Решения задач

9 класс

1. Да, может. Южнее параллели 60° ю.ш. созвездие Южного Креста будет проходить точку верхней кульминации высоко над горизонтом к северу от зенита.

2. Долгота точки наблюдения составляет 83° или 5ч32м. Именно настолько полдень в этой точке будет происходить раньше, чем на нулевом меридиане. Пренебрегая уравнением времени, получаем, что полдень в точке наблюдения наступит в 6ч28м по всемирному времени (или времени нулевого меридиана). Однако разница поясного и всемирного времени в данной точке в день летнего солнцестояния составляет 7 часов: 5 часов в соответствии с номером часового пояса плюс 1 час (декретное время) и еще плюс 1 час (летнее время). В итоге, верхняя кульминация Солнца в данной точке будет наблюдаться в 13ч28м.

3. Самолет движется со скоростью v = 800 км/ч относительно точки на экваторе Земли, которая сама движется в ту же сторону за счет осевого вращения Земли. Скорость этого движения определяется формулой

$$v_0 = \frac{2\pi R}{T_0}$$

и составляющей 1674 км/ч. Здесь R – экваториальный радиус Земли (6378.1 км), а T_0 – продолжительность звездных суток (23.933 часа). Полная скорость самолета составляет 2474 км/ч. Двигаясь с такой скоростью, самолет сделает полный оборот вокруг Земли за время

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v+v_0},$$

то есть за 16.22 часа. Здесь h – высота самолета над поверхностью Земли. Чтобы постоянно находиться над самолетом, искусственный спутник должен обращаться вокруг Земли в том же направлении и с тем же периодом T. Радиус орбиты спутника вычисляется из обобщенного III закона Кеплера:

$$r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3},$$

что составляет 32.53 тысячи километров (M – масса Земли). Расстояние между спутником и самолетом будет равно

$$d = r - h - R = 26.14 \text{ тыс. км.}$$

4. Сразу можно сказать, что планета обращается вокруг Солнца в том же направлении, что и Земля. В противном случае, двигаясь навстречу Земле, она оказывалась бы на луче Солнце – Земля чаще одного года, вне зависимости от того, внутренняя эта планета или внешняя.

    Синодический период планеты S, обращающейся вокруг Солнца в том же направлении, что и Земля, равен

$$\frac{1}{S} = \left|\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right|,$$

где T и T_0 – периоды обращения данной планеты и Земли вокруг Солнца. Так как величины S и T_0 равны друг другу, а величина T не может обращаться в бесконечность, мы можем сделать вывод, что выражение под знаком модуля положительно, и период обращения планеты вокруг Солнца T составляет полгода, то есть планета внутренняя. Радиус орбиты планеты a, выраженный в астрономических единицах, вычисляется из периода T в годах по III закону Кеплера:

$$a = T^{2/3} = 0.63 \text{ а.е.}$$

5. Разница в одну звездную величину соответствует отношению яркостей, равному 2.512. Двойная звезда, имеющая блеск 5^m, в 2.512 раза ярче первой из звезд, имеющей блеск 6^m. Следовательно, вторая звезда ярче первой в 1.512 раза.

6. 33-летний цикл календаря Омара Хайяма состоит из 25 годов по 365 дней и 8 годов по 366 дней. Цикл юлианского календаря равен 4 годам, 3 из которых длятся по 365 дней и 1 – 366 дней. Наконец, цикл григорианского календаря составляет 400 лет, из которых 303 года продолжаются по 365 дней и 97 лет длятся по 366 дней. Определим среднюю продолжительность одного года для каждого из этих календарей в сутках:

$$T_1 = \frac{25 \cdot 365 + 8 \cdot 366}{33} = 365.24[24],$$

$$T_2 = \frac{3 \cdot 365 + 1 \cdot 366}{4} = 365.25,$$

$$T_3 = \frac{303 \cdot 365 + 97 \cdot 366}{400} = 365.2425.$$

Истинная продолжительность тропического года составляет 365.24219 суток. Получается, что у всех трех календарей средняя продолжительность года чуть больше, чем требуется, у календаря Омара Хайяма эта разница составляет 0.00023 суток или 20 секунд, у юлианского календаря – 0.00781 суток или 11.25 минут, у григорианского – 0.00031 суток или 27 секунд. Выходит, что календарь Омара Хайяма – самый точный из всех трех, превосходя в точности григорианский календарь в 1.35 раза, а юлианский – в 34 раза.

10 класс

1. Спутать фонарь со звездой можно, если по яркости фонарь не превзойдет самые яркие из звезд. Оценим, на каком расстоянии от наблюдателя фонарь будет выглядеть как звезда 0^m. Для этого сравним его с Солнцем, имеющим звездную величину -26.8^m. Как известно, на площадку площадью 1м^2, перпендикулярную направлению на Солнце за одну секунду попадает 1360 Дж солнечной энергии (эта величина известна как солнечная постоянная, обозначим ее J_0). Количество энергии, попадающей ежесекундно на ту же площадку от фонаря, равно

$$J = J_0 \cdot 10^{-0.4 \cdot 26.8} = 2.59 \cdot 10^{-8} \text{ Дж/с·м}^2.$$

Примем мощность фонаря P равной 300 Вт. Последние две величины связаны соотношением

$$J = \frac{P}{4\pi R^2},$$

где R – расстояние от фонаря для наблюдателя (поглощением света в атмосфере пренебрегаем). Подставляя численные данные, получаем, что это расстояние равно 30 км. Это больше, чем радиус видимости в обычной равнинной местности. Поэтому все видимые нами уличные фонари на равнине выглядят ярче звезд. Увидеть столь далекий фонарь и спутать его со звездой можно лишь в горах.

2. Долгота точки наблюдения составляет 83° или 5ч32м. Именно настолько полдень в этой точке будет происходить раньше, чем на нулевом меридиане. Пренебрегая уравнением времени, получаем, что полдень в точке наблюдения наступит в 6ч28м по всемирному времени (или времени нулевого меридиана). Однако разница поясного и всемирного времени в данной точке в день летнего солнцестояния составляет 7 часов: 5 часов в соответствии с номером часового пояса плюс 1 час (декретное время) и еще плюс 1 час (летнее время). В итоге, верхняя кульминация Солнца в данной точке будет наблюдаться в 13ч28м.

3. Самолет движется со скоростью v = 800 км/ч относительно точки на экваторе Земли, которая сама движется в ту же сторону за счет осевого вращения Земли. Скорость этого движения определяется формулой

$$v_0 = \frac{2\pi R}{T_0}$$

и составляющей 1674 км/ч. Здесь R – экваториальный радиус Земли (6378.1 км), а T_0 – продолжительность звездных суток (23.933 часа). Полная скорость самолета составляет 2474 км/ч. Двигаясь с такой скоростью, самолет сделает полный оборот вокруг Земли за время

$$T = \frac{2\pi(R + h)}{v + v_0},$$

то есть за 16.22 часа. Здесь h – высота самолета над поверхностью Земли. Чтобы постоянно находиться над самолетом, искусственный спутник должен обращаться вокруг Земли в том же направлении и с тем же периодом T. Радиус орбиты спутника вычисляется из обобщенного III закона Кеплера:

$$r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3},$$

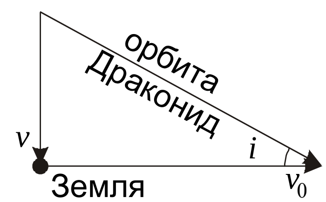
что составляет 32.53 тысячи километров (M – масса Земли). Расстояние между спутником и самолетом будет равно

$$d = r - h - R = 26.14 \text{ тыс. км.}$$

4. Данная в условии задачи скорость Драконид u – это скорость их влета в атмосферу Земли. До сближения с Землей и ускорения в ее поле тяготения скорость метеоров можно определить по закону сохранения энергии:

$$v = \sqrt{u^2 - v_2^2}.$$

Здесь v_2 – вторая космическая скорость для Земли (11.2 км/с). В итоге, геоцентрическая скорость Драконид до сближения с Землей составляет 16.6 км/с и направлена перпендикулярно плоскости орбиты Земли. В свою очередь Земля движется по орбите вокруг Солнца со скоростью v_0, равной 29.8 км/с.



Как видно из рисунка, угол наклона орбиты метеоров равен

$$i = \operatorname{arctg}\frac{v}{v_0} = 29^\circ.$$

5. Пусть в некоторый момент, через время t_0 после старта корабля с Земли отправляется один из импульсов на космический корабль. В системе отсчета, связанной с Землей, этот импульс будет принят на корабле в момент времени

$$t_1 = t_0 + \frac{v \cdot t_0}{c - v} = t_0 \cdot (1 + \frac{v}{c - v}) \approx t_0 \cdot (1 + \frac{v}{c}),$$

где v – скорость корабля, значительно меньшая скорости света. Ответный импульс будет послан через время τ после приема. Расстояние корабля от Земли в это время составит

$$L = v \cdot (t_1 + \tau) = v t_0 (1 + \frac{v}{c}) + v\tau.$$

Ответный импульс будет принят на Земле в момент

$$t_2 = t_1 + \tau + \frac{L}{c} \approx t_0 + 2t_0 \frac{v}{c} + \tau (1 + \frac{v}{c}).$$

Следующий импульс будет отправлен в момент времени $t_0+\Delta t_0$, а принят в момент $t_2+\Delta t_2$. Из последней формулы можно получить

$$\Delta t_2 = \Delta t_0 (1 + \frac{2v}{c}).$$

Подставляя численные значения, получаем, что интервал приема импульсов составит 1020 секунд.

6. По закону Стефана-Больцмана светимость звезды пропорциональна $R^2 T^4$, где R и T – ее радиус и температура. Равенство светимостей при температурах, отличных в два раза, означает, что более холодная звезда имеет радиус, в 4 раза больший, чем у горячей звезды. А при равенстве масс это означает, что плотность более холодной звезды в 64 раза меньше, чем у горячей звезды.

11 класс

1. Спутать фонарь со звездой можно, если по яркости фонарь не превзойдет самые яркие из звезд. Оценим, на каком расстоянии от наблюдателя фонарь будет выглядеть как звезда 0^m. Для этого сравним его с Солнцем, имеющим звездную величину -26.8^m. Как известно, на площадку площадью $1м^2$, перпендикулярную направлению на Солнце за одну секунду попадает 1360 Дж солнечной энергии (эта величина известна как солнечная постоянная, обозначим ее J_0). Количество энергии, попадающей ежесекундно на ту же площадку от фонаря, равно

$$J = J_0 \cdot 10^{-0.4 \cdot 26.8} = 2.59 \cdot 10^{-8} \text{ Дж/с·м}^2.$$

Примем мощность фонаря P равной 300 Вт. Последние две величины связаны соотношением

$$J = \frac{P}{4\pi R^2},$$

где R – расстояние от фонаря для наблюдателя (поглощением света в атмосфере пренебрегаем). Подставляя численные данные, получаем, что это расстояние равно 30 км. Это больше, чем радиус видимости в обычной равнинной местности. Поэтому все видимые нами уличные фонари на равнине выглядят ярче звезд. Увидеть столь далекий фонарь и спутать его со звездой можно лишь в горах.

2. Расстояние между двумя звездами в тесной паре определяется из обобщенного III закона Кеплера:

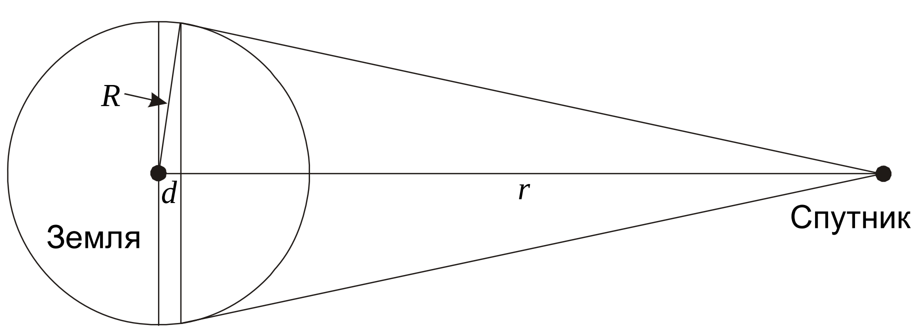
$$a = \left(\frac{G \cdot 2MT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

и составляет 0.21 а.е. Здесь M – масса Солнца, T – период обращения звезд. Третья звезда обращается на расстоянии b = 21 а.е. от данной пары. Период ее обращения можно также найти по III закону Кеплера, однако при этом нужно учесть, что суммарная масса системы составляет уже 3 массы Солнца:

$$t = \left(\frac{4\pi^2 b^3}{G \cdot 3M} \right)^{1/2}.$$

Период получается равным 55.9 лет. Система устойчива, так как разность гравитационных ускорений, придаваемых третьей звездой двум первым звездам, значительно меньше ускорения взаимодействия этих двух звезд.

3. Определим вначале, какую часть поверхности Земли можно увидеть со спутника, находящегося на расстоянии r от ее центра, существенно превышающим радиус Земли (см. рисунок).



Мы видим, что со спутника будет видно меньше половины поверхности Земли. Кроме задней полусферы, в область невидимости попадет узкая полоса вокруг лимба, которую мы можем считать цилиндрической с радиусом, равным радиусу Земли R и шириной d. Из подобия прямоугольных треугольников мы можем записать:

$$\frac{d}{R} = \frac{R}{r}.$$

Доля площади поверхности Земли, видимая со спутника, составит

$$S = \frac{2\pi R^2 - 2\pi Rd}{4\pi R^2} = \frac{1-(R/r)}{2}.$$

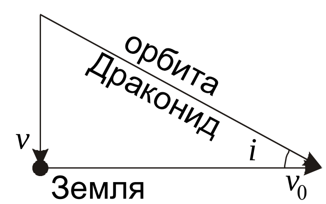
В условии задачи Земля наблюдается с двух спутников, находящихся в перигее и апогее общей орбиты с большой полуосью a и эксцентриситетом e. Области Земли, видимые с этих спутников, не перекрываются, и общая часть поверхности Земли, видимой со спутников, равна сумме частей, видимых с каждого из них. Таким образом,

$$S = \frac{1-\dfrac{R}{a(1+e)}}{2} + \frac{1-\dfrac{R}{a(1-e)}}{2} = 1 - \frac{R}{a} \cdot \frac{1}{1-e^2}.$$

4. Данная в условии задачи скорость Драконид u – это скорость их влета в атмосферу Земли. До сближения с Землей и ускорения в ее поле тяготения скорость метеоров можно определить по закону сохранения энергии:

$$v = \sqrt{u^2 - v_2^2}.$$

Здесь v_2 – вторая космическая скорость для Земли (11.2 км/с). В итоге, геоцентрическая скорость Драконид до сближения с Землей составляет 16.6 км/с и направлена перпендикулярно плоскости орбиты Земли. В свою очередь Земля движется по орбите вокруг Солнца со скоростью v_0, равной 29.8 км/с.



Как видно из рисунка, угол наклона орбиты метеоров равен

$$i = \operatorname{arctg}\frac{v}{v_0} = 29^\circ.$$

5. Пусть в некоторый момент, через время t_0 после старта корабля с Земли отправляется один из импульсов на космический корабль. В системе отсчета, связанной с Землей, этот импульс будет принят на корабле в момент времени

$$t_1 = t_0 + \frac{v \cdot t_0}{c-v} = t_0 \cdot (1 + \frac{v}{c-v}) \approx t_0 \cdot (1 + \frac{v}{c}),$$

где v – скорость корабля, значительно меньшая скорости света. Ответный импульс будет послан через время τ после приема. Расстояние корабля от Земли в это время составит

$$L = v \cdot (t_1 + \tau) = v t_0 \, (1 + \frac{v}{c}) + v\tau.$$

Ответный импульс будет принят на Земле в момент

$$t_2 = t_1 + \tau + \frac{L}{c} \approx t_0 + 2t_0 \frac{v}{c} + \tau \, (1 + \frac{v}{c}).$$

Следующий импульс будет отправлен в момент времени $t_0 + \Delta t_0$, а принят в момент $t_2 + \Delta t_2$. Из последней формулы можно получить

$$\Delta t_2 = \Delta t_0 \, (1 + \frac{2v}{c}).$$

Подставляя численные значения, получаем, что интервал приема импульсов составит 1020 секунд.

6. По закону Стефана-Больцмана светимость звезды пропорциональна $R^2 T^4$, где R и T – ее радиус и температура. Равенство светимостей при температурах, отличных в два раза, означает, что более холодная звезда имеет радиус, в 4 раза больший, чем у горячей звезды. А при равенстве масс это означает, что плотность более холодной звезды в 64 раза меньше, чем у горячей звезды.