыми, а потемнением дисков к краю мы по условию задачи пренебрегаем, то количество световой энергии, приходящей от одной звезды с фиксированной угловой площади S , по закону Стефана-Больцмана определяется исключительно температурой поверхности звезды T и пропорционально T^4 . Обозначим суммарный поток от обеих звезд вне минимумов через J и вычислим уменьшение потока в каждом из минимумов. Для главного и вторичного минимумов соответственно получаем:

$$\Delta J_1 = J(1 - 10^{-0.4 \cdot 0.55}) = 0.4J$$

$$\Delta J_2 = J(1 - 10^{-0.4 \cdot 0.11}) = 0.1J$$

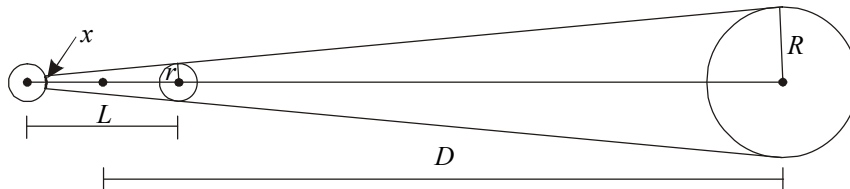
Получается, что количество световой энергии, поступающей с одинаковых площадок двух звезд, отличается в 4 раза, следовательно, их эффективные температуры различаются в $\sqrt{2} = 1.41$ раз. При этом во время главного максимума затмевается более горячая звезда.

Однако без дополнительной информации мы ничего не можем сказать о том, какие затмения полные, а какие – частные. Поэтому мы не сможем определить соотношение радиусов и светимостей звезд. Без спектральных наблюдений не удастся найти и соотношение их масс.

3.12. В указанной системе звезда и обе планеты все время находятся на одной прямой, и взаимные расстояния между всеми небесными телами не изменяются. Обозначим радиусы звезды и планет через R и r , расстояние от звезды до центра масс двойной планеты через D , а расстояние между планетами через L . Масса звезды равна M , масса каждой из планет – m . Система вращается как единое целое с угловой скоростью ω . Запишем уравнения движения внутренней и внешней планеты:

$$m\omega^2 \left(D - \frac{L}{2}\right) = \frac{GMm}{\left(D - \frac{L}{2}\right)^2} - \frac{Gm^2}{L^2},$$

$$m\omega^2 \left(D + \frac{L}{2}\right) = \frac{GMm}{\left(D + \frac{L}{2}\right)^2} + \frac{Gm^2}{L^2}.$$



В условии сказано, что масса звезды значительно превышает массы планет. Из этого следует, что величина L много меньше, чем D , и слагаемые в правой части обоих уравнений можно переписать как:

$$\frac{GMm}{\left(D \mp \frac{L}{2}\right)^2} = \frac{GMm}{D^2} \pm \frac{GMmL}{D^3}.$$

Складывая и вычитая уравнения движения планет, получаем

$$m\omega^2 D = \frac{GMm}{D^2},$$

$$m\omega^2 L = \frac{2Gm^2}{L^2} - \frac{2GMmL}{D^3}.$$

Выражаем величину ω из первого уравнения и подставляем во второе:

$$\frac{3GML}{D^3} = \frac{2Gm}{L^2}.$$

Из получившегося уравнения выводится связь между радиусами орбит:

$$L = D \left(\frac{2m}{3M} \right)^{1/3}$$

или, с учетом равенства плотностей планет и звезды,

$$L = \left(\frac{2}{3} \right)^{1/3} D \frac{r}{R}.$$

Тень ближней к звезде планеты имеет вид конуса, угол раскрытия которого (с учетом малости размеров планет по сравнению с размерами звезды) равен

$$\alpha = \frac{R-r}{D-L/2} \approx \frac{R}{D}$$

Пренебрегая размерами планеты по сравнению с величиной L , получаем величину радиуса тени на поверхности дальней планеты

$$x = r - \alpha L = r \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{1/3} \right).$$

Наконец, фаза кольцеобразного теневого затмения дальней планеты составит

$$F = \frac{x}{r} = 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{1/3} = 0.13.$$

II ТУР

7 класс и моложе

3.13. С северного полюса видно только северное небесное полушарие, а с южного – лишь южная половина неба. С обоих полюсов одновременно за счет явления атмосферной рефракции у самого горизонта можно увидеть небесные объекты, находящиеся на небесном экваторе. Таким объектом в дни равноденствий может быть Солнце. Однако, Солнцем весь список и исчерпывается. Луна, находясь вблизи небесного экватора, не будет видна ни на одном из полюсов, так как будет находиться под горизонтом из-за своего параллактического смещения, вдвое превышающего величину рефракции. Другие объекты небесной сферы слишком слабы, чтобы наблюдаться у самого горизонта на одном из полюсов, где в это время обязательно будет день. Даже во время полного солнечного затмения небо у горизонта остается очень светлым.

3.14. Для ответа на вопрос нужно вспомнить, что не все участки звездного неба светят одинаково ярко. Через небо проходит яркая полоса Млечного Пути, состоящая из огромного количества звезд. Число ярких звезд вблизи Млечного Пути также увеличивается. Летними, осенними и зимними ночами Млечный Путь виден на широте Москвы большой дугой, проходящей через все

небо на большой высоте над горизонтом (осенью – даже через область зенита). А вот весной Млечный Путь проходит низко над северным горизонтом и виден с трудом. Небо в это время значительно темнее. Нужно также учесть, что в марте небо заметно подсвечивается с поверхности Земли, еще покрытой снегом (особенно вблизи крупных городов), а с середины мая ночи становятся светлее, так как Солнце не опускается глубоко под горизонт. В результате получается, что самым темным ночное безлунное небо оказывается в апреле и начале мая.

3.15. Раз Венера находилась в наибольшей восточной элонгации как для Земли, так и для Марса, эти две планеты располагались в направлении, перпендикулярном радиусу-вектору Венеры (см. рисунок). Угловое расстояние Венеры от Солнца на Земле во время наибольшей элонгации составляет 47° , следовательно, Марс находился в 133° от Солнца к западу.

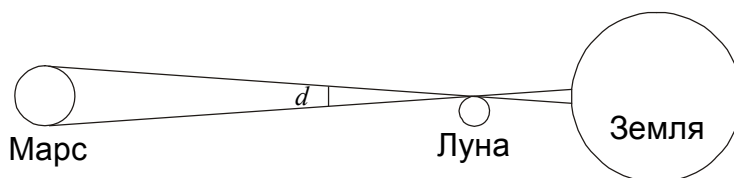


3.16. Для решения достаточно вспомнить, что шкала звездных величин – логарифмическая, и разница в одну звездную величину означает, что одна звезда ярче другой в K раз. Величина K равна примерно 2.512, хотя для решения это уже не принципиально. Если обозначить яркость звезды 3^m за единицу, то яркость первой двойной будет равна $2K$, а второй – (K^2+1) . Очевидно, для любого значения K , превышающего единицу, второе выражение больше.

3.17. Увы – на этом снимке мы сталкиваемся с очередным необдуманым фотомонтажем. Такая фотография не могла быть получена ни из какой точки пространства. На ней Луна проецируется на темную часть диска Земли, следовательно, Луна должна находиться ближе к точке съемки, чем наша планета. Однако здесь мы сталкиваемся сразу с двумя противоречиями. Во-первых, как в этом случае угловые размеры Луны могут более чем в 4 раза уступать размерам более далекой Земли (по диаметру Луна меньше Земли в 3.67 раза), и, во-вторых, почему Луна повернута к наблюдателю видимым с Земли полушарием?

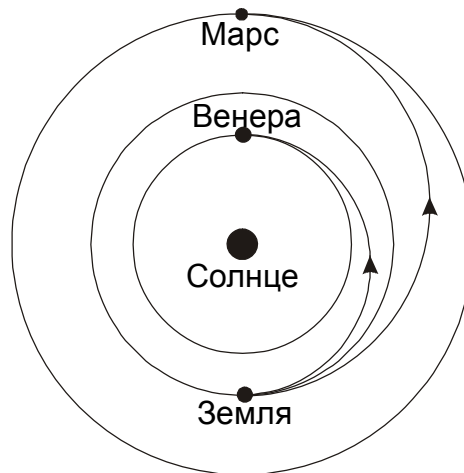
8-9 классы

3.18. Марс и Луна находились в зените, а Солнце – вблизи горизонта, примерно в 90° от обоих светил, покрытие происходило утром в тропическом поясе Земли. Следовательно, Луна находилась в последней четверти, а Марс – вблизи западной квадратуры. Расстояние до Марса в этой конфигурации можно вычислить по теореме Пифагора, оно получается равным 1.15 а.е., а его угловой диаметр – $8.1''$.



Как видно на рисунке, размер области видимости частного покрытия равен произведению расстояния от подлунной точки Земли до Луны и углового диаметра Марса d (в радианах), видимого с Луны (он практически не отличается от того, что мы видим с Земли). Эффект проекции на поверхность Земли не меняет эту ширину, так как покрытие наблюдается в зените. Подставляя числа, мы получаем ширину полосы частного покрытия около 15 км.

3.19. Энергетически наиболее выгодный путь запуска космического аппарата к другой планете Солнечной системы без последующих коррекций, если орбиты Земли и этой планеты считать круговыми – вывод аппарата на эллиптическую орбиту, касающуюся орбит Земли и этой планеты (см. рисунок). Если планета внутренняя, то аппарат начнет свое движение от Земли в афелии, а если внешняя – то в перигелии своей орбиты.



Обозначим через R и V расстояние от Солнца до Земли и скорость аппарата сразу после выхода на межпланетную орбиту, а через r и v – расстояние от Солнца до планеты – цели экспедиции и скорость аппарата при приближении к этой планете. Запишем уравнения законов сохранения момента импульса (II закон Кеплера) и энергии для этих двух точек орбиты:

$$RV = rv,$$

$$\frac{V^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r}.$$

Здесь M – масса Солнца. Выражая величину v из первого уравнения и подставляя во второе, получаем:

$$V^2 = \frac{2GMr}{R(R+r)} = V_0^2 \frac{2r}{R+r}.$$

Величина V_0 есть орбитальная скорость Земли, равная 29.8 км/с. Подставляя значения r для обеих планет, получаем значения V , равные 27.3 км/с для полета к Венере и 32.7 км/с для полета к Марсу. Перейдя к системе отсчета, связанной с Землей, с которой производится старт, получаем, что скорость аппарата после преодоления земного притяжения должна составить 2.5 км/с для аппарата к Венере и 2.9 км/с для аппарата к Марсу. Выходит, что марсианская экспедиция требует несколько больших энергозатрат, чем полет такого же аппарата к Венере.

3.20. Если Солнце находится на горизонте, то оно либо только что взошло, либо скоро зайдет, либо, если дело происходит в полярных широтах, движется вдоль горизонта. Если Солнце восходит, то Луна восходит вслед за ним, уже сходя с солнечного диска. Если Солнце близится к заходу, то Луна, напротив, только вступает на диск Солнца. В обоих случаях полное затмение, даже если оно и произойдет на Земле, в данном пункте видно не будет. Наконец, если дело происходит в полярных широтах, полное солнечное затмение также не сможет наступить, так как в этой широтной полосе Луна не может перемещаться по диску Солнца в вертикальном направлении.

3.21. Имея в своем распоряжении такой фотометр, жители далекой планеты могли бы попробовать зарегистрировать падение блеска Солнца, связанное с прохождением по его диску самой большой

планеты Солнечной системы – Юпитера. Диаметр этой планеты в 9.7 раз меньше солнечного, и во время прохождения яркость Солнца уменьшится примерно на одну сотую часть. Если блеск Солнца на этой планете будет в 100 раз ярче, чем у звезды 20^m , то есть 15^m , то задача обнаружения планетной системы около Солнца вполне могла бы быть решена. Учитывая, что абсолютная звездная величина Солнца немногим ярче 5^m , такое могло произойти на расстоянии до 1 кпк от Солнца, но, увы, только вблизи плоскости орбиты Юпитера.

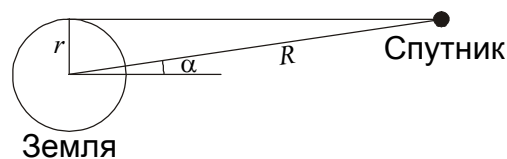
3.22. Центр круговой орбиты спутника находится в центре Земли. Если в каком-нибудь пункте Земли спутник оказывается в зените, то противоположная точка орбиты спутника попадает в надир. Однако спутник регулярно проходит через зенит, но никогда не приходит в надир, даже более – вообще не заходит за горизонт. Такое может быть только в том случае, если обращение спутника синхронизовано с вращением Земли, то есть период спутника T равен одним звездным суткам (около 23ч56м). Радиус этой орбиты равен

$$R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3},$$

что составляет 42.16 тысяч километров (здесь M – масса Земли). По размерам орбиты спутник похож на геостационарный, отличаясь от него существенным наклоном орбиты к экватору. Вычислим величину этого наклона, а также широту места наблюдения. Решим сначала эту задачу в приближенном виде, пренебрегая параллактическим смещением спутника (тем самым, считая размеры Земли много меньше размеров орбиты спутника).

По прошествии одних суток спутник возвращается в ту же точку неба. Предположим, что за это время спутник один раз попал в зенит и один раз опустился к горизонту. Когда спутник находился в зените, его склонение было равно φ , географической широте места наблюдения. Через 12 часов спутник имел склонение $-\varphi$. Сделав вместе с Землей половину оборота, он вновь находился на небесном меридиане и одновременно на горизонте. Из этого можно сделать вывод, что широта точки наблюдения составляла $\pm 45^\circ$. Наклонение орбиты спутника к экватору не может быть меньше 45° , однако не может быть и больше, так как в этом случае спутник заходил бы за горизонт.

Однако возможна и другая ситуация, при которой спутник будет проходить через зенит дважды в сутки и дважды в сутки опускаться к противоположным сторонам горизонта. Такая ситуация реализуется на экваторе при наклонении орбиты спутника к экватору под прямым углом. В обеих ситуациях спутник будет касаться горизонта на небесном меридиане, в точках севера или юга.



Скорректируем теперь полученные решения, учитывая параллактическое смещение спутника. Оно не влияет на его положение, когда он находится в зените, но существенно уменьшает его высоту вблизи горизонта. Спутник окажется уже на горизонте, когда его высота без учета параллакса составит

$$\alpha = \arcsin \frac{r}{R} = 8.7^\circ,$$

где r – радиус Земли. При этом его азимут не изменится, и он останется на небесном меридиане. Поэтому наша задача сводится к решенной выше, только наименьшая высота спутника должна быть равна не нулю, а углу α . Такому условию удовлетворяют широта места и наклонение спутника, равные

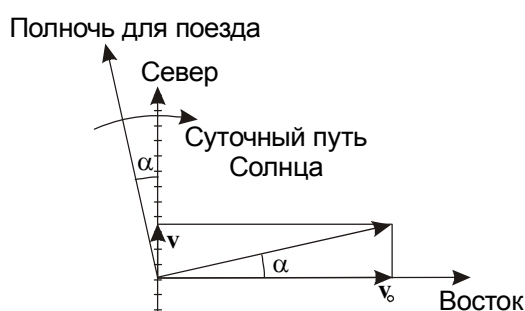
$$i_{1,2} = \pm(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \pm 40.65^\circ$$

в случае одного прохождения зенита в сутки. Два прохождения спутником зенита в сутки будут иметь место по-прежнему на экваторе, однако наклонение орбиты спутника будет равно

$$i_{3,4} = \pm(90^\circ - \alpha) = \pm 81.3^\circ.$$

10-11 классы

3.23. В 00ч00м по местному времени как для пассажира поезда, так и для неподвижного наблюдателя, стоящего рядом на станции, Солнце будет располагаться неглубоко под горизонтом точно в северном направлении. Однако, для пассажира этот момент не будет являться истинной солнечной полночью, так как Солнце в это время будет уже подниматься к горизонту за счет движения поезда. Полночь для него наступит раньше, и ее время можно определить с неплохой точностью, не прибегая к сложным тригонометрическим вычислениям.



Наблюдатель, стоящий на станции, только кажется неподвижным, на самом деле он движется вместе с вращающейся Землей в восточном направлении со скоростью

$$v_0 = \frac{2\pi R \cos \varphi}{T},$$

равной 835 км/ч. Здесь R – радиус Земли, T – продолжительность солнечных суток, φ – широта места наблюдения. Истинная солнечная полночь для этого наблюдателя наступает, когда Солнце располагается точно на севере, перпендикулярно направлению движения наблюдателя. Скорость движения пассажира поезда складывается из скорости вращения Земли v_0 и движения поезда v (рисунок) и направлена под углом α к параллели

$$\alpha = \arctg\left(\frac{v}{v_0}\right) = 8.2^\circ.$$

В этом случае полночь застанет Солнце не на севере, а в 8.2° левее. Учтем, что путь Солнца в это время проходит вблизи горизонта и практически параллелен ему, а за сутки Солнце проходит на небесной сфере путь $360^\circ \cdot \cos \delta = 331.3^\circ$. Здесь δ – склонение Солнца, составляющее в июне около $+23^\circ$. Расстояние в 8.2° июньское Солнце пройдет за 36 минут, следовательно, самый темный момент ночи пассажир поезда зафиксирует в 23ч24м по местному времени.

3.24. Казалось бы, в условии задачи таится противоречие: Марс вступил в противостояние с Солнцем, находясь в это время на эклипике, то есть, точно в противоположной Солнцу точке неба. Где бы мы не находились, восход Солнца в восточном полукруге горизонта должен произойти одновременно с заходом Марса в западной части неба. Однако, этого противоречия можно избежать, если мы перенесемся в некоторую точку в полярных широтах, где Солнце и Марс будут находиться в точках севера и юга, их суточное движение будет направлено вдоль

горизонта, а пересекать его Солнце и Марс будут уже за счет своего движения по небу относительно звезд.

Вспомним, что во время противостояния Марс движется среди звезд попятно, навстречу движению Солнца. 1 мая Солнце имеет склонение около $+15^\circ$, и оно продолжает увеличиваться. Марс, находясь в противоположной точке неба, имеет склонение -15° , но оно также увеличивается. Поэтому, если мы окажемся на широте $+75^\circ$ в солнечную полночь, мы, к своему удивлению, увидим Солнце, восходящее на севере, и Марс, восходящий на юге!

3.25. Приливы, вызываемые Луной, наблюдались бы на Земле в любом случае, хотя их величина очень быстро уменьшается с расстоянием Луны от Земли. Однако, можно себе представить ситуацию, при которой величина приливов, вызываемых на Земле Луной и Солнцем, была бы одинакова. И если при этом Луна окажется в фазе первой или последней четверти, солнечные и лунные приливы могли бы компенсировать друг друга. Для решения задачи нужно найти радиус орбиты Луны в этом интересном случае.

Приливное ускорение a_T есть разность ускорений притяжения Луны (или Солнца) в точке Земли, ближайшей к Луне, и в центре Земли:

$$a_T = \frac{Gm}{(d-R)^2} - \frac{Gm}{d^2}.$$

Здесь m – масса Луны, d – расстояние до нее, а R – радиус Земли. Учитывая, что размеры Земли значительно меньше расстояния до Луны, это выражение можно переписать как

$$a_T = \frac{2GmR}{d^3}.$$

Лунные приливы будут равны по величине солнечным, если будет выполняться соотношение

$$\frac{2GmR}{d^3} = \frac{2GM}{D^3},$$

где M и D – масса Солнца и расстояние до него. Расстояние до Луны для этого должно быть равным

$$d = D \left(\frac{m}{M} \right)^{1/3},$$

что составляет 498.2 тысячи километров. По третьему закону Кеплера получаем, что звездный период обращения Луны вокруг Земли был бы равен 40.3 суток, а синодический период – 45.3 дня. Дважды за этот период, в первой и последней четверти, то есть раз 22.7 суток, приливов и отливов на Земле наблюдаться не будет.

3.26. Туманность, излучая свет, остается прозрачной, поэтому сквозь нее видны более далекие объекты. В центральной части туманности мы регистрируем излучение как ее передней части, движущейся по направлению к нам, так и удаляющиеся задние области. Скорость расширения туманности связана с длинами волн краев полосы H α соотношением

$$v = c \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}},$$

из которого мы получаем значение скорости, равное 1000 км/с. Считая эту скорость постоянной во времени, получаем, что за 10000 лет радиус туманности достиг $3.16 \cdot 10^{14}$ км или 10 пк. При этом ее видимый диаметр составляет 1° или 0.017 радиан, из чего можно вычислить расстояние до туманности, равное $r = (10 \cdot 2 / 0.017) = 1145$ пк. Вычислим абсолютную звездную величину горячей звезды, подсвечивающей туманность:

$$M = m + 5 - 5 \lg r = -7.3.$$

Светимость этой звезды в 64000 раз превосходит светимость Солнца. К спектральному классу O относятся самые горячие звезды, с температурой поверхности около 50000 К. Радиус звезды определяется из соотношения

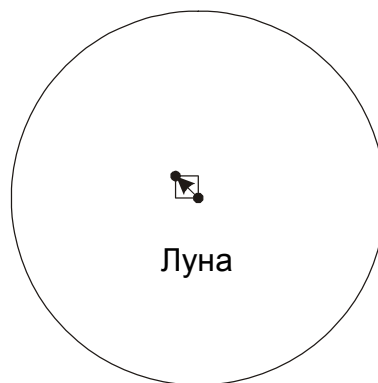
$$\frac{R}{R_0} = \sqrt{\frac{I}{I_0} \left(\frac{T_0}{T} \right)^2}.$$

Здесь R_0 , I_0 и T_0 – радиус, светимость и температура поверхности Солнца. Подставляя численные значения, получаем, что радиус звезды составляет 3.64 радиуса Солнца или 2.54 млн км.

3.27. Полное солнечное затмение произошло незадолго до прохождения Землей точки перигелия (начало января), когда угловой диаметр Солнца был близок к максимальному. Тем не менее, затмение было полным, и притом продолжительным. Такое может быть, только если Луна в этот момент была вблизи точки перигея орбиты.

Кроме этого, дата затмения пришлась практически на момент зимнего солнцестояния, когда Солнце на северном полярном круге едва показывается над горизонтом. Луна в момент затмения находилась вблизи одного из узлов своей орбиты. Если бы это был нисходящий узел, то в течение последующих суток склонение Луны бы не увеличилось (даже немного уменьшилось) и, с учетом параллактического смещения, Луна не могла бы появиться над горизонтом за северным полярным кругом. Следовательно, Луна находилась в восходящем узле своей орбиты.

В день затмения, вблизи точек перигея и восходящего узла орбиты, обе основные либрации Луны – по долготе и широте – были близки к нулю, и передатчик установили в истинный центр видимого полушария Луны. Однако по прошествии недели ситуация изменилась. Угловая скорость обращения Луны по орбите превысила угловую скорость ее вращения вокруг своей оси, и наступила восточная либрация по долготе, а место, куда был установлен передатчик, сместилось на диске Луны влево. Помимо этого, после прохождения восходящего узла Луна поднимется выше эклиптики, наступит южная либрация по широте, и пункт передатчика поднимется вверх (см. рисунок).



Через неделю после затмения, перед Новым Годом, обе либрации достигнут максимума (около 7°). При наблюдении с Земли оба смещения (по широте и долготе) составят $r \cdot \sin 7^\circ = 1.9'$. Здесь r – угловой радиус Луны, который в данный момент будет близок к своему среднему значению ($15.5'$). Полная величина углового смещения передатчика составит $2.7'$.