XX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2013

27 января

5–6 классы

---

1. Во время наблюдения (с Земли) прохождения Венеры по диску Солнца проводилась радиолокация Венеры: с Земли к Венере был отправлен радиосигнал, который через некоторое время, отразившись от Венеры, вернулся обратно. Найдите время, прошедшее между отправкой и приемом сигнала на Земле, если известно, что свет идет от Солнца до Земли около 500 секунд, радиосигнал распространяется со скоростью света, а радиус орбиты Венеры составляет 0.7 астрономической единицы.

Решение:

Радиус орбиты Земли равен 1 астрономической единице (а.е.). Так как во время радиолокации Венера проходила по диску Солнца, расстояние от Венеры до Земли составляло $1 - 0.7 = 0.3$ а.е. Поскольку радиосигнал должен был пройти от Земли до Венеры и вернуться обратно, общее расстояние, которое он прошел, составляет $0.3 \cdot 2 = 0.6$ а.е.

Из условия известно, что 1 а.е. радиосигнал проходит за 500 секунд. Следовательно, 0.6 а.е. будут пройдены за $0.6 \cdot 500 = 300$ с, или 5 минут.

2. Луна, Юпитер и очень яркая Венера однажды вечером для наблюдателя в Петербурге оказались на небе рядом друг с другом. Опишите, как через двое суток может измениться взаимное расположение этих трех объектов и их положение на фоне звезд.

Решение:

Венера, как внутренняя планета, не отходит на небе далеко от Солнца. Следовательно, вечером подобная картина могла наблюдаться только в западной части неба недалеко от зашедшего Солнца. Таким образом Луна в этот момент была левее (восточнее) Солнца, т.е. была «растущей». Луна из-за обращения вокруг Земли движется на небе в сторону, противоположную суточному вращению самого неба. Следовательно, через двое суток Луна отодвинется от планет к востоку. Так как полный оборот относительно звезд Луна совершает примерно за месяц (точнее, за 27.3 суток), то за двое суток она пройдет примерно 1/15 полного оборота, или около 24°. Это примерно полтора созвездия, если считать, что созвездия, по которым проходит Луна, примерно равномерно распределены вдоль ее орбиты. Таким образом, можно сказать, что Луна точно окажется в другом созвездии, нежели планеты, причем отойдет от них к востоку.

Очевидно, что Юпитер за двое суток совершенно не изменит своего положения среди звезд, т.к. он очень медленно перемещается из-за своего орбитального движения, делая полный оборот относительно звезд примерно за 12 лет.

Ответ на вопрос о том, куда относительно звезд и Юпитера сместится Венера, зависит от того, в какую сторону она движется в данный момент для земного наблюдателя. Так как в условии сказано, что Венера очень яркая, то она в момент наблюдения находится где-то между максимально далеким от Солнца положением на небе (т.н. максимальной элонгацией) и нижним соединением (т.е. моментом, когда Венера находится точно между Землей и Солнцем), причем ближе к максимальной элонгации. В этот период Венера достаточно близка к Земле, с одной стороны и обладает довольно большой фазой (мы видим немного меньше половины ее освещенного диска), с другой стороны, поэтому яркость Венеры велика. В этот период Венера может двигаться среди звезд как в прямом направлении (т.е. в том же, что и Солнце в своем годичном движении), тогда она сместится влево (на восток), так и в обратном, тогда она сместится вправо. Также Венера может находиться в так называемом «стоянии», когда она кажется неподвижной земному наблюдателю. В любом случае, смещение Венеры относительно звезд и Юпитера будет небольшим, не больше 2-3 градусов.

3. Известно, что расстояние от Земли до Луны в 400 раз меньше, чем расстояние от Луны до Солнца. Во сколько раз орбитальная скорость Земли больше орбитальной скорости Луны?

Решение:

Для вычисления орбитальной скорости требуется разделить длину соответствующей орбиты на период обращения по этой орбите.

Обе орбиты можно приблизительно считать круговыми, и в таком случае можно воспользоваться тем, что длина окружности l связана с ее радиусом r соотношением $l = 2\pi \cdot r$, где $\pi = 3.14159265\ldots$ (впрочем, заметим, что для решения задачи достаточно догадаться, что длина окружности пропорциональна ее радиусу, конкретное значение коэффициента пропорциональности не требуется). Тогда:

$$\frac{v_{\oplus}}{v_{☾}} = \frac{l_{\oplus}}{l_{☾}} \cdot \frac{P_{☾}}{P_{\oplus}},$$

где значками $\oplus$ и ☾ обозначены величины, относящиеся к орбите Земли вокруг Солнца и орбите Луны вокруг Земли соответственно, P — периоды обращения. Поскольку расстояние от Земли до Луны в 400 раз меньше расстояния от Земли до Солнца, то $\frac{l_{\oplus}}{l_{☾}} = 400$. Отношение $\frac{P_{☾}}{P_{\oplus}}$ можно оценить как $1/12$, зная, что в году содержится 12 месяцев (на самом деле период обращения Луны вокруг Земли меньше календарного месяца, он составляет примерно 27.5 суток, и тогда отношение периодов можно записать более точно как $1/13$, но итоговый результат это изменит не очень сильно). В результате получаем, что скорости относятся как $400/12 \approx 30$, т.е. орбитальная скорость Земли примерно в 30 раз больше орбитальной скорости Луны.

4. Нептун был открыт Иоганном Галле 23 сентября 1846 года. Однако, как было обнаружено впоследствии, еще Галилео Галилей 29 января 1613 года наблюдал Нептун, но принял его за звезду. Известно также, что 12 июля 2011 года исполнился ровно один «нептунианский год» с момента открытия Нептуна Иоганном Галле.

Сегодня Нептун наблюдается на небе в созвездии Водолея. Определите, в каком созвездии Нептун наблюдал Галилео Галилей 400 лет назад.

Решение:

Первое, о чем следует подумать: Нептун находится далеко от Солнца и, как следствие, движется на фоне звезд с очень малой скоростью. Поэтому точные даты, приведенные в условии, имеют только историческое значение, все вычисления достаточно делать с точностью по крайней мере до целого числа лет (на самом деле даже до десятков лет).

Из того, что Нептун был открыт в 1846 году, а в 2011 году исполнился один «нептунианский год», следует, что период обращения Нептуна вокруг Солнца составляет 165 лет. Из-за того, что расстояние от Солнца до Земли намного меньше расстояния от Солнца до Нептуна, можно считать, что и по эклиптике (т.е. по зодиакальным созвездиям) Нептун перемещается с тем же периодом, и за 400 лет Нептун должен был обойти всю эклиптику $400/165 = 2\frac{70}{165}$ раза.

Поскольку протяженность участков эклиптики, относящихся к разным зодиакальным созвездиям, вообще говоря, разная, то можно воспользоваться грубой оценкой $70/165 \approx 1/2$, т.е. Галилей должен был наблюдать Нептун в созвездии, примерно противоположном созвездию Водолея. Это созвездия Рака, Льва и Девы (последнее и является точным ответом).

5. Вопреки распространенному мнению период вращения Земли вокруг своей оси не равен продолжительности солнечных суток, т.е. отличается от 24 часов 00 минут. Вычислите, чему равен период вращения Земли вокруг своей оси на самом деле с точностью до минуты.

Решение:

Если посмотреть на Землю со стороны ее северного полюса, то окажется, что Земля вращается и вокруг своей оси, и вокруг Солнца в одну и ту же сторону (против часовой стрелки). Рассмотрим некоторый момент времени, когда Земля повернута к Солнцу определенной стороной. За то время, что Земля делает полный оборот вокруг своей оси, она успевает немного сместиться по орбите вокруг Солнца, и для того, чтобы оказаться в исходном положении относительно Солнца, ей необходимо еще немного повернуться. Именно время, затраченное на этот дополнительный небольшой поворот, и является разницей между периодом вращения Земли вокруг оси и продолжительностью солнечных суток (заметим, что солнечные сутки несколько больше периода вращения).

Если продолжительность одного года — оборота Земли вокруг Солнца — составляет n солнечных суток, то за то же время Земля обернется вокруг своей оси $n+1$ раз: в течение года один оборот Земли вокруг оси будет как бы «скомпенсирован» одним ее оборотом вокруг Солнца. Число n, как известно, примерно равно 365, следовательно, время, необходимое на один дополнительный поворот каждые сутки, составляет примерно $1/365$ часть суток.

Осталось вычислить результат. В сутках $24 \cdot 60 = 1440$, так что разница между солнечными сутками и периодом вращения Земли составляет $1440/365 \approx 4$ минуты. Следовательно, период вращения Земли вокруг своей оси примерно равен 23 часам 56 минутам.

3. Как известно, сейчас в России существует традиция отмечать «старый Новый год», который наступает в ночь с 13 на 14 января. Определите, в какой момент (с точностью до минуты) по московскому времени в 2013 году надо было отмечать наступление «старого Нового года», если известно, что дореволюционная Россия не только жила по юлианскому календарю, но и использовала в качестве стандартного времени среднее солнечное время Пулковской обсерватории. Долгота обсерватории равна $30°19'$ восточной долготы.

Решение:

Во-первых, долгота обсерватории отличается от долготы центрального меридиана часового пояса на $19'$. Поскольку в окружности Земли по долготе 24 часа или $360°$, то каждый часовой пояс имеет ширину $15°$, и, следовательно, смещение на $15'$ по долготе соответствует изменению времени на 1 минуту. Поэтому разница в $19'$ с интересующей нас точностью также означает, что Новый год до революции был сдвинут на 1 минуту *раньше* (так как обсерватория восточнее центрального меридиана часового пояса).

Во-вторых, как известно, сейчас в России московское время по сравнению с временем соответствующего часового пояса также сдвинуто вперед на два часа, причем сдвиг этот был введен не ранее 1917 года.

В итоге получаем, что «старый Новый год» наступает в 1 час 59 минут ночи 14 января.

4. Оцените размер (в километрах) деталей рельефа на диске Луны, видимых невооруженным глазом (т.е. без телескопа). Известно, что невооруженным глазом человек может увидеть детали с угловым размером не менее $1'$, диаметр Луны примерно в четыре раза меньше диаметра Земли.

Решение:

Известно, что угловой диаметр диска Луны составляет примерно полградуса, т.е. $30'$. Следовательно, невооруженным глазом можно увидеть детали, примерно в 30 раз меньшие диаметра Луны. Сам диаметр Луны, как следует из условия, примерно в 4 раза меньше диаметра Земли, а последний составляет примерно 13 тыс.км. В итоге получаем

$$\frac{13000}{4 \cdot 30} \approx 100 \text{ км.}$$

5. Пунктуальный полярник идет вдоль центрального меридиана некоторого часового пояса к географическому полюсу, проходит через полюс и оказывается в другом часовом поясе. На сколько часов и вперед или назад полярнику надо перевести часы? Нужно ли ему менять дату на календаре, и если нужно, то в какую сторону? Рассмотрите все возможные случаи.

Решение:

Предположим для начала, что полярник работает в Арктике (а полюс, соответственно, северный). Новый часовой пояс будет диаметрально противоположным старому, поэтому часы полярник в любом случае должен перевести на 12 часов в какую-то сторону. При этом, если при пересечении полюса линия перемены дат для полярника оказывается справа, то это означает, что он переходит из восточного полушария в западное, т.е. часы следует перевести на 12 часов назад, если же линия перемены дат слева, то вперед. При переводе часов может оказаться, что новое время попадает в другие сутки (например, в исходном часовом поясе 6 часов утра, а полярник переводит часы назад): в таком случае следует перевести в том же направлении также и календарь (т.е. в рассматриваемом примере 24-часовые часы переводятся на 18 часов, а календарь — на сутки раньше).

Если полярник работает находится в Антарктиде, то процедура остается практически такой же, однако меняется относительное положение линии перемены дат: если она при переходе через полюс окажется слева, что часы переводятся вперед, если справа — назад.

9 класс

1. При каких значениях угла наклона орбиты Венеры к эклиптике мы могли бы любоваться прохождением Венеры по диску Солнца каждое нижнее соединение?

Решение:

Для того, чтобы каждое нижнее соединение Венера проходила по диску Солнца, нужно, чтобы наклон ее орбиты был таков, что на максимальном расстоянии от узла орбиты (точки пересечения орбиты с эклиптикой), она хотя бы касалась края Солнца для земного наблюдателя, т.е. находилась на прямой, соединяющей глаз наблюдателя и край Солнца.

Нарисуем орбиты Земли и Венеры в этом случае в проекции на плоскость, перпендикулярную плоскости эклиптики (рис. № 1).

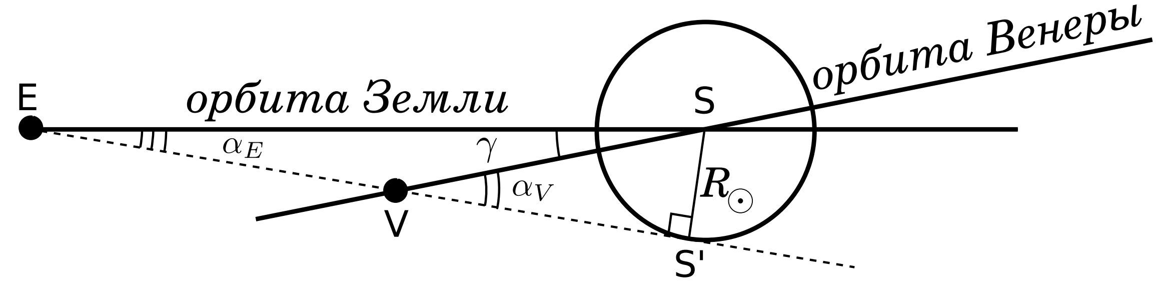

Рис. №1

Требуется найти угол между плоскостями орбиты γ. В треугольнике EVS угол α_E — угловой радиус Солнца, видимый с Земли, угол при вершине V равен $180° - \alpha_V$, где α_V — угловой радиус Солнца, видимый с Венеры. Следовательно, $\gamma = \alpha_V - \alpha_E$.

Из прямоугольных треугольников ESS' и VSS' имеем:

$$R_\odot = SS' = VS \cdot \sin\alpha_V = ES \cdot \sin\alpha_E \implies \frac{\sin\alpha_V}{\sin\alpha_E} = \frac{ES}{VS}$$

Углы α_E и α_V малы, поэтому их синусы приближенно равны самим углам (выраженным в радианах, но, т.к. нам нужно их отношение, то не важно, в каких единицах их выражать), так что:

$$\alpha_V = \alpha_E \frac{ES}{VS}.$$

Известно, что $\alpha_E = 15'$, а $ES = 1$ а.е. и $VS = 0.7$ а.е. — радиусы орбит Земли и Венеры, соответственно, поэтому

$$\alpha_V = 15' \frac{1}{0.7} \approx 21',$$

следовательно, $\gamma \approx 6'$.

Примечание. Вычисляя этот угол, мы подспудно предполагали, что наблюдатель находится в центре Земли. Переместив наблюдателя на поверхность Земли, мы, вообще-то должны учесть суточный параллакс Венеры. Оценим его. Известно, что суточный параллакс Солнца равен $8''$, Венера в момент нижнего соединения находится примерно в 30 раз ближе к Земле, чем Солнце, поэтому ее параллакс примерно в 30 раз больше и равен, таким образом, около $0'.5$, что на порядок меньше вычисленного нами угла. Тем самым параллаксом вполне можно пренебречь.

2. Студент-астроном едет на электричке. Он заметил, что угол между азимутом центра диска Луны и направлением движения поезда в начале пути составлял 20°, а в конце пути — 120°. Время поездки составляет 40 минут. Определите возможный диапазон значений угла поворота железной дороги на этом маршруте.

Решение:

Представим себе, что Луна не движется по небесной сфере в течение поездки, тогда ситуация в начале и конце поездки будет такой, как показано на рисунке № 2:

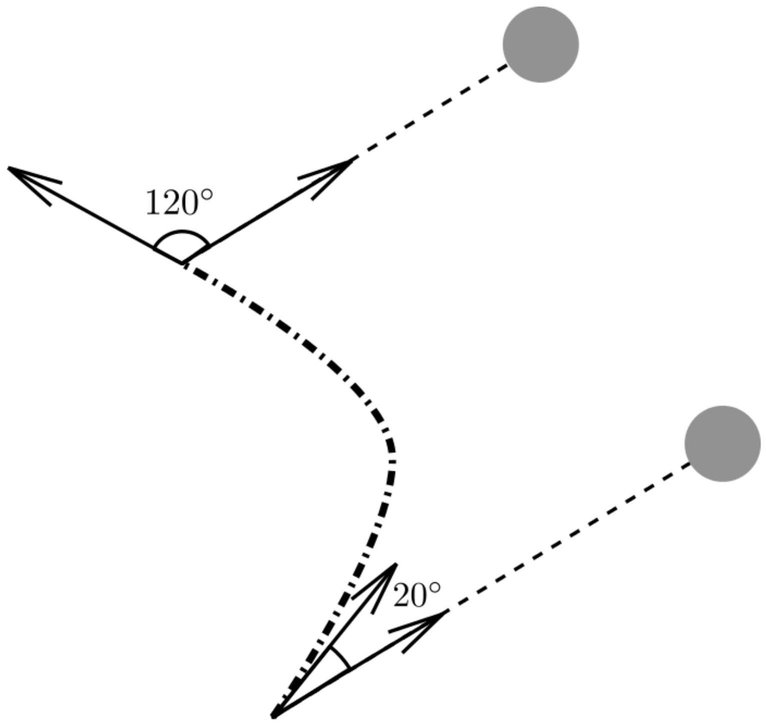

Рис. №2

направления на Луну в начале и в конце поездки параллельны друг другу, т.к. Луну можно считать «бесконечно удаленным» объектом (параллаксом Луны при таком незначительном перемещении можно и нужно пренебречь). Таким образом угол, на который делает поворот железная дорога, т.е. угол между векторами направлений движения в начале пути и в конце пути, равен $120° - 20° = 100°$.

Однако Луна в течение поездки изменяет свой азимут вследствие вращения Земли вокруг своей оси (собственным движением Луны по небесной сфере можно пренебречь, т.к. его скорость примерно в 30 раз меньше скорости вращения небесной сферы). Небесная сфера вращается с угловой скоростью 15°/час. Следовательно, за 40 минут поездки Луна вместе с ней пройдет $15 \cdot (2/3) = 10°$ параллельно небесному экватору. Таким образом, азимут Луны за время поездки может измениться максимум на 10°. Максимальным (10°) изменение азимута ΔA будет в том случае, если Луна в момент поездки была в вблизи верхней кульминации, т.к. в это время она перемещается практически горизонтально, а минимальным (почти до 0°) — если около горизонта, т.к. в этом случае перемещение практически вертикальное (см. рис. № 3). Заметим, что движение Луны по азимуту может происходить как в ту же сторону, что и движение поезда, так и в обратную. Тем самым получаем искомый диапазон значений угла поворота дороги $100° \pm 10°$, или $[90°; 110°]$.

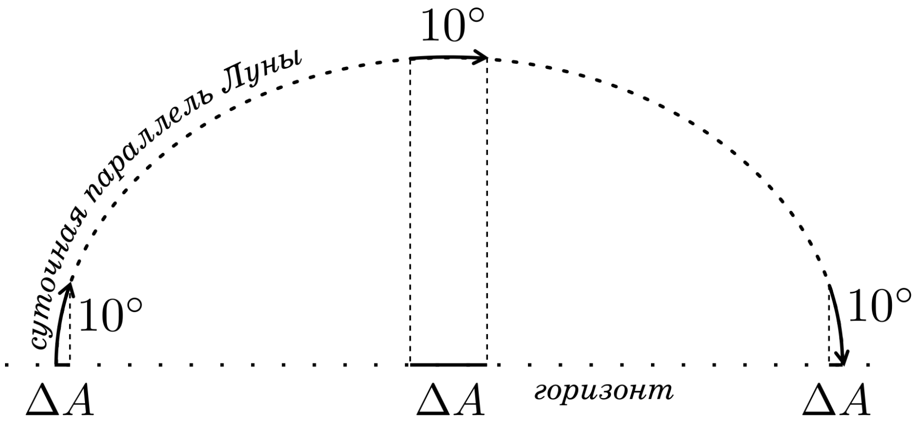

Рис. №3

3. С некоторого астероида периодически можно наблюдать полное затмение Солнца, вызванное прохождением по диску Солнца планеты Юпитер. При этом полное затмение продолжается не больше минуты. Сколько времени проходит между двумя такими последовательными затмениями? Орбиты Юпитера и астероида считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

Решение:

Очевидно, что орбита астероида располагается дальше от Солнца, чем орбита Юпитера, и затмения случаются в те моменты, когда Юпитер для астероида находится в нижнем соединении, а астероид для Юпитера — в противостоянии. Из условия, что затмения продолжаются не больше минуты, следует, по аналогии с полными солнечными затмениями на Земле, что Юпитер и Солнце с астероида в моменты затмений видны под одним и тем же углом. Следовательно, расстояние от Юпитера до астероида в момент затмения L во столько же раз меньше радиуса орбиты астероида a, во сколько раз линейный радиус Юпитера $R_{♃}$ меньше линейного радиуса Солнца $R_{\odot}$.

$$\frac{L}{a} = \frac{R_{♃}}{R_{\odot}}.$$

В момент затмения расстояние между Юпитером и астероидом равно разности радиусов их орбит: $L = a - a_{♃}$, следовательно

$$\frac{L}{a} = \frac{a - a_{♃}}{a} = 1 - \frac{a_{♃}}{a} = \frac{R_{♃}}{R_{\odot}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_{♃}}{a} = 1 - \frac{R_{♃}}{R_{\odot}}$$

Известно, что радиус Юпитера примерно в 10 раз меньше радиуса Солнца (или известно, что масса Юпитера примерно в 10^3 раз меньше массы Солнца, а средние плотности одинаковы, отсюда получается искомое соотношение), следовательно

$$\frac{a_{♃}}{a} = 1 - \frac{R_{♃}}{R_{\odot}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

Так как по условию задачи орбиты круговые и лежат в одной плоскости, затмение Солнца Юпитером для астероида наблюдается каждое нижнее соединение Юпитера (ср. зад. № 1), следовательно между последовательными затмениями проходит ровно один синодический период S.

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{♃}} - \frac{1}{T} \quad \Longrightarrow \quad \frac{T_{♃}}{S} = 1 - \frac{T_{♃}}{T}.$$

Отношение периодов, зная отношение радиусов орбит, можно получить из III закона Кеплера:

$$\frac{T_{♃}}{T} = \left(\frac{a_{♃}}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$\frac{T_{♃}}{S} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 0.15.$$

$$S \approx \frac{T_{♃}}{0.15} \approx \frac{12}{0.15} = 80\,\text{лет}.$$

4. Сегодня ночью мимо Земли на минимальном расстоянии, примерно равном радиусу орбиты геостационарных спутников, пролетел астероид 2012DA14. Максимальный блеск астероида оказался близким к 7^m. Оцените размер астероида, считая, что его альбедо совпадает с альбедо Луны.

Решение:

Задача оценочная, поэтому можно пользоваться приближенными значениями и разумными соображениями относительно формы астероида.

Будем считать астероид шарообразным. Тогда, так как альбедо астероида совпадает с альбедо Луны и можно считать, что астероид и Луна находятся на одном расстоянии от Солнца, отношение количества солнечного света, отраженное полной Луной, $L_{☾}$ и количества солнечного света, отраженное «полным» астероидом, L_a равно отношению их площадей, т.е. отношению квадратов их радиусов (т.к. оба тела считаем шарообразными):

$$\frac{L_a}{L_{☾}} = \left(\frac{R_a}{R_{☾}}\right)^2.$$

Количество света, отраженного телом, которое дойдет до Земли, равномерно распределится по площади сферы с радиусом, равным расстоянию от тела до Земли. Следовательно, отношение количества отраженного от астероида солнечного света, дошедшего от астероида до Земли, E_a к количеству отраженного от Луны солнечного света, дошедшего от Луны до Земли, $E_{☾}$, равно

$$\frac{E_a}{E_{☾}} = \frac{L_a}{L_{☾}} \left(\frac{r_{☾}}{r_a}\right)^2 = \left(\frac{R_a}{R_{☾}}\right)^2 \left(\frac{r_{☾}}{r_a}\right)^2$$

Разность звездных величин полной Луны (звездная величина -13^m) и астероида равна $\Delta m = 7^m - (-13^m) = 20^m$. Известно, что разнице в 5^m соответствует отношение яркостей в 100 раз. Тогда разнице в 20^m — $100^4 = 10^8$ раз. Отсюда

$$\left(\frac{R_a}{R_{☾}}\right)^2 \left(\frac{r_{☾}}{r_a}\right)^2 = 10^{-8}$$

Известно, что орбита геостационарных спутников располагается примерно в 10 раз ближе к центру Земли, чем орбита Луны. (Если этот факт неизвестен, то это отношение легко получить из III закона Кеплера, связывающего радиусы орбит r и периоды обращения T:

$$\frac{r_{☾}}{r_a} = \left(\frac{T_{☾}}{T_a}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Период обращения Луны составляет чуть больше 27 суток, а геостационарного спутника — 1 сутки. Отсюда получаем, что $r_{☾} / r_a$ чуть больше 9, что для оценочной задачи можно принять за 10.)

Тогда

$$\left(\frac{R_a}{R_{☾}}\right)^2 \left(\frac{r_{☾}}{r_a}\right)^2 = \left(\frac{R_a}{R_{☾}}\right)^2 \cdot 10^2 = 10^{-8}, \text{ откуда}$$

$$\left(\frac{R_a}{R_{☾}}\right)^2 = 10^{-10} \implies \frac{R_a}{R_{☾}} = 10^{-5} \implies R_a = 10^{-5} R_{☾} \approx 10^{-5} \cdot 1.7 \cdot 10^3\,\text{км} = 17\,\text{м}.$$

5. Обитающая в некоторой галактике сверхцивилизация рассылает от своей звезды равномерно во все стороны исследовательские станции, которые движутся прямолинейно с постоянной и одинаковой у всех станций скоростью. При этом сверхцивилизация хочет, чтобы в каждый момент времени количество станций в единице объема не зависело от расстояния до звезды (в пределах сферы, до которой добрались первые запущенные станции). Как в таком случае должно зависеть количество станций, запускаемых сверхцивилизацией в единицу времени, от времени?

Решение:

Поскольку скорость движения станций постоянна, то за некоторый интервал времени Δt станции пролетают одинаковое расстояние ΔR. Поэтому все станции, запущенные в некотором малом интервале времени от t до $t+\Delta t$, заполняют вокруг звезды некоторый тонкий сферический слой, объем которого может быть вычислен как $4\pi R^2 \cdot \Delta R$ (где $R = V \cdot t$ — расстояние от звезды до этого слоя, V — скорость станций). Поскольку в каждый момент времени количество станций в единице объема всюду постоянно, то это означает, что количество станций, запущенных за единичный интервал времени и долетевших к данному моменту до расстояния R, должно быть пропорционально R^{-2}. А так как расстояние, до которого долетели станции, прямо пропорционально времени полета, то количество запускаемых за единичный интервал станций должно быть пропорционально t^{-2}.

XX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2013

16 февраля

---

10 класс

---

1. На поверхности Луны в центре видимого с Земли диска Луны находится передающая антенна лунной станции, работающая на частоте 200 МГц. Оцените максимально возможный сдвиг частоты сигнала, принимаемого на Земле. Эксцентриситет орбиты Луны составляет 0.05.

Решение:

Сдвиг частоты сигнала является следствием эффекта Допплера, причем для оценки максимально возможного смещения требуется найти максимально возможную лучевую скорость приемника относительно передающей антенны.

Причин для появления этой скорости две. Во-первых, орбита Луны не является круговой, поэтому Луна периодически приближается к Земле и удаляется от нее. Во-вторых, Земля вращается вокруг своей оси. Заметим, что вращение Луны вокруг своей оси, хотя и существует, учитывать не надо, поскольку станция на Луне из-за синхронизации вращения Луны будет располагаться по отношению в Земле в одном и том же положении. Оценим характерные скорости, связанные с каждым из этих двух факторов.

Расстояния от Земли до Луны в перигее и апогее могут быть вычислены как $a\,(1-e)$ и $a\,(1+e)$ соответственно, где a — большая полуось орбиты Луны, а e — ее эксцентриситет. Отсюда вычисляем разность расстояний, она составляет $2ae \approx 4\cdot 10^4$ км. Так как период обращения Луны вокруг Земли и период между двумя последовательными прохождениями Луной перигея ее орбиты примерно равны одному месяцу, то средняя скорость, с которой Луна приближается или удаляется от Земли, составляет примерно $4\cdot 10^4$ км/15 дней, т.е. около 0.03 км/с. Очевидно, что зависимость лучевой скорости от времени имеет вид синусоиды, так что среднее значение скорости и максимальное значения отличаются не слишком сильно, не более чем в два раза (эту оценку можно выполнить и точно, отношение окажется равным $\pi/2 \approx 1.6$, поэтому в качестве оценки максимальной лучевой скорости, связанной с эллиптичностью орбиты Луны, можно взять 0.06 км/с.

Из-за вращения Земли приемник может удаляться от передающей станции или приближаться к ней с максимальной скоростью, равной линейной скорости движения точек на экваторе Земли. Последнюю легко оценить, она составляет примерно 0.5 км/с. Очевидно, что этот эффект на порядок больше предыдущего, следовательно, именно он и является определяющим.

Смещение частоты $\Delta\nu$ может быть вычислено из

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c},$$

где ν — частота источника, v — относительная лучевая скорость, c — скорость света. Подставляя числовые данные, получаем ответ — около $3\cdot 10^2$ Гц.

2. В шаровом звездном скоплении практически отсутствуют звезды более ранних спектральных классов, чем G2, причем большинство звезд класса G2 имеет видимую звездную величину $+20^m$. Оцените возраст скопления и расстояние до него.

Решение:

Все звезды скопления образовались примерно в одно и то же время. Так как массивные звезды эволюционируют быстрее, они раньше покидают главную последовательность (ГП) на диаграмме Герцшпрунга-Рассела и становятся красными гигантами. Поэтому звезды наиболее раннего спектрального класса среди всех звезд скопления — это звезды той массы, время нахождения которых на главной последовательности примерно совпадает с возрастом скопления (так как все более массивные звезды ГП уже покинули).

Известно, что к спектральному классу G2 относится, в частности, Солнце. Его время жизни на главной последовательности составляет около 10 миллиардов лет, и, следовательно, это и есть возраст скопления.

Кроме этого, известно, что абсолютная звездная величина Солнца $M \approx +5^m$. Поскольку видимая звездная величина m таких же звезд в скоплении нам известна, расстояние до скопления определяется из выражения

$$M = m - 5 \lg r + 5,$$

где r выражено в парсеках. Подставляя числа, получаем $\lg r = 4$, т.е. расстояние составляет около 10 кпк.

3. В центральной части шарообразной эллиптической галактики вокруг ее центра обращаются две звезды. Орбиты обеих звезд круговые, лежат в одной плоскости, направления вращения совпадают, радиус орбиты первой звезды составляет 100 пк, а второй — 50 пк. Найдите синодический период этих двух звезд (т.е. период между повторением одинакового взаимного расположения двух звезд и центра галактики), если известно, что в центральной части галактики все звезды расположены примерно однородно, концентрация звезд составляет около $10^4\ \mathfrak{M}_\odot/\text{пк}^3$.

Решение:

Галактика является сферически-симметричной, поэтому для каждой из звезд внешние для нее части галактики не влияют на ее движение, а внутренние можно заменить материальной точкой соответствующей массы, находящейся в центре галактики.

Пусть орбита звезды имеет радиус r. Тогда массу галактики, находящуюся внутри этого радиуса, можно вычислить как $M_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, где ρ — плотность вещества внутри радиуса r. Скорость движения по круговой орбите вокруг точки такой массы составляет

$$v = \sqrt{\frac{GM_r}{r}} = \sqrt{\frac{4G\pi r^3 \rho}{3r}} = \sqrt{\frac{4G\pi\rho}{3}} r,$$

т.е. она пропорциональна радиусу орбиты. Это означает, что угловая скорость движения звезды $\omega = v/r$ от радиуса орбиты не зависит. Следовательно, обе рассматриваемых звезды вращаются с одинаковой угловой скоростью, их взаимное положение относительно центра галактики не меняется со временем, поэтому их синодический период стремится к бесконечности.

4. Оцените температуру поверхности Седны во время прохождения ею афелия орбиты, если известно, что большая полуось орбиты Седны составляет 540 а.е., а эксцентриситет орбиты равен 0.86.

Решение:

Афелийное расстояние Седны составляет $r_\alpha = a\,(1+e) = 10^3$ а.е. Освещенность, создаваемая Солнцем на таком расстоянии, равна

$$E = \frac{L_\odot}{4\pi r_\alpha^2},$$

где $L_\odot$ — светимость Солнца. Если предположить, что Седна поглощает все падающее на нее излучение (это достаточно хорошее предположение, альбедо транснептуновых объектов существенно отличается от единицы), то за единицу времени Седна получает энергию, равную $E \cdot \pi R^2$, где R — радиус Седны.

Поскольку условия освещения меняются крайне медленно, можно считать, что такую же энергию Седна за единицу времени и отдает, следовательно, верно равенство

$$\frac{L_\odot}{4\pi r_\alpha^2} \cdot \pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma T^4,$$

где σ — постоянная Стефана-Больцмана, T — температура Седны (более правильно было бы написать, что это эффективная температура Седны, но, поскольку мы уже предположили, что Седна поглощает все падающее на нее излучение, т.е. является абсолютно черным телом, и имеется термодинамическое равновесие, то эффективная температура должна совпадать с температурой поверхности).

Для упрощения вычислений выразим светимость Солнца через его радиус $R_\odot$ и эффективную температуру $T_\odot$, тогда последнее выражение примет вид

$$\frac{4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4}{4\pi r_\alpha^2} \cdot \pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Упрощая его, получаем, что

$$T = \sqrt{\frac{R_\odot}{2\, r_\alpha}} T_\odot.$$

Воспользовавшись тем, что $R_\odot \approx 1/200$ а.е., а эффективная температура Солнца $T_\odot \approx 6 \cdot 10^3$ К, вычисляем ответ: около 10 К.

5. Как известно, 21 декабря 2012 года мы пережили очередной «конец света», и пора начинать готовиться к следующему. Известно, что т.н. «длинный цикл» календаря Майя составляет 1872000 суток. Найдите дату следующего «конца света» (в предположении, что используемый нами сейчас календарь за это время не изменится).

Решение:

Идея решения задачи более-менее очевидна — надо выяснить, сколько за 1872000 суток пройдет лет, месяцев и дней, однако ее практическая реализация при отсутствии вычислительной техники представляет некоторую сложность. Существуют по крайней мере два способа реализации решения.

Можно вспомнить устройство григорианского календаря и вычислить количество суток в наиболее его продолжительном 400-летнем цикле (146097), а затем разделить с остатком на это число 1872000, получив количество циклов. Далее повторить процедуру для меньших, 100-летних циклов, потом 4-летних и т.д.

С другой стороны, можно вспомнить или вычислить среднюю продолжительность года в григорианском календаре, которая составляет 365.2425 суток, после чего разделить на это число 1872000 в столбик с точностью до целых. Получится 5125 лет и остаток около 132.2 суток. 2012 год был високосным, следовательно, через 5125 лет будет первый невисокосный год 4-летнего цикла (остаток от деления 5125 на 4 равен 1). Отсюда следует, что в искомом году не будет 29 февраля, и что от 21 декабря $2012 + 5125 = 7137$ года надо отсчитать 133 дня, а не 132 (невисокосные года короче среднего, и за 2 невисокосных года накапливается примерно 1/2 суток отклонения от среднего значения). Поскольку количество дней в месяцах известно, отсчет 133 суток становится сравнительно легкой процедурой.

В итоге оба варианта дают, естественно, один и тот же ответ: 3 мая 7138 года.

XX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2013

16 февраля

---

11 класс

---

1. Объект, принадлежащий Солнечной системе, находится в полюсе эклиптики, и при этом известно, что у этого объекта величина годичного параллакса и годичной аберрации совпадают. Оцените расстояние до объекта. Какой будет видимая с Земли траектория движения этого объекта на небесной сфере в течение одного земного года?

Решение:

Так как объект находится в полюсе эклиптики, то в течение года за счет аберрации он описывает на небесной сфере окружность с радиусом, равным величине годичной аберрации — $20''$. Если эта величина неизвестна, ее можно получить из выражения для аберрации

$$\sigma = \frac{V}{c}\sin\theta,$$

где V — скорость движения наблюдателя относительно объекта (в данном случае орбитальная скорость Земли, около 30 км/с), c — скорость света, θ — угол между направлением движения наблюдателя и направлением на объект (так как объект в полюсе эклиптики, $\theta = 90^\circ$), σ — аберрационный угол в радианах.

Поскольку расстояние до объекта в парсеках $r = 1/\pi$, где π — годичный параллакс в секундах, получаем, что расстояние до объекта составляет 1/20 пк. Сразу же заметим, что объект, принадлежащий Солнечной системе, должен иметь на таком расстоянии небольшую пространственную скорость (ее максимально возможную величину можно оценить и количественно как параболическую скорость на соответствующем расстоянии от Солнца, которая составляет 0.4 км/с), поэтому собственным движением объекта в течение года безусловно можно пренебречь, вид и размеры траектории движения объекта по небесной сфере определяются только параллаксом и аберрацией.

И за счет годичной аберрации, и за счет годичного параллакса объект будет смещаться на небесной сфере на $20''$ по отношению к истинному положению. Однако смещение за счет параллакса направлено в сторону, противоположную положению Земли на орбите, а смещение за счет аберрации — в сторону, совпадающую с направлением орбитальной скорости Земли. Поэтому оба смещения всегда перпендикулярны друг другу, и суммарное смещение объекта будет составлять $\sqrt{2}\cdot 20'' = 28'' \approx 0'.5$. Так как оно постоянно в течение года, а его направление меняется с практически постоянной угловой скоростью (отклонения обусловлены тем, что орбита Земли обладает небольшим эксцентриситетом), то объект в течение года опишет на небесной сфере окружность с радиусом $0'.5$.

2. При радионаблюдениях внегалактического водородного облака было обнаружено, что оно излучает на длине волны 28 см, причем ширина линии излучения составляет 0.1 мм. Известно также, что угловые размеры облака на небе составляют $4''$. Оцените массу этого облака.

Решение:

Известно, что нейтральный водород излучает на длине волны 21 см. Все остальные возможные линии излучения водорода находятся в намного более коротковолновых областях, поэтому других разумных вариантов отождествления наблюдаемой линии не имеется. Объект, по условию, является внегалактическим, поэтому разница между наблюдаемой и лабораторной длинами волн излучения должна объясняться космологическим красным смещением (второй возможный вариант — удаление сравнительно близкого облака от нас со скоростью, сравнимой со скоростью света — нереалистичен).

Воспользуемся законом Хаббла для оценки расстояния до облака. Как известно, $cz = Hr$, где — скорость света, $z = \Delta\lambda/\lambda$ — красное смещение, r — расстояние до объекта, H — постоянная Хаббла (примем ее значение равным 70 км/с/Мпк). Тогда расстояние до объекта составляет $r \approx 1.4 \cdot 10^3$ Мпк.

Из определения парсека следует, что на расстоянии $1.4 \cdot 10^9$ пк под углом $1''$ видно расстояние $1.4 \cdot 10^9$ а.е. Следовательно, характерный радиус облака составляет $3 \cdot 10^9$ а.е.

Ширина спектральной линии позволяет найти характерную скорость v движения атомов в облаке. Линия расширяется из-за допплеровского смещения, поэтому

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda},$$

где $\lambda = 28$ см (края линии тоже меняют длину волны из-за космологического красного смещения, поэтому сравнивать ширину линии нужно именно с наблюдаемой длиной волны), $\Delta\lambda = 0.05$ мм (половина ширины линии). Отсюда получаем $v \approx 50$ км/с.

Найти связь между характерной скоростью и массой облака можно двумя способами. Наиболее корректный — воспользоваться теоремой вириала. Известно, что для устойчивой самогравитирующей системы сумма удвоенной средней кинетической энергии и средней потенциальной энергии равна нулю. Предполагая, что все атомы облака имеют скорость v, и зная, что потенциальная энергия гравитирующего шара массы M и радиуса R примерно составляет $-\frac{GM^2}{R}$ (G — гравитационная постоянная), получаем равенство:

$$2\,\frac{Mv^2}{2} - \frac{GM^2}{R} = 0,$$

откуда

$$v^2 = \frac{GM}{R}.$$

Можно воспользоваться и более простыми соображениями. Все частицы облака движутся по некоторым орбитам вокруг центра облака. Очевидно, что максимальную скорость будут иметь частицы, находящиеся на границе облака, причем их скорость можно приближенно оценить как круговую скорость движения вокруг массы M на орбите радиуса R. Тогда

$$v^2 = \frac{GM}{R}.$$

Дальнейшие вычисления удобнее проводить в системе единиц «масса Солнца, астрономическая единица, год». В этой системе единиц $G = 4\pi^2$, $v \approx 10$ (1 а.е./год ≈ 4.74 км/с), а радиус облака в астрономических единицах нам уже известен.

Тогда

$$M = \frac{v^2 \cdot R}{G} = \frac{10^2 \cdot 3 \cdot 10^9}{4 \cdot 10} \approx 10^{10} \text{ масс Солнца.}$$

3. Оцените величину разности между экваториальным и полярным радиусами Юпитера. Радиус Юпитера примерно в 11 раз больше радиуса Земли, период вращения Юпитера вокруг своей оси составляет 10 часов.

Решение:

Юпитер при вращении должен иметь форму, соответствующую некоторой эквипотенциальной поверхности, определяемой гравитационным потенциалом и потенциалом центробежной силы. Если обозначить экваториальный радиус Юпитера R, а полярный $R - \Delta R$, то условие равенства потенциалов в некоторой точке экватора и на полюсе можно записать как

$$-\frac{GM}{R - \Delta R} = -\frac{GM}{R} - \frac{\omega^2 R^2}{2},$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса Юпитера, ω — угловая скорость вращения Юпитера (поскольку сжатие Юпитера невелико, при вычислении гравитационного потенциала можно считать, что он близок к потенциалу тела со сферически-симметричным распределением плотности).

Преобразуем это выражение к виду

$$GM\left(\frac{\Delta R}{(R - \Delta R)\,R}\right) = \frac{\omega^2 R^2}{2}$$

и, учитывая, что $\Delta R \ll R$, пренебрежем ΔR в знаменателе в левой части равенства. Тогда

$$\Delta R \approx \frac{\omega^2 R^4}{2GM}$$

Для удобства выразим массу Юпитера через его радиус и среднюю плотность ρ:

$$M = \frac{4}{3}\rho R^3,$$

а угловую скорость — через период $P = 2\pi/\omega$. В результате получим

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{3\pi}{2G\rho P^2}$$

Зная, что средняя плотность Юпитера немного больше плотности воды, вычисляем $\Delta R/R \approx 0.05$. Таким образом, ΔR составляет около $11/20$ радиусов Земли, т.е. около 3.5 тыс.км (реальное значение около 4.6 тыс.км).

4. Двойная система состоит из двух белых карликов, вращающихся вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Известно, что такая система испускает гравитационные волны с частотой, равной удвоенной орбитальной частоте системы. Оцените минимально возможную длину волны гравитационного излучения такой двойной системы.

Решение:

Минимальной длина волны получится тогда, когда частота волны будет максимальной, следовательно, нам нужно оценить максимально возможную орбитальную частоту системы. Очевидно, что она будет достигнута в том случае, если массы обоих белых карликов будут максимально возможными, а расстояние между ними — минимально возможным. Максимально возможная масса белого карлика (т.н. предел Чандрасекара) составляет около 1.4 массы Солнца, а характерный размер белого карлика сравним с размером Земли, причем расстояние между центрами карликов в двойной системе, очевидно, ограничено снизу суммой радиусов карликов.

Запишем третий закон Кеплера для такой экстремальной системы:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)},$$

где большая полуось a сумма радиусов карликов, $a \sim 10^4$ км, а M_1 и M_2 совпадают с максимально возможной массой карлика. Вычисляя период P, получаем, что он составляет около $P \sim 10^1$ с, следовательно, орбитальная частота имеет величину порядка 10^{-1} Гц. Из-за грубости оценки радиуса карлика (и расстояния между ними в системе) учет того, что частота излучения в два раза больше, практически лишен смысла, поэтому та же порядковая оценка может быть использована и как оценка частоты излучения гравитационных волн.

Известно, что гравитационные волны распространяются со скоростью света. Поэтому $\lambda = c/\nu$, где c — скорость света, отсюда получаем оценку минимально возможной длины волны — порядка 10^9 м.

5. Поверхностная яркость солнечного пятна в 5 раз меньше поверхностной яркости фотосферы Солнца. Оцените индукцию магнитного поля в пятне, если известно, что поле с индукцией B создает магнитное давление $p = \varkappa B^2$, коэффициент $\varkappa \approx 4 \cdot 10^5$ Па/Тл^2. Плотность вещества фотосферы составляет около 10^{-4} кг/м^3.

Решение:

Существование и стабильность солнечных пятен в течение достаточно длительного времени (до месяца) обеспечивается тем, что граница пятна находится в механическом равновесии: давление снаружи полностью уравновешено давлением изнутри. Кроме этого, плотность вещества внутри пятен практически не отличается от плотности снаружи (иначе то же равновесие также нарушилось бы, но уже за счет появления силы Архимеда).

Однако, так как поверхностная яркость внутри пятна существенно меньше, это означает, что и температура вещества внутри пятна также меньше. При одинаковой плотности вещества это означает, что газовое давление внутри пятна меньше, чем снаружи, поэтому для обеспечения механического равновесия необходимо добавочное давление изнутри, которое и обеспечивается магнитным полем. Следовательно, мы можем найти магнитное давление p, вычислив разность внешнего p_e и внутреннего p_i газовых давлений.

Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа, получим, что

$$p = p_e - p_i = \frac{R}{\mu}\rho(T_e - T_i),$$

где R — универсальная газовая постоянная, μ — молярная масса вещества фотосферы (которую можно принять равной 1 г/моль, поскольку оно в основном состоит из атомарного водорода), ρ — плотность фотосферы, T_e и T_i — температуры снаружи и внутри пятна. Температура T_e известна и составляет около $6 \cdot 10^3$ К, а температуру T_i оценим, исходя из данных о соотношениях поверхностных яркостей. Так как они пропорциональны четвертой степени температуры, то $T_e/T_i = \sqrt[4]{5} \approx 1.5$. Поэтому

$$p = \frac{R}{\mu}\rho T_e(1 - T_i/T_e) = \frac{R}{\mu}\rho T_e/3.$$

Подставляя численные значения, получаем, что магнитное давление в пятне составляет около $1.6 \cdot 10^3$ Па, а отсюда индукция магнитного поля получается равной примерно 0.06 Тл.