XIX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2012

19 февраля

5–6 классы

---

1. На какое полушарие Луны — видимое или невидимое — падает в среднем больше солнечного света и почему?

Решение:

Есть две причины, из-за которых невидимое полушарие Луны будет получать в среднем больше солнечного света.

Во-первых, когда на невидимом полушарии Луны день, Луна оказывается в среднем ближе к Солнцу (поскольку при этом Луна расположена между Солнцем и Землей). Во-вторых, на обратной стороне Луны никогда не бывает солнечных затмений (происходящих тогда, когда на Земле наблюдается лунное затмение). Обе эти причины приводят к тому, что больше солнечного света будет падать на невидимую сторону Луны.

2. В начале февраля Юпитер в Петербурге был виден в течение 8 часов на вечернем и ночном небе. Нарисуйте взаимное расположение в пространстве Земли, Юпитера и Солнца в начале февраля. На рисунке укажите направление движения планет по орбитам.

Решение:

В начале февраля темное время в Петербурге продолжается заведомо больше 8 часов, поэтому, если Юпитер виден на вечернем и ночном небе, то в течение части ночи и утром он не виден. Так как изменение видимости не связано с посветлением неба, получается, что в какой-то момент ночью Юпитер заходит под горизонт. Следовательно, Юпитер восходит над горизонтом раньше захода Солнца и заходит за горизонт раньше восхода Солнца. Так как небо «движется» с востока на запад (в северном полушарии, при взгляде на юг, слева направо), то Юпитер в начале февраля находился к востоку (слева) от Солнца для наблюдателя из Петербурга.

Юпитер — яркая планета, поэтому он начинает быть виден практически сразу после захода Солнца. В начале февраля он виден в течение 8 часов, а потом заходит под горизонт, так что моменты захода Солнца и Юпитера различаются на 8 часов. Следовательно, угол Юпитер–Земля–Солнце не может быть очень малым, но и не близок к 180°.

Нарисуем рисунок. Будем смотреть на Солнечную систему со стороны северного полюса Земли. В этом случае планеты движутся по своим орбитам против часовой стрелки. На рисунке изобразим Солнце, Землю, орбиту Земли вокруг Солнца и орбиту Юпитера (в идеале с в 5 раз большим, чем у орбиты Земли, радиусом). Затем проведем линию от Земли к Солнцу. Она изображает направление, в котором наблюдатель с Земли видит Солнце. Затем проведем линию, изображающую направление, в котором виден Юпитер. Она пройдет под углом примерно $80^\circ \div 120^\circ$ к первой в левую от нее сторону. В точке, где эта линия пересечет орбиту Юпитера, и будет находиться Юпитер.

3. В каждом календарном году есть такой месяц, что количество дней этого месяца и распределение чисел в нем по дням недели оказываются одинаковыми с некоторым другим месяцем, отстоящим от первого не более чем на год. Найдите оба этих месяца.

Решение:

Первый вывод, который можно сделать из условия задачи — февраль не может являться ни одним из искомых месяцев (поскольку в году нет другого месяца с таким же количеством дней). Более того, февраль не может находиться и между двумя искомыми месяцами, поскольку количество дней в феврале меняется (из-за наличия високосных лет), и условие одинакового распределения чисел месяцев по дням недели не сможет быть выполнено одновременно и в високосном, и в невисокосном годах.

Следовательно, искомые два месяца находятся либо в группе месяцев с продолжительностью 31 день: март–май–июль–август–октябрь–декабрь–январь (январь следующего года отстоит от марта менее чем на год), либо в группе месяцев с продолжительностью 30 дней: апрель–июнь–сентябрь–ноябрь.

Далее найти ответ можно просто полным перебором вариантов, однако их все же достаточно много (27), поэтому стоит упростить задачу. Для того, чтобы распределение чисел по дням недели совпадало, между первыми числами искомых месяцев должно пройти число дней, нацело делящееся на 7. Поскольку все месяцы (кроме уже исключенного февраля) содержат либо 30, либо 31 день, то можно заметить, что:

- 30 и 31 на 7 не делятся, поэтому два последовательных месяца не могут быть ответом;
- $30 + 31 = 61$ и $31 + 31 = 62$ также не делятся на 7, поэтому и промежуток в два месяца не подходит (случай $30 + 30$, хотя тоже не годится, просто не реализуется — двух последовательных месяцев по 30 дней не существует);
- $30+31+30 = 91$ подходит по критерию делимости на 7, однако четвертый по порядку месяц в этом случае тоже должен содержать 30 дней, и получается, что нам надо иметь два месяца по 30 дней подряд, чего не бывает;
- Любые другие комбинации трех месяцев будут давать суммарное расстояние 92 дня (делится на 7 с остатком 1), четыре месяца будут содержать не менее $30+31+30+31 = 122$ дней и не более $31 + 30 + 31 + 31 = 123$ дней, что также не подходит;
- пять месяцев в сумме всегда содержат 153 дня (и это число не делится на 7), шесть месяцев содержат либо $153 + 30 = 183$, либо $153 + 31 = 184$ дня, и оба эти числа не делятся на 7.

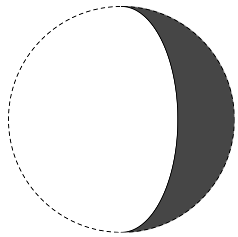
В итоге можно сделать вывод, что искомые два месяца отстоят друг от друга более чем на полгода. Тем самым от 27 вариантов остается только четыре: март–декабрь, март–январь, май–январь, апрель–ноябрь. Их уже можно проверить непосредственно (или продолжить цепочку рассуждений, приведенных выше) и получить единственный ответ: такими месяцами являются май и январь (следующего календарного года).

4. Через четыре дня, 23 февраля, Луна сблизится с Меркурием. Еще через четыре дня, 27 февраля, Луна сблизится с Юпитером. Как будет выглядеть Луна при сближении с Юпитером? Сделайте рисунок и объясните свой ответ.

Решение:

Меркурий — внутренняя планета и не отходит на небе далеко от Солнца. Следовательно, когда Луна сближается с Меркурием, она находится на небе совсем рядом с Солнцем, и можно считать, что в этот момент Луна практически в новолунии. Луна быстро движется вокруг Земли и, следовательно, по небу, совершая полный оборот примерно за месяц (точнее, за 27.3 суток). Примерно за то же время (более точно за 29.5 суток) происходит полная смена фаз Луны, т.е. от одного новолуния до другого проходит около 30 дней. Будем считать, что площадь видимого диска Луны, освещенная Солнцем, увеличивается равномерно. Через полмесяца после новолуния наступает полнолуние, т.е. за 15 дней диск Луны из полностью неосвещенного становится полностью освещенным. Таким образом, за 4 дня, прошедших от новолуния, освещенная площадь увеличится от 0 до 4/15 части полного диска Луны. Стало быть, при сближении с Юпитером будет освещено чуть больше четверти диска Луны. Бóльшая точность расчетов не требуется, т.к. ответом должен являться рисунок, а его точнее не нарисовать.

Теперь надо понять, с какой стороны будет освещен диск. Луна движется вокруг Земли против часовой стрелки, если смотреть из северного полушария. Следовательно, она будет отодвигаться от Солнца влево (к востоку), так что освещена будет правая часть Луны, т.е. Луна будет растущей и будет выглядеть как на рисунке:



Можно решать задачу несколько другим образом. За месяц Луна делает полный оборот в 360°, так что за сутки она смещается примерно на 12°, и за 4 дня, к моменту встречи с Юпитером, отойдет от Меркурия и, следовательно, от Солнца почти на 50°. Чтобы Луна стала полной, она должна отойти от Солнца на 180°. Таким образом, освещенной окажется 50/180 часть лунного диска, что, опять же, несколько больше четверти.

5. Оцените среднее число видимых невооруженным глазом звезд, покрытия которых Луной можно будет наблюдать в течение одного месяца, если известно, что видимый угловой диаметр диска Луны составляет $30'$, а одна звезда в среднем приходится на 7 квадратных градусов неба.

Решение:

Луна в своем движении среди звезд заметает полоску шириной $0^\circ.5$ и длиной 360°. Площадь этой полоски равна $0.5 \cdot 360 = 180$ кв. градусов. Таким образом, в среднем в течение месяца можно наблюдать покрытия Луной 180/7, т.е. около 25 звезд.

XIX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2012

10 марта

---

9 класс

---

1. Где на небесной сфере находятся звезды, расстояния до которых при наземных наблюдениях можно определить со сравнительно более высокой точностью? К каким созвездиям эти звезды принадлежат?

Решение:

Наибольшую точность при определении расстояний дает метод годичного параллакса (определение изменения видимых координат звезды при наблюдении ее из разных точек земной орбиты). Очевидно, что результаты метода будут точнее в том случае, если наблюдения можно будет вести при всех положениях Земли на орбите. Однако для звезд, находящихся недалеко от эклиптики, это невозможно — каждый год в течение некоторого времени рядом с ними на небесной сфере будет находиться Солнце, наблюдать звезды с поверхности Земли при этом невозможно. Поэтому лучшие результаты могут быть получены для звезд, находящихся на наибольшем угловом расстоянии от эклиптики — в окрестности полюсов эклиптики. Ответом на второй вопрос задачи будут созвездия, в которых находятся полюса эклиптики — созвездия Дракона и Золотой Рыбы.

2. 23 января 1999 года был зарегистрирован мощный гамма-всплеск. После определения расстояния до его источника оказалось, что суммарная энергия выделившегося при всплеске излучения составила $3 \cdot 10^{47}$ Дж (в предположении, что излучение было изотропным — одинаковым во всех направлениях). Одним из возможных вариантов объяснения гамма-всплеска является схема, при которой образовавшееся при вспышке обычной сверхновой излучение испускается в узком конусе. Оцените величину угла раскрыва (т.е. угла при вершине) для такого конуса, если у средней сверхновой суммарная энергия излучения составляет $\approx 2 \cdot 10^{42}$ Дж.

Решение:

Энергия, попавшая в конус, относится к предполагаемой общей энергии излучения так же, как площадь, вырезаемая конусом на небесной сфере — к общей площади небесной сферы. Учитывая, что общая площадь небесной сферы составляет около $4 \cdot 10^4$ квадратных градусов, получаем, что площадь, вырезаемая конусом, равна

$$S = 4 \cdot 10^4 \cdot \frac{2 \cdot 10^{42}}{3 \cdot 10^{47}} \approx 0.3 \text{ квадратных градуса.}$$

Так как площадь круга радиуса R равна $S = \pi R^2$, угол раскрыва составляет

$$2R = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 0^\circ.6$$

3. Известно, что когда Вега находится в зените, от нее на каждый квадратный сантиметр поверхности земли приходит около 10^6 фотонов за секунду. Оцените, сколько фотонов за одну секунду приходит на главное зеркало космического телескопа им.Хаббла (HST) от объекта с видимой звездной величиной $+30^m$. Диаметр главного зеркала HST составляет 2.4 метра.

Решение:

Известно, что уменьшение освещенности (в частности, количества фотонов, падающих за единицу времени на единицу площади) на два порядка эквивалентно увеличению видимой звездной величины на 5^m. Следовательно, так как блеск Веги и наблюдаемого на HST объекта отличаются на 30^m, освещенность, создаваемая объектом¸ меньше освещенности от Веги в 10^{12} раз. Поглощением излучения Веги в атмосфере мы пренебрежем ввиду его малости (блеск Веги из-за него возрастает примерно на $0^m.2$).

Таким образом, на каждый квадратный сантиметр зеркала HST от нашего объекта прилетает в среднем $E = 10^{-6}$ фотонов в секунду. Вычислим площадь зеркала $S = \pi R^2 \approx 3 \cdot (120)^2 \approx 4 \cdot 10^4$ см^2. Тогда общее количество фотонов, падающих на зеркало за секунду, равно $N = S \cdot E = 4 \cdot 10^{-2}$. Пожалуй, тогда удобнее говорить о числе фотонов не в секунду, а в минуту (за которую на зеркало падает 2–3 фотона).

Интересно, что, несмотря на столь мизерное количество света, такие объекты на HST наблюдать все же удается. Правда, для получения изображения в таких случаях приходится долго — до нескольких суток — накапливать фотоны, приходящие от объектов.

4. В фильме «Про Красную Шапочку» Звездочет пел песню с такими словами:

> А на Луне, на Луне
> На голубом валуне
> Лунные люди смотрят, глаз не сводят,
> Как над Луной, над Луной
> Каждую ночь шар Земной
> Очень красиво всходит и заходит.

Как Вы думаете, может ли на Луне восходить и заходить Земля? Если да — может ли это происходить каждую ночь? Если это все-таки возможно, укажите примерные селенографические координаты областей на Луне, где можно наблюдать подобное зрелище. Имейте в виду, что селенографическая долгота отсчитывается от нулевого меридиана, проходящего через центр лунного диска во время кольцеобразного солнечного затмения.

Решение:

Первый напрашивающийся ответ — Луна всегда повернута к Земле одной стороной, соответственно, для наблюдателя на Луне Земля всегда находится в одной точке (в т.ч. возможно и под горизонтом), так что ее восход и заход наблюдать нельзя. В первом приближении этот ответ правдоподобен. Однако в действительности ситуация несколько сложнее.

Орбита Луны не является строго круговой. Вследствие II закона Кеплера орбитальная скорость Луны будет больше средней, когда она находится в окрестности перигея своей орбиты, и меньше средней — в окрестности апогея. В то же время угловая скорость вращения Луны вокруг своей оси постоянна. Поэтому при движении по орбите вращение Луны вокруг своей оси то немного обгоняет, то немного отстает от вращения вокруг Земли, вследствие чего Луна для наземного наблюдателя будет немного «покачиваться» вправо-влево (такое колебание называют либрацией по долготе), а Земля для наблюдателя на Луне, соответственно, будет перемещаться вдоль некоторого отрезка на небе.

Кроме этого, орбита Луны наклонена по отношению к плоскости лунного экватора. Из-за этого Луна для земного наблюдателя будет «покачиваться» в вертикальном направлении (это еще один вид либрации — либрация по широте), а Земля на лунном небе будет совершать периодические движения вверх-вниз. Последнее явление, по сути, очень похоже на годичное смещение Солнца на земном небе из-за наклона земного экватора к плоскости эклиптики (из-за которого на Земле существует смена времен года).

Таким образом, получается, что Земля, в среднем находящаяся для наблюдателя на Луне на одном и том же месте неба, совершает вокруг него какие-то периодические движения с некоторой амплитудой (ее величина $\approx 8°$). Если при этом среднее положение Земли для данной точки на Луне окажется рядом с горизонтом, то восход и заход Земли станет вполне реальным. Из сказанного выше следует, что точки, в которых может наблюдаться восход и заход Луны, должны находиться на краях видимого диска Луны (а также отчасти и за этими краями).

Теперь решим вопрос о координатах. Лунный экватор, очевидно, должен проходить примерно через центр диска Луны, иначе либрация по широте была бы намного более заметной (положение «морей» на полной Луне в разные полнолуния было бы разным). Нулевой меридиан по крайней мере в какой-то момент также проходит через центр видимого диска (что указано в условии), а либрация по долготе также достаточно мала (по той же причине — вид Луны в полнолуние почти не меняется). Следовательно, точки, находящиеся примерно на границе видимого диска, могут иметь произвольные широты, а их долготы должны равняться примерно $\pm 90^0$. Это и есть окончательный ответ задачи.

5. Оцените максимально возможное и минимально возможное значение периода обращения кометы вокруг Солнца.

Решение:

Как известно, период обращения тела вокруг Солнца P, выраженный в годах, и большая полуось его орбиты a, выраженная в астрономических единицах, связаны III законом Кеплера:

$$P^2 = a^3.$$

Минимальный период, соответствующий минимальной большой полуоси орбиты, определяется тем, что комета должна находиться вне Солнца — большая полуось ее орбиты не может быть меньше радиуса Солнца (на самом деле, конечно, и комета, летающая практически по «поверхности» Солнца, просуществует очень недолго, но для оценки такую комету можно рассмотреть). Радиус Солнца, выраженный в астрономических единицах, равен примерно 1/220 а.е. (это значение можно получить, вспомнив, что угловой размер Солнца на небе составляет около $30'$), поэтому минимальный период окажется равным

$$P_{\min} = \left(\frac{1}{220}\right)^{3/2} \approx \left(\frac{1}{15}\right)^3 \approx \frac{1}{3000} \text{ года} \approx 3 \text{ часа}.$$

Максимальный период, соответствующий максимальной большой полуоси орбиты, определяется тем, что комета не должна удаляться от Солнца на расстояние, превышающее расстояние до ближайших звезд. В противном случае в окрестности афелия (наиболее удаленной от Солнца точки орбиты) такая комета будет испытывать существенные возмущения со стороны других звезд и с большой вероятностью улетит от Солнца навсегда. Можно также учесть, что наблюдаемые долгопериодические кометы движутся по очень сильно вытянутым орбитам, поэтому максимальное расстояние, на которое они отходят от Солнца, практически равно удвоенной большой полуоси орбиты.

Ближайшая от Солнца звезда (α Центавра) находится на расстоянии 1.3 пк, поэтому примем в качестве оценки максимально возможной большой полуоси $a = 0.5$ пк. Поскольку в 1 парсеке содержится примерно $2 \cdot 10^5$ астрономических единиц (по определению столько же, сколько секунд в радиане), то это означает, что максимально возможный период можно оценить как

$$P_{\max} = (10^5)^{3/2} = 10^{7.5} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ лет} = 30 \text{ млн.лет}.$$

XIX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2012

10 марта

---

10 класс

---

1. Первый открытый белый карлик (достаточно яркий объект с звездной величиной $+8^m.4$) был обнаружен только в 1862 году (кстати, почти точно 150 лет назад). Однако затем он в течение нескольких десятков лет не наблюдался, и доказать, что это действительно белый карлик, удалось только в 1915 году. Почему так произошло?

Решение:

Существует несколько причин, из-за которых возможность наблюдать тот или иной астрономический объект периодически пропадает. Самый распространенный случай — объект находится недалеко от эклиптики и каждый год на некоторое время оказывается недалеко от Солнца (при этом его наблюдения, естественно, практически невозможны). Наблюдению слабых объектов может мешать также находящаяся недалеко на небе Луна. Однако во всех подобных случаях период недоступности для наблюдений заведомо не превышает год, а в рассматриваемом случае наблюдения не проводились почти полвека.

Еще один возможный вариант — вспыхивающий объект с большим интервалом времени между вспышками. Однако, если между вспышками объект не наблюдался, то это означает, что его блеск во время вспышки возрастал более чем на 10^m (проницающая способность телескопов в начале XX века доходила до 20^m), что возможно только для вспышек Новых (которые не повторяются раз в несколько десятков лет).

Остается только один вариант — наш белый карлик должен быть компонентом двойной системы, второй компонент которой намного ярче. Тогда возможна ситуация, при которой белый карлик можно будет наблюдать только тогда, когда он окажется в апоастре своей орбиты (и отойдет на максимально возможное расстояние от напарника). Именно так и было, поскольку первый обнаруженный белый карлик — это Сириус B, рядом с которым находится намного более яркий Сириус A.

2. Обсерватория «Спектр-Р» находится на орбите с большой полуосью 200 тыс. км и расстоянием в апогее 350 тыс.км. Направление параболической антенны, обеспечивающей связь аппарата с наземным центром управления при прохождении перигея орбиты, необходимо корректировать раз в 3 минуты. Передача данных антенной ведется на частоте 15 ГГц. Оцените диаметр этой антенны.

Решение:

Заметим, что, поскольку у орбиты есть апогей и перигей, то это орбита вокруг Земли. Вычислим расстояние до обсерватории в перигее орбиты r_π, зная расстояние в апогее r_α и большую полуось a. Очевидно, что $2a = r_\alpha + r_\pi$, отсюда получаем $r_\pi = 2a - r_\alpha = 50$ тыс. км.

Воспользовавшись известным соотношением (т.н. «интегралом энергии» — одной из форм записи закона сохранения энергии для задачи двух тел)

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

где M — масса Земли, G — гравитационная постоянная, получим скорость движения обсерватории в перигее орбиты, она окажется равной примерно 4 км/с.

Можно также заметить, что, поскольку орбита обсерватории достаточно сильно вытянута, скорость в перигее должна мало отличаться от параболической (второй космической) скорости на расстоянии 50 тыс. км от центра Земли. Вспомнив, что параболическая скорость на поверхности

Земли составляет около 11 км/с и она обратно пропорциональна корню квадратному из расстояния, получаем, что искомая скорость составляет $11 \cdot \sqrt{6.4/50} \approx 4$ км/с (такая оценка завысит результат примерно на 0.1 км/с, что для получения ответа в задаче практически несущественно).

Вычислим угловую скорость движения обсерватории при наблюдении с Земли. Поскольку радиус Земли примерно в 8 раз меньше расстояния до обсерватории в перигее, расстоянием между центром Земли и наземным центром управления можно пренебречь. Получаем $\omega = v/r_\pi = 8 \cdot 10^{-5}$ $с^{-1}$. Из условия следует, что за время τ, равное трем минутам, Земля с точки зрения обсерватории успевает переместиться на угловое расстояние, совпадающее с угловым разрешением антенны (после чего излучение антенны перестает «попадать» на Землю и антенну необходимо поворачивать). Следовательно, угловое разрешение антенны составляет $\omega\tau$. С другой стороны, оно же, как известно, примерно равно $\frac{\lambda}{D}$, где λ — длина волны, на которой работает антенна, а D — ее диаметр. Отсюда получаем, что

$$D = \frac{\lambda}{\omega\tau} = \frac{c}{\nu\omega\tau},$$

где c — скорость света, ν — частота излучения антенны. Подставляя численные данные, получаем итоговый результат — 1.4 метра (реальный диаметр антенны реальной обсерватории чуть больше — 1.5 метра, и этот ответ можно получить при более точных вычислениях).

3. Один рассеянный петербургский астроном-любитель, строивший самодельный телескоп, как-то забыл на подоконнике линзу для будущего объектива. В один прекрасный день он обнаружил, что в ковре, лежащем на полу, прожжена дыра. Известно, что фокусное расстояние линзы равнялось 1 м, подоконник находился на высоте 80 см от пола. Определите примерную дату порчи ковра.

Решение:

Для того, чтобы прожечь ковер, линза должна была сфокусировать на нем излучение Солнца. Отсюда следует, что в тот момент, когда в ковре была прожжена дыра, расстояние от линзы до места прожига равнялось фокусному расстоянию линзы. Исходя из этого, несложно найти высоту Солнца над горизонтом — ее можно определить как угол в прямоугольном треугольнике, гипотенуза которого равна 1 м, а противолежащий катет — 0.8 м. Т.е. требуется найти угол, синус которого равен 0.8.

При наличии калькулятора это очень просто, однако без него все несколько сложнее. Можно сразу же заметить, что искомый угол больше 45° (его синус примерно 0.7) и меньше 60° (его синус около 0.87), причем ближе именно к 60°. Представим искомую высоту h как $h = 60^\circ - \theta$, где θ — некоторый малый угол. В таком случае

$$\sin h = \sin(60^\circ - \theta) = \sin 60^\circ \cos\theta - \cos 60^\circ \sin\theta \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\theta = 0.8$$

(если θ выражен в радианах, то, поскольку он мал, его синус примерно равен самому углу, а косинус — единице). Решаем получившееся уравнение и получаем $\theta \approx 0.13$. Переводя обратно радианы в градусы, получаем, что $\theta \approx 7^\circ$, т.е. высота Солнца над горизонтом составляет около 53°.

Так как широта Петербурга $\varphi = 60^\circ$, то максимальная высота подъема Солнца над горизонтом в нем $h_{\max} = 90^\circ - \varphi + 23^\circ.5 = 53^\circ.5$. Получается, что Солнце прожигало ковер тогда, когда находилось на максимально возможной высоте над горизонтом, т.е. это было в полдень в окрестности дня летнего солнцестояния. Отсюда ответ — ковер пострадал во второй половине июня.

Заметим, что ответ этой задачи можно было бы получить более простым, но менее «честным» способом — исходя из предположения, что он существует. В самом деле, Петербург находится не за Полярным кругом, Солнце в нем каждый день встает и заходит, поэтому на высоте, например, 10° над горизонтом оно может оказаться в течение большей части года (кроме окрестностей зимнего солнцестояния), причем даже по два раза в сутки. Если существует некоторый небольшой интервал дат, являющийся ответом задачи, это означает, что на соответствующей высоте (очевидно, наибольшей) Солнце бывает только в эти даты. Отсюда сразу же следует ответ, и остается только убедиться, что он согласуется с численными данными, приведенными в задаче.

4. Обозначим B видимую звездную величину звезды в полосе B (синей части оптического диапазона), а V — видимую звездную величину в полосе V (желто-зеленой части диапазона). Поглощение межзвездной средой в полосе V определяется формулой $A_V = 3 \cdot E_{B-V}$. Избыток цвета E_{B-V}

определяется как разность наблюдаемого показателя цвета $(B-V)$ и истинного $(B-V)_0$, т.е. $E_{B-V} = (B-V) - (B-V)_0$.

Астроном наблюдает звезду, светящую через облако межзвездной среды. Из наблюдений было получено, что $V = 1^m.8$, а годичный параллакс звезды составил $\pi = 0''.02$. Известно, что для данного типа звезд истинный показатель цвета $(B-V)_0 = -0^m.3$, однако его измеренное значение оказалось равным $(B-V) = 0^m.5$. Найдите истинную $(M_V)_0$ и абсолютную болометрическую звездную величину M_{bol}, если известно, что для этого типа звезд болометрическая поправка $BC = -2^m.8$. Оцените спектральный класс звезды.

Решение:

Несмотря на сложную формулировку, задача решается очень просто — надо лишь внимательно прочитать условие и последовательно вычислять все необходимые величины.

Избыток цвета

$$E_{B-V} = (B-V) - (B-V)_0 = 0.5 + 0.3 = 0^m.8.$$

Следовательно, поглощение в полосе V составляет

$$A_V = 3 \cdot E_{B-V} = 2^m.4,$$

поэтому видимая звездная величина в полосе V, если бы не было поглощения, оказалась бы равной

$$V_0 = V - A_V = -0^m.6.$$

Расстояние до звезды мы можем получить по известному годичному параллаксу, оно составляет $r = 1/0.02 = 50$ пк, поэтому истинная абсолютная звездная величина в полосе V составляет

$$(M_V)_0 = V_0 - 5\lg r + 5 = -0.6 - 5(1 + \lg 5) + 5 \approx -0.6 - 5 - 5 \cdot 0.7 + 5 = -4^m.1.$$

Получающийся при вычислениях $\lg 5$ можно оценить несколькими различными способами. Например (не самый короткий, но зато дающий очень точную оценку вариант):

$$\lg 5 = \frac{1}{2}\lg 25 = \frac{1}{2}(1 + \lg 2.5) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\log_{2.5} 10}\right) \approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2.512\ldots}\right) = 0.6990\ldots$$

Точное значение равно $0.69897\ldots$, так что относительная погрешность этого результата около одной сотой процента. Но для наших целей такая точность явно избыточна, достаточно ограничиться $\lg 5 \approx 0.7$.

Теперь получим абсолютную болометрическую звездную величину. Несложно догадаться, что болометрическую поправку BC нужно прибавить к уже полученной $(M_V)_0$ или отнять от нее (поскольку умножать, делить и т.п. звездные величины явно бессмысленно), при этом понятно, что болометрическая величина (во всех возможных диапазонах излучения в целом) должна быть меньше (а звезда, соответственно, ярче), чем в каком-то одном. Отсюда вывод:

$$M_{\text{bol}} = (M_V)_0 + BC = -4.1 - 2.8 = -6^m.9.$$

Остался вопрос о спектральном классе. Отрицательный истинный показатель цвета $(B-V)_0$ означает, что она «более синяя, чем желтая». Следовательно, это какой-то из спектральных классов, соответствующих бело-голубым звездам (O,B).

5. При обработке наблюдений проектируемой космической обсерватории "Gaia", которая будет определять координаты звезд на небесной сфере с погрешностью около 10^{-5} угловой секунды, необходимо учитывать отклонение света, приходящего от звезд, в гравитационном поле, создаваемом объектами Солнечной системы. Определите, отклонение света какими объектами необходимо учитывать, если известно, что луч света, проходящий непосредственно у поверхности Солнца, отклоняется при этом на $1''.75$.

Решение:

Очевидно, что для решения задачи требуется каким-либо образом получить выражение, связывающее между собой параметры объекта, отклоняющего свет, и угол отклонения. Прямой вывод этого выражения заведомо выходит за рамки школьной программы (даже с поправкой на дополнительные возможности участников олимпиад), однако его можно получить и другим путем, воспользовавшись так называемым «методом размерностей».

В самом деле, в выражении для угла отклонения, очевидно, могут встретиться только следующие величины: масса объекта M, радиус объекта R, гравитационная постоянная G и скорость света c. При этом сам угол должен получиться безразмерным, поэтому все эти четыре величины должны давать какую-то безразмерную комбинацию. Складывать и вычитать их друг из друга, очевидно, нельзя (размерности всех четырех не совпадают), помещать в показатели степени, в качестве аргументов каких-то функций (логарифмов, тригонометрических функций и т.п.) — тоже. Следовательно, искомая комбинация может иметь только такой вид:

$$M^\alpha \cdot R^\beta \cdot G^\gamma \cdot c^\delta,$$

где α, β, γ, δ — какие-то числа. Если масса измеряется в килограммах, время — в секундах, а расстояние — в метрах, то можно записать итоговую степень, с которой каждая из этих единиц будет встречаться в выражении, и приравнять ее к нулю (поскольку произведение должно быть безразмерным). Затем полученную систему линейных уравнений можно решить и получить значения показателей степеней α, β, γ, δ.

Однако можно и упростить это рассуждение, если вспомнить, что комбинация GM/R имеет размерность квадрата скорости. Отсюда сразу следует, что искомая безразмерная комбинация имеет вид

$$\frac{GM}{Rc^2}.$$

Что еще можно с ней сделать? Можно взять обратную величину, но это явно неправильно — очевидно, что свет сильнее отклоняется более массивными телами, а не наоборот. Можно возвести эту безразмерную комбинацию еще в какую-то степень, однако понятно, что движение света должно быть качественно похожим на движение обычного маломассивного тела, движущегося с большой скоростью, а в этом случае в решении задачи масса появится явно только в первой степени.

Наконец, получившаяся безразмерная комбинация может быть домножена на произвольный безразмерный же коэффициент. Но тут мы можем воспользоваться имеющимися данными — мы знаем параметры для Солнца и знаем получающийся угол отклонения. Подставив в выражение параметры Солнца, несложно убедиться, что дополнительный безразмерный коэффициент равен 4, и итоговое выражение для угла отклонения имеет вид

$$\theta = \frac{4GM}{Rc^2},$$

(и, заметим, является совершенно точным).

Однако этот результат для решения задачи уже не требуется. Поскольку угол отклонения для всех объектов в любом случае пропорционален отношению M/R, нам достаточно надо найти все объекты Солнечной системы, для которых такое отношение оказывается меньше солнечного не более чем в $\approx 2 \cdot 10^5$ раз.

Перебирать все объекты довольно долго, поэтому воспользуемся тем, что средняя плотность всех тел в Солнечной системе примерно одинакова (она отличается менее чем на порядок). Отсюда следует, что отношение M/R^3 для всех тел примерно постоянно, а тогда отношение M/R примерно пропорционально R^2. Таким образом, нам следует найти тела, радиус которых не более чем в $\sqrt{2 \cdot 10^5} \approx 4 \cdot 10^2$ меньше солнечного. Последний составляет около 700 тыс.км, следовательно, нам нужны объекты, радиус которых больше примерно $1.5 \div 2$ тыс. км. Это (помимо Солнца), очевидно, все планеты, а также наиболее крупные спутники планет (галилеевы спутники Юпитера, Луна, Титан). Именно для этих объектов отклонение света учитывается при идущей сейчас разработке программ обработки результатов наблюдений “Gaia”.

XIX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2012

10 марта

---

11 класс

---

1. Максимальная база (расстояние между антеннами) космического радиоинтерферометра «Радиоастрон» составляет 350 тыс. км. Масса черной дыры в центре Галактики составляет $4 \cdot 10^6$ масс Солнца, расстояние до нее — 8 кпк. Определите длину волны, на которой должен вести наблюдения «Радиоастрон», чтобы наблюдаемые угловые размеры черной дыры превышали предельное угловое разрешение радиоинтерферометра.

Решение:

Известно, что предельное угловое разрешение интерферометра (в радианах) можно оценить как $\beta = \lambda/D$, где λ — рабочая длина волны, D — база интерферометра. Угловые размеры черной дыры в центре Галактики можно получить как $\alpha = 2R/r$, где R — радиус дыры, r — расстояние до нее.

Радиус черной дыры (гравитационный радиус) зависит от ее массы M как

$$R = \frac{2GM}{c^2},$$

где G — гравитационная постоянная, c — скорость света. Это выражение можно получить, считая, что параболическая скорость на поверхности черной дыры равна световой.

Таким образом, условие задачи ($\alpha > \beta$) означает, что:

$$\frac{4GM}{c^2 r} > \frac{\lambda}{D}.$$

Отсюда выражаем

$$\lambda < \frac{4GMD}{c^2 r}$$

и, подставляя численные данные, получаем ответ: $\lambda \lesssim 3$ см.

2. В космических гонках участвуют фотонные ракеты массой 10 тонн с мощностью двигателя $1.2 \cdot 10^{13}$ Вт. Определите, какую максимальную скорость сможет развить такая ракета на гонках вокруг Луны, где правилами запрещено удаляться от поверхности более чем на 10 км. Каким образом для этого она должна двигаться?

Решение:

Поскольку максимально возможное удаление от поверхности мало, можно считать, что ракета должна двигаться по окружности с радиусом, равным радиусу Луны. Тогда круговая скорость может быть выражена как $v = \sqrt{gR}$, где R — радиус Луны, g — центростремительное ускорение.

Очевидно, что чем больше центростремительное ускорение, тем больше скорость. Поскольку центростремительное ускорение является суммой гравитационного ускорения и проекции ускорения, создаваемого двигателем ракеты, на вертикальную прямую, то для достижения максимальной скорости сопла двигателя должны быть направлены вверх.

Вычислим ускорение, создаваемое двигателем. Поскольку каждый испущенный фотон, имеющий энергию $h\nu$, передает ракете дополнительный импульс $h\nu/c$, то суммарное изменение импульса за единицу времени (т.е. силу тяги двигателя) можно выразить как

$F = \frac{P}{c}$, где P — мощность двигателя, c — скорость света. Отсюда выражаем ускорение, создаваемое двигателем:

$$g_{\text{дв}} = \frac{P}{mc} = \frac{1.2 \cdot 10^{13}}{10^4 \cdot 3 \cdot 10^8} = 4 \text{ м/с}^2.$$

Гравитационное ускорение на поверхности Луны можно оценить, зная, что масса Луны примерно в 80 раз меньше массы Земли, а радиус — примерно в 4 раза меньше. Получаем, что гравитационное ускорение на Луне меньше, чем на Земле, в $80/4^2 = 5$ раз, т.е. оно примерно равно 2 м/с^2. Таким образом, полное центростремительное ускорение ракеты может составлять 6 м/с^2. Тогда максимальная возможная скорость

$$v = \sqrt{6 \cdot 1.6 \cdot 10^6} \approx 3.1 \cdot 10^3 \text{ м/с} = 3.1 \text{ км/с}.$$

3. Давным-давно, в далекой-далекой галактике Уилхуфф Таркин, демонстрируя мощь первой «Звезды Смерти», превысил свои служебные полномочия и уничтожил безоружную и мирную планету Алдераан, двигавшуюся вокруг звезды, похожей на Солнце, по круговой орбите с радиусом 1 а.е. Обломки планеты разлетелись во все стороны со скоростью 1 км/с относительно ее центра. Оцените время, за которое обломки образуют кольцо вокруг звезды.

Решение:

Поскольку до уничтожения Алдераан был (по крайней мере, по параметрам орбиты) очень похож на Землю, то его орбитальная скорость совпадала со скоростью движения Земли вокруг Солнца, т.е. была близка к 30 км/с (те, кто не помнит это значение, легко могут его вычислить). Тогда очевидно, что все обломки планеты продолжили двигаться вокруг звезды со скоростями, заключенными в пределах от 29 до 31 км/с. Поскольку в одной и той же точке они имели разные скорости, это означает, что и большие полуоси орбит у них оказались различными, а, следовательно, периоды их обращения вокруг звезды также различаются, причем возможный диапазон периодов можно найти. Именно поэтому обломки будут постепенно растягиваться вдоль орбиты бывшей планеты, и кольцо полностью замкнется тогда, когда обломки, оказавшиеся на орбитах с наименьшим периодом, обгонят обломки, находящиеся на орбитах с наибольшим периодом, ровно на один оборот. Время T, необходимое на это, является, вообще говоря, синодическим периодом для двух соответствующих обломков и может быть вычислено из соотношения

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{P_{\min}} - \frac{1}{P_{\max}},$$

где $P_{\min}$ и $P_{\max}$ — минимальный и максимальный сидерические периоды обращения обломков вокруг звезды.

Однако реализация намеченного выше алгоритма «в лоб» при отсутствии вычислительной техники будет сравнительно сложной и трудоемкой задачей, поэтому выкладки следует по возможности упростить. Во-первых, вместо того, чтобы переводить все данные в стандартные системы единиц СИ или СГС, воспользуемся системой, в которой единицей длины является астрономическая единица, единицей массы — масса Солнца, а единицей времени — год. Несложно убедиться (записав обобщенный III закон Кеплера для системы «Солнце–Земля»), что гравитационная постоянная в такой системе единиц равна $4\pi^2$. Средняя орбитальная скорость Земли, очевидно, 2π а.е./год. Во-вторых, учтем то обстоятельство, что изменение скоростей обломков по сравнению с орбитальной скоростью планеты невелико (фактически все обломки продолжат двигаться по орбитам, близким к исходной), что также позволит существенно упростить вычисления.

Как известно, для нахождения скорости в произвольной точке орбиты для задачи одного притягивающего центра можно воспользоваться т.н. «интегралом энергии» (одной из форм записи закона сохранения энергии; соответствующее выражение можно вывести, воспользовавшись также законом сохранения момента импульса для системы из двух гравитирующих тел):

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

где v — скорость в некоторой точке орбиты, G — гравитационная постоянная, M — масса притягивающего центра, r — расстояние от него в данной точке орбиты, a — большая полуось орбиты.

Обозначим Δv изменение скорости обломка по сравнению с орбитальной скоростью планеты в единицах орбитальной скорости и, воспользовавшись рассмотренной выше системой единиц, запишем соотношение между изменением скорости и малым изменением большой полуоси орбиты Δa, учитывая, что в точке распада планеты $r = 1$:

$$(2\pi)^2(1+\Delta v)^2 = 4\pi^2 \cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{1+\Delta a}\right).$$

Упрощая соотношение, получаем

$$(1+\Delta v)^2 = 2 - \frac{1}{1+\Delta a}.$$

Поскольку $|\Delta a| \ll 1$ и $|\Delta v| \ll 1$, то можно сказать, что

$$(1+\Delta v)^2 = 1 + 2\cdot\Delta v + (\Delta v)^2 \approx 1 + 2\cdot\Delta v,$$

$$2 - \frac{1}{1+\Delta a} \approx 2 - (1 - \Delta a) = 1 + \Delta a.$$

Таким образом, получаем, что

$$2\Delta v \approx \Delta a.$$

Аналогичным образом выразим максимальный и минимальный периоды обращения обломков. Перейдем от периода к его изменению по сравнению с орбитальным периодом планеты $P = 1 + \Delta P$ и отметим, что в используемой системе единиц III закон Кеплера может быть записан в виде

$$(1+\Delta P)^2 = (1+\Delta a)^3.$$

Раскрывая скобки, сокращая единицы и пренебрегая малыми слагаемыми (поскольку и $\Delta P \ll 1$), получаем простое соотношение

$$2\Delta P = 3\Delta a,$$

и в итоге изменение периода связано с изменением орбитальной скорости как

$$\Delta P = 3\Delta v.$$

Осталось получить итоговый результат.

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{P_{\min}} - \frac{1}{P_{\max}} = \frac{1}{1+\Delta P_{\min}} - \frac{1}{1+\Delta P_{\max}} \approx 1 - \Delta P_{\min} - (1 - \Delta P_{\max}) =$$

$$= \Delta P_{\max} - \Delta P_{\min} = 3(\Delta v_{\max} - \Delta v_{\min}) = 3\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30}\right) = \frac{1}{5}$$

Следовательно, время образования кольца — примерно 5 лет.

Для сравнения (чтобы можно было лучше оценить ценность использованных упрощений) приведем ответ, получающийся при «лобовом» решении задачи:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}\left(\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{\left(\sqrt{\frac{GM}{r}} - v_0\right)^2}{GM}\right)^{3/2} - \left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{\left(\sqrt{\frac{GM}{r}} + v_0\right)^2}{GM}\right)^{3/2}\right)},$$

где v_0 — скорость разлета обломков относительно центра планеты. Если вооружиться калькулятором и подставить в это выражение достаточно точные числовые данные, получится результат, мало отличающийся от уже известного нам — 4.968 лет.

4. Солнечная система движется со скоростью 600 км/с относительно реликтового фонового излучения. С какой абсолютной погрешностью требуется уметь измерять температуру реликтового фонового излучения, чтобы заметить это движение?

Решение:

Реликтовое излучение является чернотельным с температурой около 2.7 К. При движении относительно реликтового фона спектр излучения сдвигается за счет эффекта Допплера и, как следствие, меняется его температура.

Воспользуемся для оценки температуры положением максимума в спектре излучения. Известен закон смещения Вина — частота максимума в спектре пропорциональна температуре излучения, $\nu_{\max} \propto T$. Тогда изменение частоты максимума пропорционально изменению температуры, $\Delta\nu_{\max} \propto \Delta T$, причем с тем же коэффициентом.

Запишем формулу нерелятивистского (скорость мала по сравнению со скоростью света c) эффекта Допплера для частот:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{v}{c} = \frac{600}{300\,000} = 0.002,$$

и, следовательно, требуемая точность измерения температуры $\Delta T \approx 5 \cdot 10^{-3}$ К.

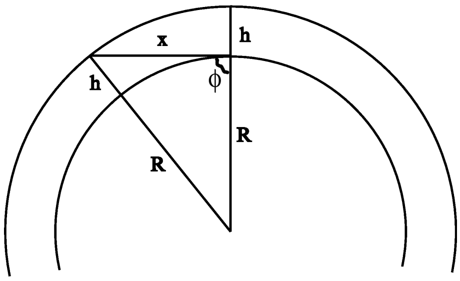
5. Оцените разность между поверхностными яркостями (в звездных величинах на квадратную секунду) верхнего и нижнего края диска Солнца во время его восхода (или захода). Можно считать, что атмосфера Земли имеет постоянную плотность и фиксированную высоту, равную 8 км, а поглощение света атмосферой у горизонта ослабляет блеск звезд на 8^m.

Решение:

Прежде всего заметим, что разность поверхностных яркостей совершенно не зависит от того, считаются поверхностные яркости на квадратную секунду, квадратную минуту или на еще какую-либо единицу площади. Более того, такой же окажется и разность блесков двух одинаковых объектов, находящихся в положениях, соответствующих двум краям диска Солнца. В самом деле, звездная величина — логарифмическая характеристика освещенности. Поэтому изменение освещенности в какое-то число раз (соответствующее изменению площади, для которой считается поверхностная яркость) приведет к изменению блеска на некоторое количество единиц, и при вычислении разности эти изменения сократятся. Это одно из весьма полезных свойств звездных величин, благодаря которым их используют в астрономии. Поэтому для удобства вместо двух элементов диска Солнца будем рассматривать два одинаковых точечных объекта, находящихся на разной высоте над горизонтом.

Очевидно, что поглощение излучения в атмосфере определяется лучевой концентрацией вещества (т.е. количеством молекул воздуха, находящихся в цилиндре с единичной площадью основания и осью, направленной на наблюдаемый объект). Оценим соотношение между лучевыми концентрациями вещества в направлении на верхний и нижний край диска Солнца, когда диск касается горизонта. Если мы считаем атмосферу однородной, то отношение лучевых концентраций будет совпадать с отношением расстояний, проходимых светом в атмосфере.

Обозначим R радиус Земли ($R \approx 6400$ км), h — высоту однородной атмосферы, x — расстояние, проходимое светом в атмосфере, ϕ — угол между радиусом Земли, проведенным в точку наблюдения, и направлением на наблюдаемый объект.



Воспользуемся теоремой косинусов и запишем

$$(R+h)^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\cos\phi.$$

Вообще говоря, такое соотношение можно записать для двух краев диска Солнца, получить соответствующие значения x и найти их отношение, однако эта процедура, хотя и элементарна с точки зрения алгебры, приведет к необходимости достаточно точного решения квадратного уравнения с «неудобными» коэффициентами, что при отсутствии вычислительной техники делать неудобно. Поэтому воспользуемся способом, требующим больших знаний, но зато и более простым.

Вычислим дифференциалы обеих частей равенства. Получим

$$0 = 2x\,dx - 2R(\cos\phi - x\sin\phi\,d\phi).$$

Поскольку нас интересует Солнце на закате или восходе, то можно считать, что нижний край диска касается горизонта. В этом случае $\phi = 90^\circ$, и получившееся выражение упрощается до

$$dx = -R\,d\phi.$$

Заметим, что учет рефракции ничего не изменит, поскольку мы ищем изменение расстояния, а не само расстояние, проходимое светом в атмосфере. Изменение угла $d\phi$ — это угловой размер Солнца (равный примерно $30'$), выраженный в радианах (т.е. $d\phi \approx 1/120$).

Так как звездная величина — логарифмическая характеристика освещенности, то ослабление освещенности в некоторое число раз соответствует увеличению звездной величины на некоторое число единиц. Мы знаем, что свет, проходя расстояние x, ослабевает на 8^m. Разность поверхностных яркостей краев диска Солнца — это ослабление света, проходящего расстояние dx, поэтому ее можно вычислить как

$$\Delta m = 8\cdot\frac{|dx|}{x}.$$

x легко выражается из теоремы Пифагора, $(R+h)^2 = x^2 + R^2$, и в итоге

$$\Delta m = 8\cdot\frac{R\,d\phi}{\sqrt{(R+h)^2 - R^2}} = 8\cdot\frac{d\phi}{\sqrt{(1+h/R)^2 - 1}} \approx 8\,d\phi\sqrt{\frac{R}{2h}}$$

(при раскрытии скобок под корнем получается два слагаемых, одно из которых в $2\cdot 6400/8 = 1600$ раз меньше другого, поэтому им можно безболезненно пренебречь).

Подставляя числовые данные, получаем итоговый ответ:

$$\Delta m = 8\,\frac{1}{120}\sqrt{\frac{6400}{16}} = 4/3 \approx 1^m.3.$$

Отметим, что эффект достаточно велик, чтобы его можно было заметить невооруженным глазом, в чем несложно убедиться, посмотрев на Солнце (или Луну, для нее ответ будет таким же) около горизонта.