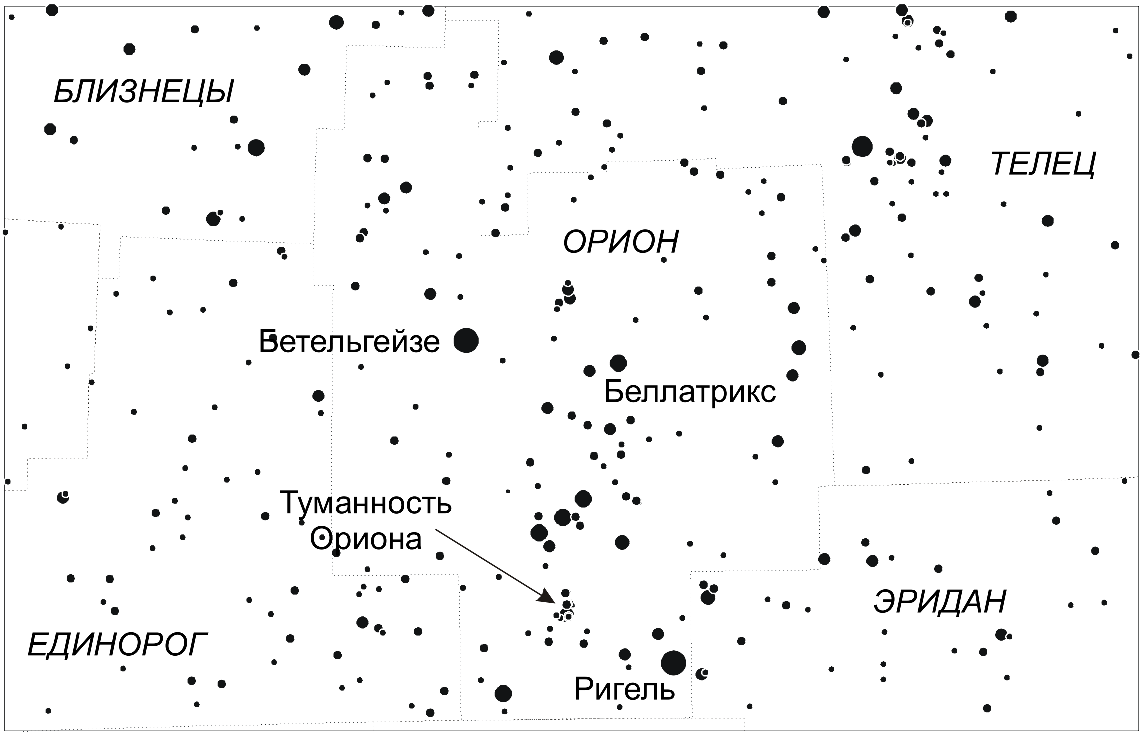
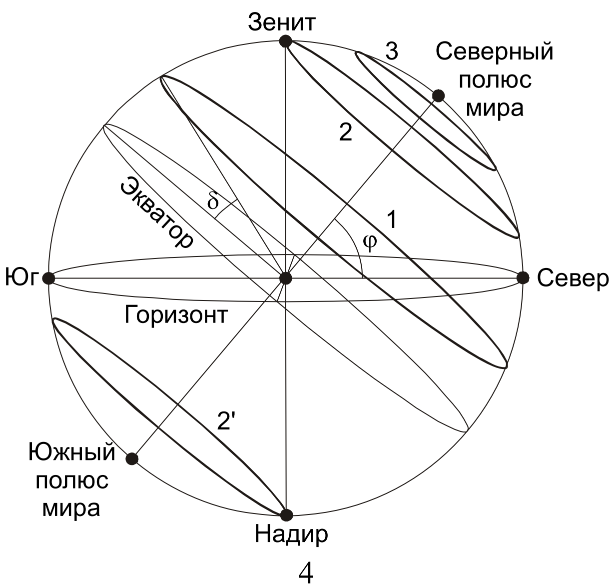
Решения задач

<u>9 класс</u>

1. На рисунке показано созвездие Ориона. Основными объектами этого созвездия являются яркие звезды Бетельгейзе, Ригель и Беллатрикс, три звезды, образующие «пояс Ориона», газовая Туманность Ориона (M42 и M43). Внутри туманности Ориона располагается кратная звезда θ Ориона («Трапеция Ориона»). Эти объекты и соседние созвездия подписаны на звездной карте. Во время проведения олимпиады (январь-февраль) созвездие Ориона хорошо видно, восходя еще до наступления темноты, кульминируя на юге в первой половине ночи и заходя на западе во второй половине ночи.



2. Если верхняя кульминация светила происходит на юге, а нижняя кульминация – на севере (вне зависимости, над или под горизонтом), то по ходу суточного движения это светило проходит восточный и западный круги высоты, и его азимут описывает полный круг в 360°, принимая все возможные значения (см. суточный трек 1 на рисунке). Аналогичная ситуация имеет место в южном полушарии, если светило проходит верхнюю кульминацию на севере, а нижнюю – на юге. Условие задачи в этих случаях выполняться не будет.



Если верхняя и нижняя кульминация происходят с одной стороны от зенита (трек 3 на рисунке), то условие задачи выполнится. Граничный случай соответствует треку 2, проходящему через зенит. Склонение светила, описывающий подобный трек, равно широте места наблюдения. Условие задачи будет выполняться в северном полушарии для светил, чье склонение δ превышает широту места φ. Оно будет также выполняться для светил, движущихся ниже трека 2', то есть светил со склонением, меньшим –φ. В итоге, в северном полушарии условие задачи выполняется, если $|\delta|>\varphi$.

Проводя аналогичные рассуждения для южного полушария, где $\varphi<0$, получаем условие $|\delta|>-\varphi$. Окончательный ответ задачи следующий: азимут светила меняется в пределах 180°, если $|\delta|>|\varphi|$.

3. В соответствии с определением звездной величины, звезда 1^m в 2.512 раза ярче звезды 2^m, которая, в свою очередь, в 2.512 раза ярче звезды 3^m. Если обозначить яркость одной звезды 3^m как j, то яркость одной звезды первой величины, трех звезд второй величины и пяти звезд третьей величины составит соответственно:

$$J_1 = j \cdot 2.512 \cdot 2.512 \approx j \cdot 6.310;$$

$$J_2 = j \cdot 2.512 \cdot 3 = j \cdot 7.536;$$

$$J_3 = j \cdot 5.$$

Выходит, что ярче светят три звезды второй величины.

4. Промежуток времени между двумя последовательными весенними равноденствиями, называемый тропическим годом, составляет 365.24219 средних солнечных суток или примерно 365 суток 5 часов и 49 минут. Календарный год состоит из 365 или 366 суток. Поэтому в разные годы момент весеннего равноденствия может попадать как на 21, так и на 20 марта. К примеру, в 2003 году весеннее равноденствие наступило 21 марта ровно в 1 час по Всемирному времени, а в 2004 году оно произошло 20 марта в 6 часов 49 минут по Всемирному времени.

5. Запишем формулировку обобщенного III закона Кеплера:

$$\frac{a^3}{T^2 M} = \frac{G}{4\pi^2}.$$

Здесь a – большая полуось орбиты (в случае круговой орбиты – ее радиус), T – период обращения, M – суммарная масса планеты и спутника. Так как спутники малые, данная величина равна массе планеты. Линейная скорость орбитального движения спутника по круговой орбите равна

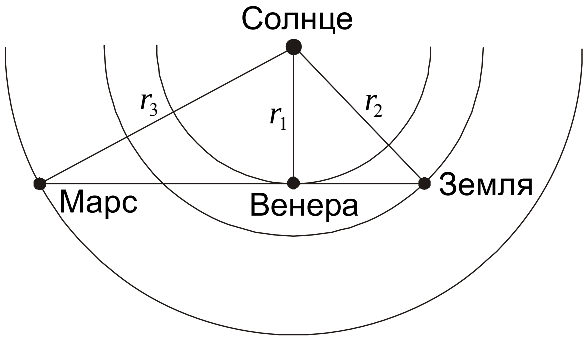
$$v = \frac{2\pi a}{T}.$$

Выражая в этой формуле a через v и подставляя в III закон Кеплера, получаем

$$\frac{v^3 T}{2\pi} = GM.$$

По условию задачи, орбитальные скорости спутников одинаковые, а период обращения у первого спутника вдвое больше, чем у второго. Получается, что масса первой планеты вдвое больше массы второй планеты.

6. Взаимное положение Венеры, Земли и Марса для указанного момента изображено на рисунке.



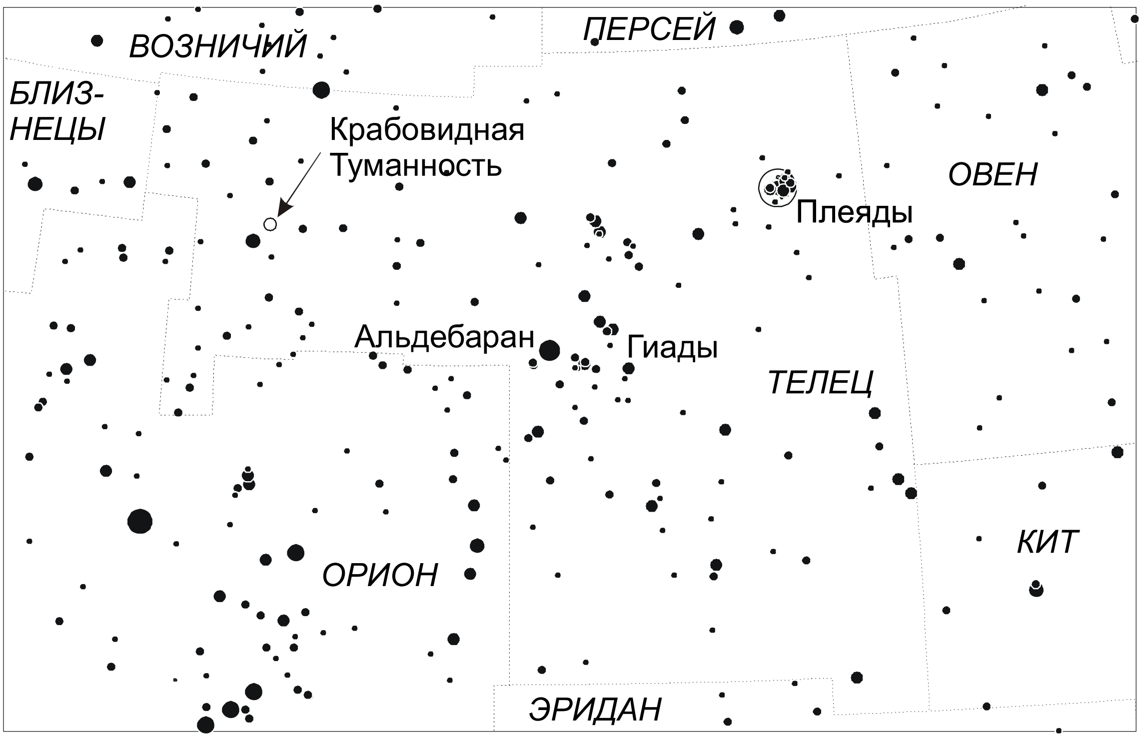
Так как Венера находится в наибольшей элонгации для наблюдателей на Земле и Марсе, линии Земля-Венера и Марс-Венера касаются орбиты Венеры. Следовательно, все три планеты находятся на одной прямой, причем Марс и Земля располагаются по разные стороны от Венеры, так как на Земле элонгация у Венеры восточная, а на Марсе – западная. Обозначая радиусы орбит Венеры, Земли и Марса как r_1, r_2 и r_3, получаем выражение для расстояния между Землей и Марсом:

$$l = \sqrt{r_2^2 - r_1^2} + \sqrt{r_3^2 - r_1^2} = 2.03 \text{ а.е.}$$

10 класс

1. На рисунке изображено созвездие Тельца. Самая яркая звезда этого созвездия – красный Альдебаран. Он проецируется на рассеянное звездное скопление Гиады, хотя сам не входит в это скопление. Гиады занимают достаточно большую площадь на небе. Еще одно рассеянное скопление – Плеяды – также находится в созвездии Тельца, к северо-западу от Гиад. Невооруженным глазом в Плеядах видно 6-7 звезд в виде маленького ковшика. Еще один примечательный объект в созвездии Тельца – Крабовидная Туманность – остаток вспышки сверхновой звезды, наблюдавшейся в 1054 году.

   Объекты созвездия Тельца и соседние созвездия подписаны на звездной карте. Во время проведения олимпиады (январь-февраль) созвездие Тельца хорошо видно в течение первой половины ночи и некоторого времени после полуночи. Лучше всего его наблюдать вечером, когда оно находится высоко в южной части неба.



2. Склонения двух звезд одинаковы, следовательно, между моментами восходов звезд небесная сфера должна повернуться на 60°, то есть сделать 1/6 своего суточного оборота вокруг наблюдателя. Один оборот небесной сферы занимает одни звездные сутки, то есть 23ч56м04с. Шестая часть этой величины составляет 3ч59м20с. В условии задачи не сказано, у какой из звезд прямое восхождение больше. Если прямое восхождение второй звезды меньше, чем у первой, то она взойдет раньше первой звезды на 3ч59м20с, и ее восход придется на 16ч36м52с 23 марта. Если же прямое восхождение второй звезды больше, то ее восход произойдет на 3ч59м20с позже восхода первой звезды, то есть 00ч35м32с уже 24 марта. Чтобы найти время восхода этой звезды 23 марта, вычтем из полученного времени одни звездные сутки (23ч56м04с). В итоге получим 00ч39м28с.

   Окончательный ответ в задаче следующий: восход второй звезды 23 марта мог наблюдаться в 00ч39м28с или в 16ч36м52с.

3. Обозначим световой поток от Солнца через J_0. Тогда количество энергии, падающее за единицу времени на поверхность квадратного зеркала со стороной l под углом γ, равно

$$E = J_0 l^2 \sin\gamma.$$

Эта энергия отражается зеркалом и попадает на стену дома. Так как Солнце не является точечным объектом, а имеет угловой радиус ρ, световое пятно на стене дома будет иметь размер, существенно превышающий размер зеркала и равный

$$S = \pi (L \cdot \rho)^2,$$

где L – расстояние от зеркала до стены, угловой радиус Солнца выражается в радианах. Количество энергии, падающее на единицу площади стены внутри «солнечного зайчика», составит

$$J = \frac{E}{S} = J_0 \frac{l^2 \sin\gamma}{\pi L^2 \rho^2}.$$

Отношение величин падающей энергии от Солнца и от зеркала связаны друг с другом формулой Погсона:

$$\frac{J}{J_0} = 10^{-0.4\cdot(m-M)},$$

где m – звездная величина зеркала при наблюдении из светового пятна, M – звездная величина Солнца. Из последних двух уравнений получаем:

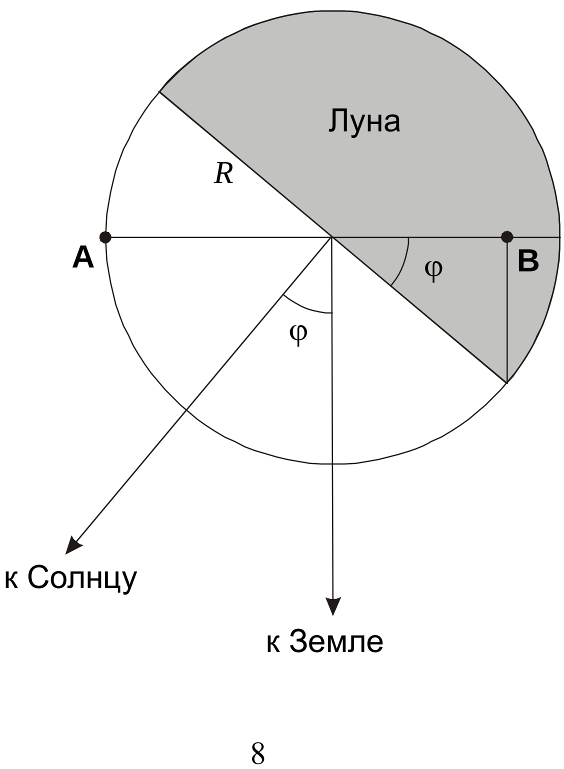
$$l = \sqrt{\frac{\pi}{\sin\gamma}} L\rho \cdot 10^{-0.2\cdot(m-M)}.$$

Подставляя численные значения, получаем, что размер зеркальца составляет около 6 см.

4. Во время полнолуния Солнце и Земля оказываются с одной стороны от Луны, и видимое с Земли полушарие полностью освещено, фаза Луны равна единице. По мере движения Луны угловое расстояние между Солнцем и Землей φ постепенно увеличивается. Если считать орбиту Луны круговой, а ее радиус – много меньшим, чем расстояние до Солнца, то угол φ увеличивается со временем t по линейному закону

$$\varphi = \frac{2\pi(t - t_0)}{T},$$

где t_0 – момент полнолуния, а T – синодический период Луны, равный 29.53 суток.



Фаза Луны есть освещенная доля видимого диаметра нашего спутника, лежащего в плоскости, содержащей Солнце, Землю и Луну. Как видно из рисунка, фаза есть отношение длины отрезка **AB** к диаметру Луны. Значение фазы составляет

$$F = \frac{R + R\cos\varphi}{2R} = \frac{1+\cos\varphi}{2}.$$

Из данной формулы и связи фазы со временем получаем величину времени после полнолуния, в которое фаза Луны впервые принимает значение F:

$$t - t_0 = \frac{\varphi \cdot T}{2\pi} = \frac{\arccos(2F-1)\cdot T}{2\pi}.$$

Для фазы 0.90 и 0.15 получаем величины времени: 3 и 11 суток.

5. Запишем формулировку обобщенного III закона Кеплера:

$$\frac{a^3}{T^2 M} = \frac{G}{4\pi^2}.$$

Здесь a – большая полуось орбиты (в случае круговой орбиты – ее радиус), T – период обращения, M – суммарная масса планеты и спутника. Так как спутники малые, данная величина равна массе планеты. Линейная скорость орбитального движения спутника по круговой орбите равна

$$v = \frac{2\pi a}{T}.$$

Выражая в этой формуле a через v и подставляя в III закон Кеплера, получаем

$$\frac{v^3 T}{2\pi} = GM.$$

По условию задачи, орбитальные скорости спутников одинаковые, а период обращения у первого спутника вдвое больше, чем у второго. Получается, что масса первой планеты вдвое больше массы второй планеты.

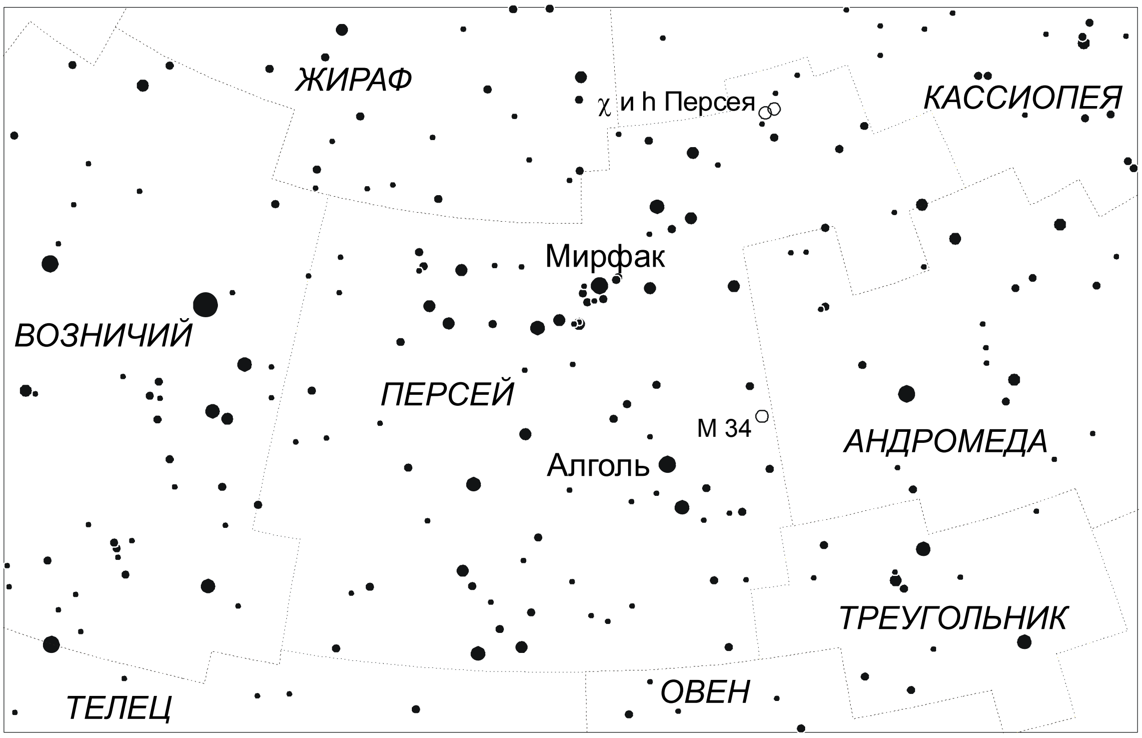
6. Во время полного лунного затмения видимая яркость Луны уменьшается в тысячи раз, а цвет нашего спутника приобретает красный оттенок. Объектив телескопа с диаметром 5 см (в 8.3 раза больше зрачка человеческого глаза) собирает в 69 раз больше света, чем глаз. Но при увеличении в 20 крат видимая площадь Луны и ее изображения на сетчатке глаза становится в 400 раз больше, и количество света, падающее на единицу площади сетчатки глаза, оказывается примерно в 6 раз меньшим, чем при наблюдении Луны невооруженным глазом без телескопа.

Для нормального восприятия света различной яркости наши глаза оснащены двумя типами светочувствительных клеток: колбочками и палочками. Колбочки воспринимают яркий свет, различая его цвета. Палочки включаются в ночных условиях (или в темном помещении). Они способны улавливать свет маленькой интенсивности, но не различают его цвет. Поэтому мы способны оценивать цвет ярких звезд 1-2 звездной величины, которые «видят» колбочки, а более слабые звезды кажутся нам белыми.

Яркость потемневшей во время затмения Луны близка к пределу видимости колбочками, замечающими ее красный цвет. Уменьшения ее поверхностной яркости в 6 раз может оказаться достаточно, чтобы Луна стала неразличимым для колбочек объектом. К ее наблюдению подключатся палочки, но Луна предстанет нашему взору уже не красным, а буро-серым диском. Необходимо отметить, что во время особенно темных лунных затмений красный цвет нашего спутника незаметен и для невооруженного глаза.

11 класс

1. На рисунке показано созвездие Персея. Самая яркая звезда созвездия – Мирфак, а вторая по яркости звезда – Алголь – является самой известной затменной переменной звездой. Находясь в Млечном Пути, созвездие содержит множество рассеянных звездных скоплений. Самое яркое из них – двойное скопление χ и h Персея, выделяется также скопление M34. Объекты созвездия Персея и соседние созвездия подписаны на звездной карте. Большая часть созвездия Персея не заходит под горизонт в средней полосе России. Во время проведения олимпиады (январь-февраль) созвездие Персея хорошо видно в течение первой половины ночи, находясь очень высоко над горизонтом. После полуночи созвездие опускается ниже в северо-западную область неба.



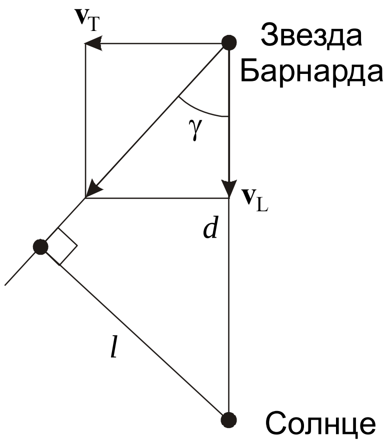
2. По данным условия задачи, расстояние до звезды Барнарда в настоящий момент составляет

$$d = 1/\pi = 1.83 \text{ пк},$$

где π – параллакс звезды. Тангенциальная скорость равна

$$v_T = \alpha\, d = \alpha/\pi = 18.8 \text{ а.е./год} = 89.3 \text{ км/с}.$$

Здесь α – собственное движение звезды Барнарда.



Лучевая скорость звезды v_L равна –111 км/с. Знак минус указывает, что звезда Барнарда приближается к Солнцу, двигаясь под углом

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left|\frac{v_T}{v_L}\right| = 38.8°$$

относительно направления на Солнце. Минимальное расстояние между Солнцем и звездой Барнарда составит

$$l = d\sin\gamma = 1.15 \text{ пк.}$$

Время, оставшееся до максимального сближения звезды Барнарда и Солнца, равно

$$\Delta t = \frac{d\cos\gamma}{\sqrt{v_L^2 + v_T^2}},$$

что составляет примерно 9800 лет. Нам остается определить звездную величину звезды Барнарда m в это время. Обозначим ее звездную величину в настоящее время как m_0. Тогда искомая звездная величина составит

$$m = m_0 + 5\lg\frac{l}{d} = m_0 + 5\lg\sin\gamma = 8.51.$$

3. Так как зеркало находится прямо над наблюдателем, а солнечные лучи падают (и отражаются) под углом γ=50° к плоскости зеркала, нетрудно установить, что в точке наблюдения на Земле Солнце находится на глубине 10° под горизонтом, то есть уже темно, но спутник находится вне тени Земли и освещается Солнцем. Зеркало «Прогресса М-15» будем считать квадратным со стороной L. Количество энергии, падающее за единицу времени на поверхность этого зеркала, равно

   $$E = J_0 L^2 \sin\gamma.$$

   Эта энергия отражается зеркалом и попадает на поверхность Земли. Так как Солнце не является точечным объектом, а имеет угловой радиус ρ, световое пятно на Земле будет иметь размер, много больший размера зеркала. Площадь этого пятна будет равна

   $$S = \pi (H \cdot \rho)^2,$$

   где H – высота аппарата «Прогресс М-15», а угловой радиус Солнца выражается в радианах. Количество энергии, падающее на единицу площади Земли внутри светового пятна, составит

   $$J = \frac{E}{S} = J_0 \frac{L^2 \sin\gamma}{\pi H^2 \rho^2}.$$

   Чтобы выразить эту величину в лунеттах, нужно разделить ее на количество энергии, падающее на единицу площади поверхности Земли от полной Луны в зените J_L:

   $$\frac{J}{J_L} = \frac{J_0}{J_L} \cdot \frac{L^2 \sin\gamma}{\pi H^2 \rho^2} = 10^{-0.4\cdot(M-m)} \cdot \frac{L^2 \sin\gamma}{\pi H^2 \rho^2}.$$

   Здесь M и m – звездные величины Солнца и Луны. Подставляя численные значения, получаем 16 лунетт.

4. Промежуток времени между двумя последовательными весенними равноденствиями, называемый тропическим годом, составляет 365.24219 средних солнечных суток или примерно 365 суток 5 часов и 49 минут. Календарный год состоит из 365 или 366 суток. Поэтому в разные годы момент весеннего равноденствия может попадать как на 21, так и на

20 марта. К примеру, в 2003 году весеннее равноденствие наступило 21 марта ровно в 1 час по Всемирному времени, а в 2004 году оно произошло 20 марта в 6 часов 49 минут по Всемирному времени.

От 20 марта 2004 года до 20 марта 2081 года пройдет 77 лет, и в этот промежуток попадет 19 дней 29 февраля (через 4 года от 2008 до 2080 годов). Общее количество дней, которые будет содержать этот отрезок, равно

$$N = 365 \cdot 77 + 19 = 28124.$$

Умножая продолжительность тропического года на 77, получаем продолжительность 77 тропических лет в сутках:

$$T_{77} = 365.24219 \cdot 77 = 28123.64863.$$

Эта величина на 8 часов и 26 минут короче, чем N суток. 77 тропических лет завершатся быстрее, и весеннее равноденствие в 2081 году придется на 8 часов 26 минут раньше, чем в 2004 году, то есть на 22 часа 23 минуты по Всемирному времени 19 марта.

5. Обозначим большую полуось орбиты спутника через a, а ее эксцентриситет через e. Скорость спутника в точке перигея составляет

$$v_P = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}}.$$

Здесь M – масса Земли. В то же время эта скорость равна второй космической скорости на апогейном расстоянии спутника, равном $a(1+e)$:

$$v_P = \sqrt{\frac{2GM}{a(1+e)}}.$$

Из данных формул мы получаем уравнение

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{2}{1+e},$$

которое можно переписать в виде

$$e^2 + 4e - 1 = 0.$$

Уравнение имеет два решения:

$$e = -2 \pm \sqrt{5}.$$

Физический смысл имеет только решение со знаком «+». Эксцентриситет орбиты спутника равен 0.236.

6. По закону Стефана-Больцмана светимость звезды составляет

$$L = 4\pi^2 \sigma R^2 T^4,$$

где σ – постоянная Стефана-Больцмана, R и T – радиус и температура поверхности звезды. Как известно, красные и голубые сверхгиганты имеют практически одинаковую светимость L. Это отражается на диаграмме Герцшпрунга-Рассела, на которой ветвь сверхгигантов имеет горизонтальный вид. В то же время голубые сверхгиганты значительно горячее красных. Следовательно, чтобы обеспечить такую же светимость, красные сверхгиганты должны быть существенно больше голубых сверхгигантов.