XXIV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2017

5 февраля

5–6 классы

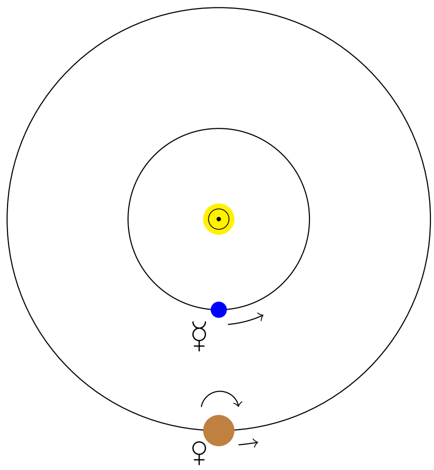
---

1. Житель Северного полушария Венеры наблюдает прохождение Меркурия по диску Солнца. В какую сторону будет двигаться Меркурий по диску? Почему?

Решение:

Все планеты Солнечной системы движутся вокруг Солнца против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса. Так как наблюдатель располагается в Северном полушарии Венеры, то планеты для него будут двигаться слева направо. Вследствие суточного вращения Венеры как Солнце, так и Меркурий движутся по небу практически с одинаковой скоростью, так что движение Меркурия по диску Солнца будет происходить только за счет движения планет по их орбитам вокруг Солнца. Меркурий движется вокруг Солнца быстрее, чем Венера, так что в момент прохождения он будет ее «обгонять». Следовательно, двигаться по диску Солнца он будет в том же направлении, в котором планеты движутся по орбитам, т.е. слева направо.

Известно, что Венера, в отличие Земли, вокруг своей оси вращается в направлении, противоположном направлению ее движения по орбите вокруг Солнца, т.е. по часовой стрелке, если смотреть с Северного полушария. Небо на Венере при этом вращается, в отличие от неба на Земле, против часовой стрелки, т.е. справа налево, если смотреть на Солнце в северном полушарии. Меркурий, таким образом, пойдет по диску Солнца в направлении, противоположном вращению неба.



Если же задаться вопросом, на восток или на запад пойдет Меркурий по диску Солнца для наблюдателя в Северном полушарии Венеры, то ответ на него упрется в определение востока и запада для Венеры.

Если определять восток на Венере как то направление, откуда Солнце встает, а запад — куда заходит, то Венера, как и Земля, вращается с запада на восток. Небо на Венере при этом вращается с востока на запад. Меркурий, в таком случае, пойдет по диску Солнца с запада на восток.

Если же считать, что направления на восток и на запад на Венере совпадают с таковыми для всей Солнечной системы, т.е. с земными (как, например, делается в компьютерных планетариях), то Венера будет вращаться с востока на запад, а ее небо — с запада на восток. В этом случае Меркурий пойдет с востока на запад.

М.В.Костина

2. «Суперлунием» иногда называется ситуация, когда Луна во время полнолуния оказывается ближе всего к Земле. В некоторый момент Луна в момент новолуния оказалась в апогее. Будет ли ближайшее полнолуние «суперлунием»? Поясните свой ответ.

Решение:

Апогей — самая далекая точка эллиптической орбиты Луны от Земли. Так как эллипс — фигура симметричная, то после апогея Луна придет в перигей, т.е. наиболее близкую к Земле точку ее орбиты, через половину истинного периода обращения Луны вокруг Земли, так называемого сидерического месяца[1].

Полнолуние же после новолуния наступит через половину периода смены фаз Луны, так называемого синодического месяца, который примерно на 2 суток больше сидерического.

Следовательно, дойдя до перигея Луна еще не достигнет полнолуния, а полнолуние случится тогда, когда Луна уже уйдет из ближайшей к Земле точки орбиты. Конечно, Луна при этом тоже будет выглядеть довольно большой на небе, но «суперлуния» не будет.

М.В.Костина

3. Некоторые особо запасливые люди сохраняют старые календари для повторного их использования, когда распределение дат дней в году по дням недели снова повторится. Как Вы думаете, каким может быть максимально возможный срок хранения календаря до первого повторного использования? Определите год из XXI века, календарь которого для повторного использования придется хранить настолько долго, если известно, что 1 января этого года — суббота.

Решение:

Распределение дат по дням недели в некотором году полностью задается двумя параметрами: днем недели, соответствующим 1 января, и тем, является год високосным или невисокосным.

Очевидно, что и для високосных, и для невисокосных годов повторение дня недели 1 января случится самое позднее на восьмой по счету год того же типа от текущего: семь предыдущих годов могут начинаться в разные дни недели, но в восьмой какой-то из этих дней вынужден будет повториться. Следовательно, если искомый год является невисокосным, то самое позднее через 10 лет календарь обязательно повторится (между идущими подряд 8 невисокосными годами могут оказаться еще 3 високосных года). Если же искомый год — високосный, то повторение произойдет не позже, чем через $7 \times 4 = 28$ лет. Заметим, кстати, что и не раньше: если бы какой-то день недели 1 января повторился бы быстрее, то и дальше все календари повторялись бы с меньшим, чем 28-летний, циклом, а это означало бы, например, что високосные годы не могут начинаться с некоторых дней недели.

[1] Строго говоря, это не совсем так. Период между двумя последовательными прохождениями Луны через перигей ее орбиты называется аномалистическим месяцем, и он длиннее сидерического примерно на 5 с половиной часов, однако в данном случае нас интересует продолжительность периода с точностью до суток, поэтому такой разницей можно пренебречь.

Является ли это максимально возможным сроком? Наверное, нет — хотя бы потому, что ответ на второй вопрос задачи в таком случае явно не будет единственным: в 100 лет периоды по 28 лет укладываются три раза, так что подходящих ответов будет как минимум три (а то и четыре).

Для увеличения срока ожидания надо вспомнить об особенностях устройства григорианского календаря, в котором 2100 год високосным не является. Тогда восьмой по счету високосный год после некоторого наступит не через 28 лет, а через 32 и, кроме этого, порядок чередования дней недели 1 января за счет невисокосности 2100 года собьется, в результате чего повторение календаря, возможно, удастся еще немного оттянуть. Следовательно, нам нужно найти какой-то високосный год, находящийся в последней трети XXI века.

Дальше действуем просто перебором. Известно, что каждый очередной невисокосный год день недели, соответствующий 1 января, сдвигается на единицу вперед, а в високосном году сдвиг происходит на два дня недели. Следовательно, в обычной ситуации день недели, с которого начинается следующий високосный год, сдвигается на пять дней вперед (или на два — назад, что одно и то же) по сравнению с предыдущим. 2017 год, как многие помнят, начался в воскресенье, следовательно, 2016 — в пятницу. Следовательно, $2016 + 28 + 28 = 2072$ год также начался в пятницу. Составим табличку дней недели первого января високосных годов последней трети XXI века, двигаясь от найденного нами 2072 года назад и вперед:

Год	День недели
2068	воскресенье
2072	пятница
2076	среда
2080	понедельник
2084	суббота
2088	четверг
2092	вторник
2096	воскресенье

Видно, что 2068 год уже можно было бы и не учитывать (через 28 лет после него XXII век еще не начался). Заодно можно заметить, что мы, по-видимому, уже получили второй ответ: из потенциальных кандидатов в субботу начинается только 2084 год. Осталось понять, сколько придется хранить его календарь.

2100 год начнется в пятницу. Но високосным он не будет, поэтому 2104 год начнется не в среду, а во вторник. Дальше чередование сохраняется:

Год	День недели
2104	вторник
2108	воскресенье
2112	пятница
2116	среда
2120	понедельник
2124	суббота

Отсюда видно, что, во-первых, максимальный срок хранения календарей оказался равен 40 годам, во-вторых, в XXI веке настолько «неудачных» годов пять, но в субботу начинается только один из них — уже найденный нами 2084 год.

П.А. Тараканов

4. Сегодня Луна покрыла Альдебаран (α Тельца). В какой фазе она при этом находилась? Известно, что в марте Луна опять покроет Альдебаран. В какой фазе она при этом будет?

Решение:

Сегодня — 5 февраля. Солнце в созвездии Тельца будет в конце мая — начале июня, т.е. примерно через 4 месяца. Таким образом, угловое расстояние на небе от Луны до Солнца сейчас около $4 \cdot (360/12) = 120°$, причем Когда угол между Луной от Солнцем на небе прямой, т.е. 90°, освещена половина диска и Луна в первой четверти. Когда угол развернуты, т.е. 180°, то диск освещен целиком и Луна — полная. Это значит, что сегодня освещено больше половины диска, (примерно на одну треть от оставшейся половины), следовательно Луна растущая, чуть больше первой четверти.

В следующий раз Луна покроет Альдебаран ровно через то время, которое ей требуется, чтобы завершить оборот вокруг Земли относительно звезд. Это время равно 27.3 суток. Для того, чтобы полностью повторилась фаза Луны, необходимо чуть большее время — так называемый синодический месяц — 29.5 суток. То есть к мартовскому покрытию Луна «не дойдет» до фазы, при которой было февральское покрытие, примерно 2 суток, следовательно она будет располагаться на небе ближе к Солнцу, на $2 \cdot (360°/29.5) \approx 24°$. С той точностью, с которой мы выполняем оценки положения Луны, можно считать, что она будет практически ровно в первой четверти.

Так как путь Солнца по созвездию Тельца занимает около месяца, то точное определение углового расстояния на небе между Луной и Солнцем 5 февраля выходит далеко за рамки задачи для 5-6 классов. Таким образом, будет оцениваться не ответ в виде точной фазы, а общих ход рассуждений и ответ, не противоречащий им.

В.В.Григорьев, М.В.Костина

5. Нейтрино, прилетевший к Земле от сверхновой, вспышка которой наблюдалась в феврале 1987 года, пролетел сквозь Землю и полетел дальше. Считая, что нейтрино движется со скоростью света, оцените расстояние в километрах, на которое он к настоящему времени удалился от Земли.

Решение:

Если вспышка сверхновой наблюдалась 30 лет назад, а нейтрино летит со скоростью света, то он также прилетел к Земле 30 лет назад. Значит, к настоящему моменту он удалился от Земли на 30 световых лет. Скорость света равна 300 тысяч км/с. Число секунд в году можно оценить так: $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \approx 32$ миллиона секунд. Следовательно за 30 лет нейтрино удалился от Земли на: $30 \cdot 32 \cdot 300 \approx 290\,000$ миллиардов км, т.е. на 290 триллионов км или примерно $3 \cdot 10^{14}$ км.

М.В.Костина, П.А.Тараканов

XXIV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2017

5 февраля

7–8 классы

1. 9 июля в 4 часа утра Луна наблюдается в полнолунии. В тот же день двумя часами позже Луна на небе окажется рядом с Плутоном. Когда наступит ближайшее противостояние Плутона?

Решение:

Луна в фазе полнолуния располагается в точке неба, противоположной Солнцу (противосолнечной). Период обращения Луны вокруг Земли равен 27.3 суток. В своем орбитальном движении она перемещается в противоположную вращению неба сторону, т.е. с запада на восток. Следовательно, Луна 9 июля за 2 часа Луна пройдет примерно 1° на восток. Это значит, что Плутон 9 июля расположен примерно в одном градусе к востоку от противосолнечной точки. Или Солнце в градусе к западу от «противоплутонной». Так как Солнце в годичном движении перемещается с запада на восток, то Солнце еще не дошло до точки противостояния около градуса. Очевидно, что Плутон на таких масштабах времени можно считать неподвижным. Известно, что Солнце проходит в своем годичном движении примерно 1° за 1 сутки. Следовательно, ровно через сутки после полнолуния наступит противостояние Плутона.

М.В.Костина

2. Вспомните «Песню Звездочета» из фильма «Красная Шапочка»:

> Там высоко-высоко кто-то пролил молоко
> и получилась Млечная дорога.
> А вдоль по ней. . .
> . . . Месяц плывет, как белая пирога.

Для определенности будем считать, что при этом освещена ровно половина диска Луны, а рога месяца направлены вверх. Где примерно на Земле и в какое время года можно наблюдать подобную картину?

Решение:

Известно, что Млечный Путь, о котором поется в песне, довольно сильно наклонен к плоскости эклиптики. Достаточно вспомнить, что Луна и планеты могут очень далеко отходить на небе от Млечного Пути.

Если рога месяца направлены вверх и освещена ровно половина диска, то угол между Луной и Солнцем равен 90°,а линия Луна–Солнце перпендикулярна одновременно горизонту наблюдателя и терминатору на Луне (границе освещенной и неосвещенной частей). Это с хорошей точностью означает, что перпендикулярной горизонту является эклиптика, т.к. наклон лунной орбиты к эклиптике мал. Такое бывает только в тропических широтах Земли.

Месяц находится на Млечном пути и, одновременно на эклиптике. Так как Млечный Путь довольно сильно наклонен к эклиптике, это означает, что Луна в момент наблюдения находится в точке (близ точки) пересечения эклиптики и плоскости Галактики, т.е. средней линии Млечного Пути. Известно, что центр нашей Галактики располагается в созвездии Стрельца. Так как оно одновременно является зодиакальным, следовательно, точка пересечения эклиптики и плоскости Галактики располагается как раз в этом созвездии. Очевидно, что существует еще одна точка пересечения этих плоскостей и располагается она на эклиптике в противоположном Стрельцу созвездии, т.е. в Близнецах (на самом деле на границе созвездий Тельца и Близнецов).

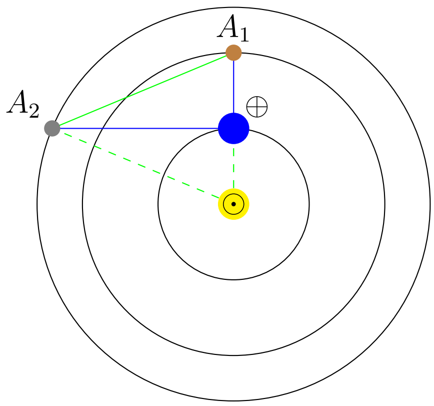
Итак Луна в первой или последней четверти в созвездии Стрельца или Близнецов, при этом Солнце, очевидно, под горизонтом. В Северном полушарии такое может быть, если Луна в первой четверти и Солнце западнее ее, или если Луна в последней четверти, а Солнце восточнее. А Южное в данном случае можно не рассматривать, т.к. взаимное положение Солнца и Луны в любом случае будет таким, как описано выше. То есть Луна либо западнее Солнца на 90°, либо восточнее и при этом либо в Близнецах, либо в Стрельце. Это дает 2 варианта ответа: Солнце либо в Деве, либо в Рыбах, т.е. дело происходит либо в феврале–марте, либо августе–сентябре.

М.В.Костина

3. С Земли производится радиолокация двух астероидов, один из которых находится в противостоянии, а другой — в квадратуре. Радиосигналы были посланы к астероидам одновременно, но от первого астероида сигнал вернулся обратно через 16 минут, а от второго — через 40 минут. Найдите расстояние между астероидами в этот момент. Определите радиусы орбит астероидов, считая, что орбиты круговые и лежат в плоскости эклиптики.

Решение:

Если один из астероидов находится в противостоянии, а другой — в квадратуре, то в треугольнике, вершинами которого являются астероиды и Земля, угол при Земле будет прямым вне зависимости от того, где конкретно располагается каждый из астероидов. Значит можно воспользоваться теоремой Пифагора: квадрат расстояния между астероидами будет равен сумме квадратов расстояний между каждым из астероидов и Землей. Так как при радиолокации сигнал проходит расстояние до астероида дважды: туда и обратно, то расстояние от Земли до первого астероида равно 8 световым минутам, а до второго — 20. Следовательно, расстояние между ними равно $\sqrt{8^2 + 20^2} = \sqrt{464} \approx 21.5$ световым минутам. Тот же результат можно получить, построив рисунок в масштабе и измерив линейкой расстояние между астероидами.



Вспомнив, что расстояние от Земли до Солнца — 1 астрономическая единица — равно 8 световым минутам, можно сразу понять, что расстояние от Солнца до астероида A_2, т.е. радиус его орбиты, равно расстоянию между астероидами в данный момент, т.е. около 21.5 св. мин (это гипотенуза треугольника Земля–Солнце–астероид), или 2.7 а.е.. Также легко понять, что радиус орбиты астероида A_1 равен 2 а.е.

В принципе, не очень вероятно, но условие задачи может быть понято так, что появляется еще один вариант взаимного расположения тел: астероид A_2 находится в противостоянии и до него 20 св. мин., а A_1 — в квадратуре и до него 8 св. мин. В таком случае расстояние между астероидами останется таким же, 2.7 а.е., радиус орбиты астероида A_2 будет равен $8 + 20 = 28$ св. мин. или 3.5 а.е., а радиус орбиты A_1 будет равен $\sqrt{2} \approx 1.4$ а.е.

Б.Б.Эскин, М.В.Костина

4. Угловой размер Юпитера составляет $0'.5$. Оцените, насколько чаще в среднем Луна покрывает звезды, чем Юпитер.

Решение:

Экспериментально выяснилось, что из-за неудачной формулировки условия задачи оно было прочитано разными участниками олимпиады по-разному. Одна группа участников поняла задачу так, как и задумывали авторы: «Оцените, насколько чаще Луны покрывает звезды, чем Юпитер покрывает звезды». Другая: «Оцените, насколько чаще Луна покрывает звезды, чем Луна покрывает Юпитер». Так как это две принципиально разных задачи, то приводим решение обеих и оба варианта решения будут оценены одинаково.

Первый вариант:

Так как задача оценочная, можно считать, что звезды распределены по небу равномерно, а Луна и Юпитер движутся строго по эклиптике. И Юпитер, и Луна, двигаясь по небу, «заметают» собой полосы, длины которых одинаковы и равны $360°$, а ширины равны угловым диаметрам светил. Если бы оба светила двигались по небу с одинаковой скоростью, то частота покрытий Луной звезд была бы во столько раз больше, во сколько площадь, заметаемая Луной больше, чем заметаемая Юпитером. Так как длины заметаемых полос равны, то площади их отличаются во столько раз, во сколько отличаются угловые диаметры Луны и Юпитера. Угловой диаметр Луны равен примерно $30'$, следовательно при одинаковой скорости частоты отличались бы в $30/0.5 = 60$ раз.

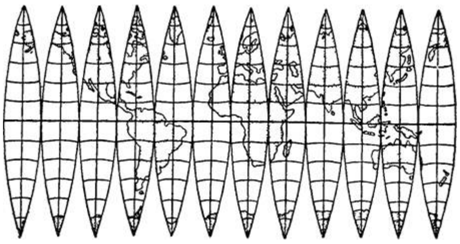
Однако, Луна делает полный оборот вокруг Земли относительно звезд за 27.3 суток, т.е. чуть меньше, чем за 1 месяц, а Юпитер завершает свой полный путь среди звезд за примерно за 12 лет (период полного оборота его вокруг Солнца). Тем самым скорость движения Луны по небу выше, чем у Юпитера примерно в 150 раз. Так что Луна в среднем будет покрывать звезды в $150 \cdot 60 = 9$ тысяч раз чаще, чем Юпитер.

Эту оценку можно уточнить (подобные рассуждения будут оценены дополнительными баллами). Известно, что Юпитер, как все планеты, совершает петлеобразное движение по небу. Таким образом, за 12 лет он проходит среди звезд бо́льший путь, чем если бы двигался просто по окружности. Если вспомнить приблизительные размеры петель, которые Юпитер описывает на небе, то можно оценить, что Юпитер заметает раза в полтора бо́льшую площадь, следовательно, соотношение частоты покрытий будет меньше, примерно 6 тысяч раз.

Второй вариант:

Если пренебречь наклоном лунной орбиты к эклиптике, то Луна в своем движении среди звезд заметает на небе полоску площадью $360° \cdot 0°.5 = 180$ квадратных градусов (см. предыдущий вариант решения). Если считать, что звезды распределены по небу равномерно, то количество звезд, которые Луна может покрыть за один проход по небу, равно (по правилу пропорции) числу всех звезд на небе, умноженному на отношение площади покрываемой Луной полоски к площади всего неба (т.е. доли площади неба, покрываемой Луной). Логично предположить, что речь идет о звездах, видимых невооруженным глазом. Их на всем небе насчитывается около 6 тысяч штук (любая разумная оценка числа звезд, о которых идет речь, будет принята).

Оценим площадь неба. Тот, кто знает, может сразу написать, что площадь неба составляет около 40 тысяч кв. градусов. Кто не знает, может с неплохой точностью оценить площадь неба как площадь карты звездного неба: 180° по ширине (от полюса, до полюса) и 360° по длине вдоль экватора, т.е. $180^\circ \cdot 360^\circ \approx 65$ тысяч кв. градусов. Видно, что эта оценка в полтора раза выше, чем истинное значение. Очевидно, что эта разница берется из-за невозможности без разрывов изобразить поверхность шара на плоскости. Вспомнив, как выглядит изображение развертки глобуса, например Земли (см. рисунок внизу), можно даже попытаться оценить ошибку, которую мы делаем, считая площадь неба как площадь карты.



Итак, в зависимости от оценки площади неба, получаем, что в полоске, заметаемой Луной, содержится примерно 20 (при площади неба 65 тыс. кв. гр.) или 30 (при 40 тыс. кв. гр.) звезд, видимых невооруженным глазом. Следовательно, Юпитер — который один — покрывается Луной в 20 или 30 раз реже, чем такие звезды.

Эту, довольно грубую, оценку можно уточнить (подобные рассуждения будут оценены дополнительными баллами). Лунная орбита все-таки наклонена к эклиптике заметно сильнее, чем орбита Юпитера. Из-за этого Луна не может покрывать Юпитер в каждый свой проход по небу. А звезды, если считать их распределенными равномерно, может, причем с той же частотой. Если считать, что Юпитер всегда располагается строго на эклиптике, что изменение частоты его покрытий Луной из-за наклона ее орбиты можно оценить так. Луна может покрыть Юпитер, находящийся на эклиптике, если в момент встречи с ним располагается недалеко от одной из точек пересечения своей орбиты с эклиптикой. При этом она может быть не более, чем на свой диаметр, т.е. на $0^\circ.5$ выше или ниже Юпитера. Так как требуется среднюю частоту покрытий, то нужно рассматривать очень большие промежутки времени. Тогда можно считать, что в момент встречи с Юпитером, Луна может находиться на любом расстоянии от эклиптики, от максимально возможного «вверх», до максимально возможного «вниз». Так как наклон орбиты Луны к эклиптике составляет примерно 5°, то в целом ширина полосы, в которой «в среднем» может находиться Луна, равна 10°, т.е. в 10 раз больше допустимого для покрытия промежутка в 2 диаметра Луны. таким образом, частота покрытия Юпитера снижается в 10 раз, а частота покрытия звезд остается неизменной. В результате, получаем, что видимые невооруженным глазом звезды Луна покрывает примерно в 300 раз чаще, чем она покрывает Юпитер.

Конечно, результат еще изменится, если участь, что Юпитер движется среди звезд, да еще и делая при этом петли, но учет этих факторов далеко выходит за рамки данной оценочной задачи.

Примечание. Заметим, что в решении данного варианта задачи совершенно не нужно использовать данный в условии угловой размер Юпитера. Это могло бы натолкнуть участников на иное толкование вопроса задачи.

Коллектив

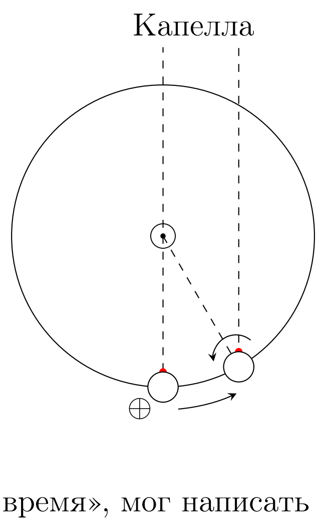
5. Студент-астроном заметил, что его старый механический будильник показывает одно и то же время каждый раз, когда Капелла оказывается на наибольшей высоте над горизонтом. Спешит или отстает будильник? На какое время он уйдет вперед или отстанет за один час?

Решение:

Известно, что часы, которыми мы пользуемся в быту, ходят по времени, связанному с суточным движением Солнца по небу (конечно, усредненным). То есть, если мы будем каждые сутки наблюдать Солнце в момент, когда оно оказывается на наибольшей высоте над горизонтом (в так называемой верхней кульминации), то, в среднем, исправные часы будут показывать одинаковое время (полдень, если мы находимся в середине часового пояса и нет декретного времени)[1].

Если же мы будем наблюдать какие-нибудь звезды, например, Капеллу, в момент верхней кульминации, то показания наших часов в этот будут сдвигаться каждые сутки вследствие того, что Солнце перемещается по небу среди звезд в своем годичном движении.Определим, куда и насколько.

Для удобства рассмотрим некоторый момент времени, когда Земля повернута определенной стороной одновременно к Солнцу и к Капелле. Очевидно, что в этот момент обе эти звезды окажутся в верхней кульминации (неважно, что при этом Капелла не будет видна). Сделав полный оборот вокруг своей оси, Земля окажется направлена той же стороной к Капелле. Но за это время она успеет немного сместиться по орбите вокруг Солнца, и для того, чтобы оказаться в исходном положении относительно Солнца, ей необходимо еще немного повернуться. Именно время, затраченное на этот дополнительный небольшой поворот, и является разницей между периодом вращения Земли вокруг оси относительно звезд (истинными, или звездными, сутками) и периодом вращения Земли вокруг оси относительно Солнца (солнечными сутками) Заметим, что солнечные сутки несколько больше звездных. В целом за год получится, что относительно Капеллы Земля совершит ровно на 1 оборот вокруг своей оси больше, чем относительно Солнца, т.к. один ее оборот вокруг оси будет как бы «скомпенсирован» одним оборотом вокруг Солнца по орбите. Тем самым мы получаем, что, если продолжительность года составляет 365 солнечных и 366 звездных суток, то звездные сутки равны: $24 \cdot (365/366) \approx 23$ часа 56 минут, т.е. короче солнечных примерно на 4 минуты.



Тот, кто знает про т.н. «звездное время», мог написать этот результат сразу.

Следовательно в каждый последующий день будильник, отслеживающий движение Капеллы, т.е. идущий по звездному времени, в момент ее кульминации будет показывать

[1] Из-за неравномерности движения Солнца по небу, связанного с эллиптичностью земной орбиты и наклоном эклиптики к экватору, это время будет немного изменяться в течение года, совершая небольшие колебания относительно среднего значения, величина которых не превышает 16 минут (более подробно об этом можно узнать, прочитав про т.н. «уравнение времени»).

на 4 минуты больше, чем обычный, идущий по солнечному времени. То есть он спешит на 4 минуты в сутки. Следовательно, за час будильник уйдет вперед на $4/24 = 1/6$ минуты или на 10 секунд.

Однако у задачи есть и второй вариант решения: будильник может просто стоять. Тогда за час он, естественно, отстанет на 1 час.

А.В.Веселова, П.А.Тараканов, М.В.Костина

9 класс

1. Вспомните «Песню Звездочета» из фильма «Красная Шапочка»:

> …звезда с звездою говорит.
>
> — Который час?
>
> — Двенадцатый, примерно…
>
> — А на Земле в этот час лучше всего видно нас……

Считая, что разговор происходит сегодня, оцените возможные значения экваториальных координат разговаривающих звезд.

Решение:

Лучше всего звезды видны тогда, когда они находятся в верхней кульминации. Поскольку на Земле «примерно двенадцатый» час, можно считать, что действие происходит в истинную солнечную полночь, т.е. прямые восхождения Солнца и разговаривающих звезд отличаются примерно на 12^h.

Прямое восхождение Солнца в момент весеннего равноденствия по определению равно 0^h, а затем в течение года примерно равномерно увеличивается до 24^h, на 2^h за один месяц. Поскольку сегодня 5 февраля, то до очередного весеннего равноденствия (которое случится 20 марта) осталось полтора месяца. Следовательно, сегодня прямое восхождение Солнца равно примерно 21^h, а прямое восхождение разговаривающих звезд около 9^h.

Попробуем оценить склонение звезд. Во-первых, отметим, что условия видимости звезд тем слабее зависят от времени, чем дальше от небесного экватора эти звезды находятся. В самом деле, например, околополярные звезды в некоторой местности либо всегда видны (и примерно на одной и той же высоте над горизонтом), либо, наоборот, не видны совсем. Во-вторых, поскольку звезды лучше видны «на Земле», а не в каком-то определенном месте Земли, то, по-видимому, это означает, что их принципиально можно наблюдать практически со всей Земли. Отсюда получаем второй вывод — говорящие звезды находятся примерно на экваторе, т.е. их склонение близко к нулю.

М.В.Костина

2. Звезда Барнарда (V2500 Oph) имеет: собственное движение по прямому восхождению $-0.8''$/год, по склонению $10''.3$/год; ее лучевая скорость равна -110 км/с; ее годичный параллакс составляет $0''.55$. Определите, когда ее полное собственное движение было (или будет) максимальным. Чему оно при этом будет равно?

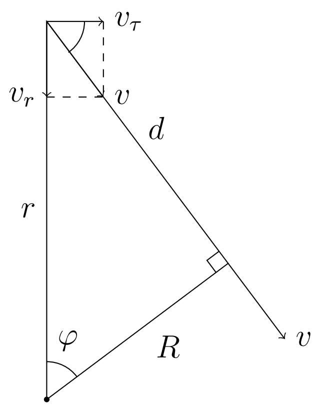
Решение:

Начнем с терминологического уточнения. Собственное движение — это угловая скорость движения звезды по небесной сфере. Соответственно, собственное движение по какой-то координате — это компонента угловой скорости, направленная перпендикулярно линии, на которой соответствующая координата не меняется, но (в общем случае) не скорость изменения этой координаты! Конечно, в случае собственного движения по склонению разница между этими двумя вариантами отсутствует, но вот в случае прямого восхождения ситуация иная. Разница будет отсутствовать в том случае, если звезда находится на небесном экваторе, но по мере приближения к полюсам одной и той же компоненте угловой скорости будет соответствовать все большая скорость изменения координаты. Сделав чертеж, можно обнаружить, что если скорость изменения прямого восхождения равна μ_α, то собственное движение по прямому восхождению равно $\mu_\alpha \cos\delta$, где δ — склонение звезды. В условии задачи дана уже вторая величина, с внесенной поправкой за $\cos\delta$, поэтому для определения общего собственного движения координаты звезды Барнарда не нужны.

Заметим, впрочем, что в данном случае учет изложенного выше обстоятельства практически не играет роли — звезда Барнарда очень удачно для нас движется в основном по склонению. Конечно, можно попытаться вычислить «более точное» значение собственного движения $\mu = \sqrt{(\mu_\alpha \cos\delta)^2 + \mu_\delta^2}$, однако эта попытка, даже если она увенчается успехом, даст в результате «точное» значение $\mu = 10''.331\ldots/\text{год}$, которое с имеющейся в нашем распоряжении точностью исходных данных ничем не отличается от $\mu = \mu_\delta = 10''.3/\text{год}$.

Далее отметим, что лучевая скорость звезды Барнарда отрицательна, т.е. она направлена к нам. Таким образом, звезда сейчас приближается к Солнцу и в некоторый момент пройдет от него на минимальном расстоянии. В этот момент лучевая скорость звезды станет нулевой, пространственная скорость звезды v совпадет с тангенциальной скоростью (которая тем самым станет наибольшей), и, поскольку собственное движение звезды представляет собой отношение тангенциальной скорости к расстоянию до звезды, собственное движение в этот момент также станет наибольшим.

Построим чертеж:



Здесь r — расстояние до звезды Барнарда, $v_\tau = \mu \cdot r$ — тангенциальная скорость звезды Барнарда, v_r — ее лучевая скорость (все в данный момент), d — расстояние, которое звезда Барнарда пройдет до момента максимального сближения с Солнцем, R — минимальное расстояние от звезды Барнарда до Солнца.

Определим современное расстояние до звезды Барнарда r. Поскольку нам дан ее годичный параллакс π в секундах, то расстояние равно $r = 1/\pi = 1.8$ пк.

Для удобства дальнейших вычислений заметим, что в качестве единиц скорости проще использовать не километры в секунду, а астрономические единицы в год. Пересчитать одно в другое несложно, если вспомнить, что орбитальная скорость Земли составляет примерно 30 км/с и 6.28 а.е./год. Получаем, что 1 а.е./год$\approx$ 4.7 км/с.

Почему это удобно? Мы знаем, что сейчас на небесной сфере звезда Барнарда перемещается на $10''.3$/год. Известно, что с расстояния 1 пк под углом $1''$ видно расстояние 1 а.е. (просто по определению парсека). Поскольку все рассматриваемые углы малы, то это означает, что собственное движение $10''.3$/год на расстоянии 1.8 пк соответствует тангенциальной скорости $v_\tau = 1.8 \cdot 10.3 = 18$ а.е./год (сохранять больше значащих цифр не стоит — один из сомножителей имел только две значащих цифры, следовательно, и результат будет иметь столько же). Лучевая скорость $v_r = 110$км/с ≈ 23 а.е./год (будем для удобства использовать ее модуль, поскольку всю необходимую информацию из ее знака мы уже получили и учли). Таким образом, полная пространственная скорость звезды $v = \sqrt{v_r^2 + v_\tau^2} \approx 29$ а.е./год (заметим, что соответствующее вычисление можно легко заменить построением прямоугольного треугольника с катетами соответствующей длины (например, в сантиметрах) и измерением линейкой длины его гипотенузы).

Теперь найдем угол φ, отмеченный на чертеже (вернее, его синус и косинус, поскольку нужны нам на самом деле именно они). Из рисунка видно, что $\sin\varphi = v_r/v = 23/29$, $\cos\varphi = v_\tau/v = 18/29$. Тогда $d = r\sin\varphi = 1.4$ пк и $R = r\cos\varphi = 1.1$ пк.

Осталось получить окончательный ответ. В тот момент, когда звезда Барнарда сблизится с Солнцем на минимальное расстояние, ее собственное движение $\mu_{\max} = v/R$. Использованные нами единицы позволяют сразу же подставить числа и получить $\mu_{\max} = 29/1.1 = 26''$/год.

Для определения времени, когда это случится, следует вспомнить, что в одном парсеке примерно 206265 астрономических единиц (естественно, именно такая точность не требуется). Соответственно, расстояние $d = 1.4$ пк со скоростью 29 а.е./год звезда Барнарда пройдет за время, равное $1.4 \cdot 2.06 \cdot 10^5/29 = 10^4$ лет.

Наконец заметим, что мы совершенно не обсуждали два, казалось бы, возможных фактора: движение самого Солнца и то, что звезды могут двигаться не прямолинейно и равномерно. Однако в данном случае это не требуется.

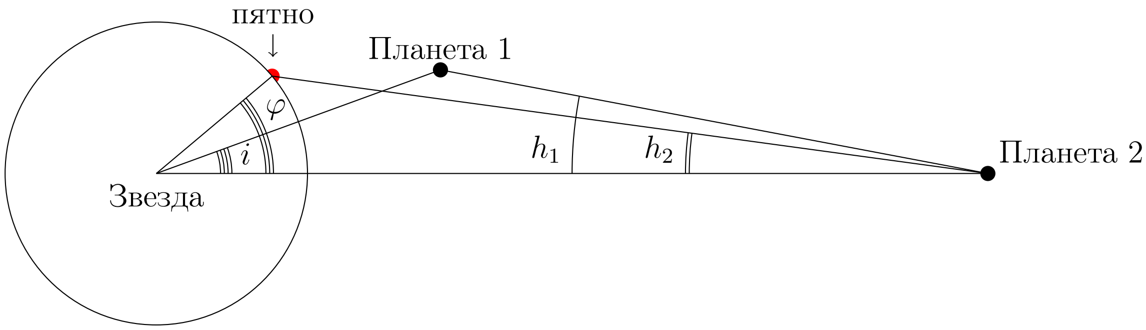
Учет движения Солнца не нужен, поскольку все данные в условии величины определяются именно относительно него, т.е. мы с самого начала работали в системе отсчета, в которой Солнце покоится. Что же касается возможного отклонения движения звезд от прямолинейного и равномерного, то, с одной стороны, у нас нет данных, позволяющих это учесть, с другой — подобное отклонение может быть связано либо с вращением звезд вокруг центра Галактики, либо с гравитационным влиянием звезд друг на друга. Период обращения Солнца (а также близких звезд, вроде звезды Барнарда) вокруг центра Галактики на четыре порядка больше, чем интересующие нас интервалы времени, поэтому этим фактором мы действительно можем пренебречь, а для существенного изменения пространственных скоростей звезд из-за взаимодействия друг с другом звезды должны сблизиться на малое расстояние. Однако мы сами только что получили оценку характерного времени сближения и минимального расстояния для одной из ближайших к Солнцу звезд, которая к тому же нестандартно быстро движется. Очевидно, что других претендентов на близкое сближение с Солнцем или звездой Барнарда за интересующие нас недолгие 10 тысяч лет, просто не имеется.

Б.Б.Эскин, П.А.Тараканов

3. В некоторой планетной системе звезда имеет радиус, равный солнечному. Одна из планет имеет радиус орбиты 0.3 а.е., вторая — 2 а.е. Плоскость орбиты первой планеты наклонена на 5° к плоскости вращения звезды, орбита второй планеты лежит в плоскости вращения звезды. На поверхности звезды имеется пятно на широте +10°. Можно ли с экватора второй планеты наблюдать затмение первой планетой пятна, если ось вращения второй планеты перпендикулярна плоскости ее орбиты?

Решение:

Пусть a — радиус орбиты Планеты 1 , i — ее наклон, φ — широта пятна, R — радиус звезды, r — радиус орбиты Планеты 2. Построим рисунок (для наглядности радиус звезды и углы сильно преувеличены):



Максимальная высота первой планеты при наблюдении со второй

$$h_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{a \cdot \sin i}{r - a \cdot \cos i}\right).$$

Все углы в этой формуле малые, поэтому арктангенс и синус соответствующих углов равны им самим, выраженным в радианах, а косинус можно с очень хорошей точностью считать равным 1. Заметим, что при пересчете синуса и арктангенса коэффициент, связывающий радианы и градусы, войдет в формулу дважды: в знаменатель и в числитель, и тем самым сократится. Тогда формулу можно переписать в виде :

$$h_1 = \frac{a \cdot i}{r - a},$$

где угол i выражен в градусах. Отсюда получаем, что $h_1 = 0^\circ.88$.

Заметим, что это значение больше, чем угловой радиус звезды, видимый с Планеты 2 ($0^\circ.5/4 = 0^\circ.125$). Тем самым высоту пятна для наблюдателя h_2 можно не вычислять. Очевидно, что покрытие принципиально возможно, если только пятно «доживет» до подходящего момента.

А.В.Веселова

4. Оцените путь, который Солнце проходит в Солнечной системе (относительно центра масс Солнечной системы) за год.

Решение:

Для того, чтобы найти скорость движения Солнца относительно центра масс (барицентра) Солнечной системы, следует понять, почему центр Солнца не совпадает с барицентром. Это является следствием наличия в Солнечной системе других массивных тел. Что это за тела?

Очевидно, что они должны быть достаточно тяжелыми. Самое тяжелое, что имеется — планеты. Если некоторая планета имеет период обращения вокруг Солнца, равный P, радиус орбиты r и массу m, то в таком случае скорость ее движения по орбите $v = 2\pi r/P$. Из закона сохранения импульса (или правила рычага вкупе с определением положения центра масс) следует, что $mv = MV$, где M — масса Солнца, а V — его скорость относительно центра масс.

Тогда

$$V = 2\pi\frac{r}{P}\,\frac{m}{M},$$

и, учитывая III закон Кеплера ($P = r^{3/2}$, если периоды мы измеряем в годах, а расстояния — в астрономических единицах), окончательно получаем

$$V = \frac{2\pi}{\sqrt{r}}\,\frac{m}{M}.$$

Массы всех планет земной группы явно слишком малы, и их можно не учитывать. Остаются планеты-гиганты. Однако, поскольку самая массивная планета-гигант — Юпитер — одновременно является и самой близкой к Солнцу, очевидно, что именно Юпитер является главной причиной движения Солнца вокруг центра масс Солнечной системы. Радиус его орбиты составляет около 5 а.е., масса составляет около 1/1000 массы Солнца, поэтому

$$V \approx \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{5}} 10^{-3} \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ а.е./год.}$$

Соответственно, за один год Солнце проходит около 0.003 а.е. При желании ответ можно (но не обязательно нужно) перевести, например, в километры, получится примерно $4 \cdot 10^5$ км — расстояние, сравнимое с расстоянием от Земли до Луны.

Б.Б.Эскин

5. Звезда, имеющая видимую звездную величину 5^m, расположена на расстоянии 100 пк от Солнца. На каком расстоянии от звезды должна располагаться планета, чтобы количество энергии, приходящее на единицу площади планеты, было таким же, как на Земле от Солнца?

Решение:

Абсолютная звездная величина Солнца примерно $+5^m$. Это означает, что Солнце, находясь на расстоянии 10 пк, имело бы видимую звездную величину $+5^m$. Если Солнце будет располагаться в 10 раз дальше, то освещенность, создаваемая им (прямо пропорциональная светимости и обратно пропорциональная квадрату расстояния) станет меньше в 10^2 раз. Следовательно, светимость звезды в 100 раз больше, чем светимость Солнца. Тогда для того, чтобы освещенность, создаваемая звездой на планете, совпадала с освещенностью, создаваемой Солнцем на Земле, нужно, чтобы планета располагалась от звезды в 10 раз дальше, чем Земля от Солнца, т.е. искомое расстояние должно равняться 10 а.е.

А.В.Веселова

XXIV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2017

5 февраля

---

10 класс

---

1. Оцените, во сколько раз светимость Земли больше суммарной светимости всех людей на планете.

Решение:

Можно оценить светимость Земли и светимость одного человека, считая их абсолютно черными телами (что, конечно, верно лишь приблизительно). Однако, заметив, что средняя температура Земли и температура человека мало отличаются (вторая больше первой менее чем на 10%), и предположив, что излучательная способность и Земли, и тела человека в целом однотипным образом зависят от температуры (что также правдоподобно), можно сказать, что отношение светимостей в любом случае будет порядка отношения площадей поверхностей Земли и всех людей на Земле.

Предполагая, что человека можно представить как шар радиусом $R = 1$ м, получаем

$$\frac{L_\oplus}{L_{\text{людей}}} = \frac{4\pi R_\oplus^2}{N \cdot 4\pi R^2} = \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{R_\oplus}{R}\right)^2,$$

где N — число людей на Земле ($N \approx 7 \cdot 10^9$).

Подставляя числа, получаем, что отношение светимостей оказывается около $5 \cdot 10^3$. Естественно, точность оценки невелика, поэтому правильнее будет сказать, что итоговый результат — $10^{(3\div4)}$.

А.А.Федотов

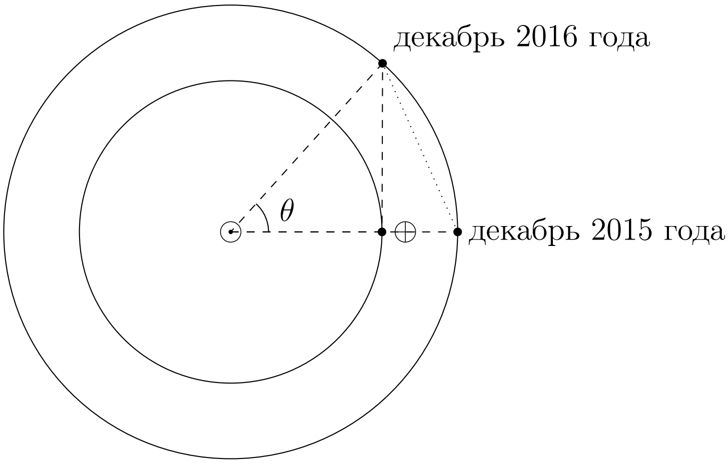
2. Астероид наблюдался в Петербурге 23.12.2015 в истинную солнечную полночь в верхней кульминации на высоте 53°. 23.12.2016 он наблюдался в верхней кульминации уже через 6 часов после полуночи на высоте 30°. Определите параметры орбиты астероида, считая его орбиту круговой.

Решение:

Заметим, что указанные высоты кульминаций для широты Петербурга $\varphi = 60°$ означают, что кульминации происходили к югу от зенита. Поскольку высота в верхней кульминации к югу от зенита равна $h = 90° - \varphi + \delta$ (где δ — склонение), то в декабре 2015 года астероид имел склонение $\delta_{2015} = 23°$, а в декабре 2016 года — $\delta_{2016} = 0°$.

Поскольку 23 декабря — это примерная дата зимнего солнцестояния, Солнце в эти дни имело прямое восхождение $\alpha_\odot = 18^h$. Астероид, кульминировавший в 2015 году в истинную солнечную полночь, соответственно, имел прямое восхождение $\alpha_{2015} = 6^h$, а поскольку в 2016 году его кульминация произошла на 6 часов позже, то там $\alpha_{2016} = 12^h$. Сравнив это с уже известными склонениями, можно заметить, что в декабре 2015 года астероид находился в точке летнего солнцестояния, а в декабре 2016 года — в точке осеннего равноденствия. Следовательно, он движется по эклиптике.

Кроме этого, можно отметить, что в декабре 2015 года астероид наблюдался в противостоянии, а в декабре 2016 года — в квадратуре, причем за один год он прошел по эклиптике либо угол 90°, двигаясь в том же направлении, что и Солнце, либо угол 270°, двигаясь в обратном направлении (обладая т.н. «ретроградной» орбитой). Пройти больше 360° и оказаться в нужном месте он не мог — поскольку он был в противостоянии, то период его обращения вокруг Солнца заведомо больше одного года. Определим, какую долю своей орбиты он при этом прошел, для чего построим чертеж:



Если радиус орбиты астероида a, то угол между направлениями на него с вершиной в Солнце равен $\theta = \arccos(1/a)$, причем за год астероид прошел либо θ, либо $2\pi - \theta$. Соответственно, период его обращения вокруг Солнца в годах составляет либо $P_1 = 2\pi/\theta$, либо $P_2 = 2\pi/(2\pi - \theta)$ (угол θ мы измеряем в радианах, хотя, конечно, можно воспользоваться и градусной мерой, соответствующим образом изменив выражения). Измеряя a в астрономических единицах, мы можем, воспользовавшись III законом Кеплера, выразить $P = a^{3/2}$, откуда в конечном счете имеем два уравнения:

$$a_1^{3/2} \arccos(1/a_1) = 2\pi,$$

$$a_2^{3/2} \left(2\pi - \arccos(1/a_2)\right) = 2\pi,$$

определяющих возможные значения большой полуоси орбиты астероида. Конечно, решать их аналитически затруднительно. Однако подобрать ответ с разумной точностью все же можно.

Возведем первое из уравнений в квадрат: $a_1^3 \arccos^2(1/a_1) = 4\pi^2 \approx 40$, и вычислим левую часть для $a_1 = 2, 3, 4$. При этом арккосинус можно оценить, например, просто построив прямоугольный треугольник с нужным соотношением катета и гипотенузы, а затем измерив угол при вершине. Еще один способ оценки арккосинуса: можно, догадавшись, что аргумент $1/a$ будет достаточно малым, записать, что для $x \approx 0$ верно $\arccos x \approx \frac{\pi}{2} - \arcsin x \approx \frac{\pi}{2} - x$ (ошибка в интересующем нас случае появится в третьем знаке после запятой, что весьма недурно и более чем достаточно для наших целей).

Наконец, можно вообще обойтись без арккосинусов, если вспомнить II закон Кеплера и считать, что площадь сектора, которую радиус-вектор астероида замел за год, мало отличается от площади треугольника с вершинами в двух наблюдавшихся положениях астероида и в Солнце. Из рисунка видно, что площадь этого треугольника равна $\frac{a_1}{2}\sqrt{a_1^2 - 1}$, и тогда

$$P_1 = a_1^{3/2} \approx \frac{\pi a_1^2}{\frac{a_1}{2}\sqrt{a_1^2 - 1}},$$

что сводится к уравнению $(a_1^2 - 1)\, a_1 = 4\pi^2$.

Все эти варианты в конечном счете дают близкие результаты: $a_1 \approx 3$ а.е.

Один из корней второго уравнения очевиден: $a_2 = 1$ а.е. Можно задаться вопросом, существуют ли другие. Попробуем воспользоваться предложенной выше оценкой арккосинуса.

Если $1/a_2 \ll 1$, то
$$a_2^{3/2}\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}\right) = 2\pi.$$

Даже если пренебречь малым слагаемым $1/a$, получаем $3\pi\, a^{3/2} = 4\pi$, откуда $a_2^{3/2} = 4/3$, причем это оценка a_2 сверху. Фактически это означает, что в любом случае $a_2 \approx 1$ а.е. (а использование более серьезных математических методов покажет, что других решений нет).

Эксцентриситет орбиты равен нулю по условию, аргумент перицентра для круговых орбит не определен и, поскольку орбита лежит в плоскости эклиптики, долгота восходящего узла также не определена.

Осталось разобраться с наклоном орбиты к плоскости эклиптики. Он может быть равен $0°$, если астероид вращается в ту же сторону вокруг Солнца, что и Земля (когда большая полуось его орбиты равна 3 а.е.), и $180°$, если направление движения обратное, а большая полуось орбиты равна 1 а.е.

В.В.Григорьев, П.А.Тараканов

3. Сверхновая Тихо Браге появилась на небе 6 ноября 1572 года и имела в максимуме блеск, равный -4^m. Сверхновая Кеплера появилась на небе 9 октября 1604 года и имела в максимуме блеск $-2^m.5$. Считая, что в максимуме блеска обе сверхновые имели абсолютную звездную величину, равную $-19^m.5$, определите, вспышка какой из Сверхновых произошла раньше и насколько.

Решение:

Запишем соотношение между абсолютной звездной величиной M, видимой звездной величиной m, расстоянием до объекта, выраженном в парсеках r, а также (для вящей точности) поглощением излучения в межзвездной среде Галактики A:
$$m = M + 5\,\lg r - 5 + A \cdot r.$$

Отсюда, выражая для каждой из двух сверхновых абсолютную звездную величину и приравнивая полученные выражения, имеем
$$m_{\text{ТБ}} - 5\,\lg r_{\text{ТБ}} + 5 - A \cdot r_{\text{ТБ}} = m_{\text{К}} - 5\,\lg r_{\text{К}} + 5 - A \cdot r_{\text{К}}.$$

Преобразовав выражения (и записав их с учетом того, что $r_{\text{К}} > r_{\text{ТБ}}$), получаем
$$m_{\text{К}} - m_{\text{ТБ}} = 5\,\lg \frac{r_{\text{К}}}{r_{\text{ТБ}}} + A \cdot (r_{\text{К}} - r_{\text{ТБ}}).$$

Подставим числа, учитывая, что поглощение в Галактике составляет $1^m \div 2^m$ на килопарсек, т.е. в используемых единицах $A \sim 10^{-3}$:
$$1.5 = 5\,\lg \frac{r_{\text{К}}}{r_{\text{ТБ}}} + 10^{-3} \cdot (r_{\text{К}} - r_{\text{ТБ}}). \qquad (*)$$

Решить это уравнение сразу несколько затруднительно, но можно подобраться к решению по частям.

Забудем на какое-то время про межзвездное поглощение и сосчитаем оценочное расстояние до Сверхновой Тихо Браге $\tilde{r}_{\text{ТБ}}$:
$$-4 = -19.5 + 5\,\lg \tilde{r}_{\text{ТБ}} - 5,$$

откуда $\tilde{r}_{\text{ТБ}} \sim 10^4$ пк. В таком случае для Сверхновой Кеплера (также без учета поглощения) можно записать
$$1.5 = 5\,\lg \frac{\tilde{r}_{\text{К}}}{\tilde{r}_{\text{ТБ}}}$$

и

$$\frac{\tilde{r}_{\text{К}}}{\tilde{r}_{\text{ТБ}}} = 10^{0.3} \approx 2,$$

т.е. она произошла на расстоянии, в 2 раза большем.

Отсюда сразу же следует, во-первых, что вспышка Сверхновой Кеплера произошла существенно раньше, во-вторых, что для оценок расстояний пренебрегать межзвездным поглощением не стоит.

Вернемся к формуле (*), но будем измерять расстояния в килопарсеках (и переобозначим их как R с нужным индексом). Тогда

$$\frac{1}{3} = \lg\frac{R_{\text{К}}}{R_{\text{ТБ}}} + \frac{1}{5}\cdot(R_{\text{К}} - R_{\text{ТБ}}).$$

Очевидно, что отношение расстояний должно быть меньше 2, причем существенно меньше (наблюдаемую разницу в видимых звездных величинах $1^m.5$ можно накопить только за счет поглощения на расстоянии порядка 1 кпк), а даже ближайшая Сверхновая заведомо дальше $1 \div 2$ кпк, поэтому пренебрежем первым членом в правой части, считая, что он мал. Тогда $R_{\text{К}} - R_{\text{ТБ}} \approx 2$ кпк и, следовательно, вспышка Сверхновой Кеплера произошла на несколько тысяч лет раньше, чем вспышка Сверхновой Тихо Браге (в одном парсеке примерно 3.26 светового года, моменты регистрации вспышек на таких временных масштабах очевидно можно считать фактически совпадающими).

Заметим, что задачу можно было решать и другим путем: любым способом оценив, что расстояние до Сверхновых порядка 10^1 кпк, сказать, что на таких масштабах одинаковые объекты на разных расстояниях имеют разный блеск в основном из-за ослабления межзвездным поглощением (а не из-за собственно уменьшения блеска с расстоянием), после чего сразу же перейти к последнему этапу решения, изложенного выше. Отметим также, что итоговая численная оценка разницы расстояний существенно зависит от принятой оценки межзвездного поглощения, хотя порядок величины, конечно, останется тем же. Дополнительно можно отметить, что полученная оценка сделана в предположении однотипности двух Сверхновых, хотя в реальности тип Сверхновой Кеплера неизвестен.

Б.Б.Эскин, П.А.Тараканов

4. Для изменения орбиты опасного астероида диаметром 300 м предлагается ударить по нему тяжелой твердой болванкой массой 300 кг, двигающейся со скоростью 10 км/с относительно астероида. Известно, что большая полуось орбиты астероида равна 1 а.е., а ее эксцентриситет не превосходит 0.25. Оцените, в каких пределах может измениться большая полуось орбиты этого астероида вследствие такого столкновения.

Решение:

Начнем с оценки массы астероида. Считая, что средняя плотность вещества астероидов около $2\cdot10^3$ кг/м^3, и оценивая объем астероида как $300^3 \approx 3\cdot10^7$ м^3 (для оценки его вполне можно считать и кубическим), получаем массу порядка $6\cdot10^{10}$ кг, причем сразу отметим, что точность этой оценки весьма невелика.

Дальнейшие рассуждения можно вести несколькими путями, мы опишем самый короткий, но не обязательный.

Вспомним одну из форм интеграла энергии:

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

где v — скорость движения тела по орбите вокруг притягивающего центра, G — гравитационная постоянная, M — масса притягивающего центра (в нашем случае Солнца), r —

расстояние до притягивающего центра, a — большая полуось орбиты. В момент удара расстояние r не меняется, но меняется скорость v, что может привести к изменению a, которое и требуется найти.

Совершенно очевидно, что изменение скорости за счет удара будет небольшим, и малое изменение v приведет к малому изменению a. В то же время начальное значение скорости v, а также значение r могут быть разными, поскольку орбита астероида в общем случае эллиптическая. Но, поскольку эксцентриситет орбиты астероида ограничен сверху значением $e = 0.25$, то расстояние r меняется в пределах от $a\,(1-e)$ до $a\,(1+e)$ (т.е. менее чем в два раза), как следствие, величина начальной скорости может меняться также максимум примерно в два раза. Отсюда следует важный вывод: с учетом низкой точности оценки массы астероида рассматривать разные случаи (столкновение в перигелии или афелии, удар «в хвост» астероида, увеличивающий его импульс, или, наоборот, «в лоб»), практически бесполезно. Достаточно ограничиться одной оценкой для некоторого «среднего» случая.

Заметим, впрочем, что можно выбрать для оценки и наиболее эффективный вариант изменения орбиты. Для этого надо, чтобы скорость астероида в относительных величинах изменилась сильнее всего, а это получится в ситуации, когда удар будет произведен «в лоб» в тот момент, когда скорость движения астероида будет минимальной (т.е. он будет находиться в афелии самой вытянутой из всех возможных орбит).

Получим все же «среднюю» оценку. При движении по круговой орбите астероид будет двигаться со скоростью, равной орбитальной скорости Земли, т.е. примерно 30 км/с. Считая, что его столкновение с болванкой будет абсолютно неупругим, и воспользовавшись законом сохранения импульса, получим, что скорость астероида изменится на величину, не превосходящую $\Delta v = \frac{m}{M} V$, где m — масса болванки, M — масса астероида, V — относительная скорость движения болванки, данная в условии. Подставляя числовые данные, получаем $\Delta v \approx 5 \cdot 10^{-5}$ м/с.

Осталось определить, каким будет изменение большой полуоси a при таком крошечном изменении скорости. Сделать это можно, например, так. Выразим из интеграла энергии член $2/r$:

$$\frac{v^2}{GM} + \frac{1}{a} = \frac{2}{r}$$

и приравняем левые части для исходных и измененных значений скорости и большой полуоси:

$$\frac{v^2}{GM} + \frac{1}{a} = \frac{(v+\Delta v)^2}{GM} + \frac{1}{a+\Delta a}.$$

После раскрытия скобок, сокращения одинаковых слагаемых справа и слева и пренебрежения членом, содержащим $(\Delta v)^2$, как очевидно малым на фоне остальных, получаем

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+\Delta a} = \frac{2v\Delta v}{GM}.$$

Левую часть равенства можно привести к общему знаменателю, после чего избавиться от малого слагаемого Δa в одном из сомножителей знаменателя:

$$\frac{\Delta a}{a^2} = \frac{2v\Delta v}{GM}.$$

Затем, немного преобразовав полученное выражение и вспомнив, что для круговой орбиты (с которой мы и работаем) $v = \sqrt{GM/a}$, получим:

$$\frac{\Delta a}{a} = 2\,\frac{\Delta v}{v}.$$

Относительное изменение скорости $\frac{\Delta v}{v} = 5 \cdot 10^{-5}/(3 \cdot 10^{4}) \approx 5/3 \cdot 10^{-9}$, следовательно, относительное изменение большой полуоси $\Delta a/a \approx 3 \cdot 10^{-9}$. Так как большая полуось $a = 1.5 \cdot 10^{11}$ м, то изменение $\Delta a \approx 5 \cdot 10^{2}$ м, т.е. порядка километра.

Те, кто умеет пользоваться дифференциальным исчислением, вычислительную часть решения могут провести проще, просто сосчитав дифференциал обеих частей равенства в интеграле энергии и сразу получив связь между изменением скорости и большой полуоси. Результат, впрочем, будет таким же.

А.В.Веселова

5. Для объяснения аномального отрицательного ускорения АМС «Пионер-10» предполагалось существование вещества, при движении в котором АМС замедляется из-за столкновения с его частицами. Допустим, что вещество сферически-симметрично заполняет пространство вокруг Солнца с постоянной плотностью. Оцените плотность вещества, если известно, что полное аномальное ускорение, обусловленное столкновениями и гравитационным притяжением АМС веществом, на расстоянии 100 а.е. от Солнца равно 10^{-9} м/с^2. АМС удаляется от Солнца с параболической скоростью, масса станции равна 200 кг, площадь поперечного сечения станции равна 1 м^2. Можно считать, что столкновения АМС с частицами абсолютно упругие.

Решение:

По условию на расстоянии r от Солнца АМС движется со скоростью $v = \sqrt{2GM/r}$, где G — гравитационная постоянная, M — масса Солнца (массу вещества внутри для оценки скорости, очевидно, можно не использовать, раз уж она создает настолько малое ускорение).

Тогда аномальное ускорение $w_{\text{т}}$, создаваемое за счет столкновений с частицами вещества, можно оценить следующим образом. За небольшое время t станция сталкивается с веществом, находящимся в цилиндре, площадь основания которого равна поперечному сечению станции ΔS, а высота равна $v\,t$. Если плотность вещества равна ρ, то в результате столкновения АМС получает (или, вернее, теряет) импульс, равный $2 \cdot v\,t\,\Delta S\,\rho \cdot v$ (коэффициент 2 появляется из-за того, что столкновения упругие, и АМС получает удвоенный импульс каждой частицы, с которой сталкивается). Изменение импульса за единицу времени — это сила, действующая на АМС, если мы ее разделим на массу станции m, то получим искомое ускорение. Итого

$$w_{\text{т}} = \frac{2v^2\,\Delta S\,\rho}{m} = \frac{4GM\,\Delta S\,\rho}{m} \cdot \frac{1}{r}.$$

Аномальное гравитационное ускорение $w_{\text{г}}$, вызванное наличием вещества, в соответствии с теоремой Ньютона, создается только тем веществом, которое находится внутри радиуса r вокруг Солнца. Тогда

$$w_{\text{г}} = \frac{4G\pi r^3\rho}{3r^2} = \frac{4G\pi\rho}{3}\,r$$

Таким образом, полное аномальное ускорение

$$w = w_{\text{т}} + w_{\text{г}} = 4G\rho\left(\frac{M\,\Delta S}{m\,r} + \frac{\pi\,r}{3}\right)$$

Осталось вычислить ответ. Начнем с оценки слагаемых в скобках (все величины выражены в системе СИ):

$$\frac{M\,\Delta S}{m\,r} = \frac{2 \cdot 10^{30} \cdot 1}{2 \cdot 10^{2} \cdot 10^{2} \cdot 1.5 \cdot 10^{11}} \approx 7 \cdot 10^{14}.$$

$$\frac{\pi\,r}{3} = \frac{3 \cdot 10^{2} 1.5 \cdot 10^{11}}{3} = 1.5 \cdot 10^{13}$$

Отсюда можно заметить, что на расстоянии 100 а.е. «гравитационная» часть играет существенно меньшую роль, чем «тормозная», и слагаемым, соответствующим $w_{\text{г}}$, можно пренебречь. Тогда

$$10^{-9} = 4G\rho \cdot 7 \cdot 10^{14}$$

и

$$\rho = \frac{10^{-9}}{4 \cdot 7 \cdot 10^{-11} \cdot 7 \cdot 10^{14}} = 5 \cdot 10^{-15}\ \text{кг/м}^3.$$

П.А. Тараканов

XXIV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2017

5 февраля

11 класс

1. Работавший в России австрийский астроном Й. фон Литтров предлагал для связи с марсианами выкопать в Сахаре каналы, заполнить их смесью воды с керосином и поджечь. Допустим, таким образом «написаны» буквы размером 500 км каждая. Оцените минимально необходимый диаметр объектива телескопа, угловое разрешение которого достаточно для того, чтобы прочитать такой текст с Марса.

Решение:

Как известно, большая полуось орбиты Марса составляет около 1.5 а.е. Соответственно, минимальное расстояние между Землей и Марсом составит около 0.5 а.е. (если пренебречь эксцентриситетом орбиты Марса), однако в этот момент наблюдатели с Марса будут видеть Землю рядом с Солнцем, что явно затруднит наблюдения. Поэтому для оценки будем считать, что расстояние, с которого марсиане наблюдают Землю, равно $r = 1$ а.е. (или $1.5 \cdot 10^{11}$ м).

Для того, чтобы прочитать текст, необходимо различать буквы. Как следствие, телескоп должен обеспечивать возможность разрешать не буквы целиком, а части букв. Соответствующую оценку можно получить многими способами (например, вспомнив разрешение какого-либо экрана в пикселях и прикинув количество читаемых букв, которые при этом могут поместиться в одной строке), для определенности будем считать, что угловое разрешение телескопа должно позволить увидеть детали, линейный размер которых равен 1/10 размера буквы, т.е. $l = 50$ км.

Тогда угловой размер детали в радианах равен $\beta = l/r$ и он же примерно равен $\beta \approx \lambda/D$, где λ — длина волны наблюдения (для оптического диапазона это примерно $5 \cdot 10^{-7}$ м), а D — искомый диаметр объектива телескопа. Отсюда

$$\frac{l}{r} = \frac{\lambda}{D}$$

и, подставляя числа, получаем $D = 1.5$ м.

М.В.Костина

2. Предположим, что в результате катастрофы Солнце мгновенно сжалось настолько, что период его осевого вращения стал равен 3 секундам. Оцените среднюю температуру Солнца сразу после катаклизма. Считайте, что теплопотери во время сжатия и взаимодействие с какими-либо другими телами отсутствовало.

Решение:

Для начала найдем новый радиус Солнца. По закону сохранения момента импульса произведение момента инерции I на угловую скорость ω постоянно, т.е.

$$I_0\omega_0 = I\omega$$

(здесь и далее величины с индексом «0» относятся к начальному (т.е. реальному) состоянию Солнца, а величины без индекса — к тому, что получилось в результате катаклизма). Считая, что вид распределения плотности с радиусом в Солнце существенно не изменился, можно считать, что момент инерции пропорционален квадрату радиуса, $I \propto R^2$. Тогда, поскольку угловая скорость вращения обратно пропорциональна периоду, $\omega \propto 1/P$, получаем, что $R \propto \sqrt{P}$. Современный период вращения Солнца P_0 — примерно месяц, для удобства воспользуемся оценкой $P_0 = 3 \cdot 10^6$ с. Тогда в результате катаклизма радиус Солнца должен уменьшиться на три порядка и составить около 10^3 км (реальное значение $R_0 = 7 \cdot 10^5$ км).

Поскольку Солнце при катаклизме не обменивалось энергией с окружающей средой, сумма механической и тепловой (U) энергий должна была сохраниться. Механическая энергия состоит из кинетической энергии вращения W и гравитационной потенциальной энергии Φ. Оценим соответствующие величины, зная, что масса Солнца $\mathfrak{M}_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг (здесь и далее все вычисления проводятся в единицах СИ).

Начальная гравитационная потенциальная энергия

$$\Phi_0 \sim -\frac{G\mathfrak{M}_\odot{}^2}{R_0} = \frac{7 \cdot 10^{-11} \cdot (2 \cdot 10^{30})^2}{7 \cdot 10^8} = 4 \cdot 10^{41} \text{ Дж.}$$

Начальная кинетическая энергия вращения

$$W_0 = \frac{I_0 \omega_0^2}{2} \sim \frac{\mathfrak{M}_\odot R_0^2 \cdot 4\pi^2}{P_0^2} = \frac{2 \cdot 10^{30} \cdot (7 \cdot 10^8)^2 \cdot 40}{(3 \cdot 10^6)^2} = 4 \cdot 10^{36} \text{ Дж.}$$

Поскольку, например, из теоремы вириала известно, что сумма внутренней энергии и кинетической энергии вращения по порядку величины совпадает с модулем гравитационной потенциальной энергии, то $U_0 \sim -\Phi_0$, а энергией вращения W_0 можно пренебречь.

После сжатия гравитационная потенциальная энергия (обратно пропорциональная радиусу) возрастет в 10^3 раз, т.е. $\Phi = \Phi_0 \cdot 10^3$. Поскольку кинетическая энергия вращения $W \propto R^2/P^2$ и, как уже получено выше, $P \propto R^2$, получаем, что $W \propto R^{-2}$, т.е. кинетическая энергия вращения возрастет в 10^6 раз.

Однако и после катаклизма кинетическая энергия вращения окажется на два порядка меньше, чем гравитационная потенциальная энергия, откуда можно сделать вывод, что энергия вращения практически не влияет на оценку итоговой внутренней энергии.

Заметим также, что изменение внутренней энергии при этом должно совпасть с модулем изменения гравитационной потенциальной энергии, но поскольку начальное значение Φ_0 на три порядка меньше Φ, можно сказать, что и $U \sim -\Phi$.

Осталось оценить среднюю температуру T. Поскольку $U \approx \frac{\mathfrak{M}_\odot}{\mu}\mathfrak{R}T$, где μ — молярная масса вещества Солнца ($\mu \sim 10^{-3}$ кг/моль), $\mathfrak{R}$ — универсальная газовая постоянная, получаем

$$T \sim \frac{4 \cdot 10^{41} \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{30} \cdot 8} \sim 10^{10} \text{ К.}$$

И.Д.Маркозов

3. При обработке данных о регистрации нейтрино от вспышки сверхновой в Большом Магеллановом облаке (БМО) 23.02.1987 возникло предположение, что нейтрино «опоздали» на 50 минут от ожидаемого момента из-за того, что скорость движения нейтрино была чуть меньше скорости света в вакууме. Оцените в рамках этого предположения массу нейтрино, если известно, что энергия каждого из зарегистрированных нейтрино составляла около 10^{-12} Дж. Расстояние до БМО — 50 кпк.

Решение:

Известно, что полная энергия частицы массы m, движущейся со скоростью v, равна

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

где c — скорость света в вакууме. Следовательно, для получения ответа необходимо найти скорость v.

Заметим, однако, что прямолинейная попытка сделать это приведет к неудаче: очевидно, что v практически совпадает со скоростью света, и расчет непосредственно по исходной формуле с требуемой точностью без калькулятора невозможен.

Преобразуем коэффициент в исходной формуле:

$$\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c^3}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{c^3}{\sqrt{(c-v)\,(c+v)}} \approx \frac{c^3}{\sqrt{(c-v)\cdot 2c}} = \frac{c^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v}{c}}}$$

Теперь учтем, что если нейтрино преодолели расстояние от БМО до нас за время t, то это расстояние равно $c(t-\Delta t) = vt$, где Δt — время, на которое «опоздали» нейтрино. Отсюда

$$\frac{v}{c} = \frac{t-\Delta t}{t} = 1 - \frac{\Delta t}{t},$$

поэтому

$$1 - \frac{v}{c} = \frac{\Delta t}{t}.$$

Таким образом,

$$m = \frac{\sqrt{2}E}{c^2}\sqrt{\frac{\Delta t}{t}}.$$

БМО находится на расстоянии 50 кпк, что соответствует примерно 160 тыс. световых лет. Так как в году примерно $3\cdot 10^7$ секунд, получаем, что $t \approx 5\cdot 10^{12}$ секунд. $\Delta t = 3\cdot 10^3$ секунд, поэтому

$$m = \frac{1.4\cdot 10^{-12}}{(3\cdot 10^8)^2}\sqrt{\frac{3\cdot 10^3}{5\cdot 10^{12}}} = 4\cdot 10^{-34}\ \text{кг}.$$

Отметим, что предположение оказалось неверным: полученная нами оценка на три порядка превышает современную верхнюю оценку массы нейтрино.

П.А.Тараканов

4. При вспышке сверхновой SN1987A выделилась энергия 10^{46} Дж. Оцените массу звезды, которая излучит столько же энергии за всю свою жизнь на стадии Главной последовательности.

Решение:

В звездах Главной последовательности происходит синтез гелия из водорода. Если предположить, что в гелий превращается в среднем примерно одна и та же доля массы исходной звезды (что близко к действительности), а также что при синтезе гелия из водорода в энергию переходит определенная доля массы «топлива» (что верно с весьма высокой точностью), то это означает, что за все время жизни на Главной последовательности звезда массы $\mathfrak{M}$ вырабатывает $\alpha\,\mathfrak{M}c^2$ энергии, где c — скорость света, α — некоторый постоянный для звезд разных масс коэффициент.

Поскольку светимость звезды на стадии Главной последовательности меняется достаточно слабо, то, зная светимость Солнца $L_\odot = 4\cdot 10^{26}$ Вт и его массу $\mathfrak{M}_\odot = 2\cdot 10^{30}$ кг, а также время его жизни $\tau_\odot \approx 10^{10}$ лет $= 3 \cdot 10^{17}$ секунд, можно определить величину коэффициента α из соотношения

$$L_\odot \, \tau_\odot = \alpha \, \mathfrak{M}_\odot c^2.$$

Тогда полная высветившаяся звездой массы $\mathfrak{M}$ энергия

$$E = \alpha \, \mathfrak{M} c^2 = L_\odot \, \tau_\odot \, \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot},$$

откуда легко выражается масса звезды в массах Солнца:

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot} = \frac{E}{L_\odot \, \tau_\odot} = \frac{10^{46}}{4 \cdot 10^{26} \cdot 3 \cdot 10^{17}} \approx 80.$$

М.В.Костина

5. «Так стояли Эльвэ и Мелиан, а вращающийся над ними звездный небосвод отсчитывал долгие годы. И деревья Нан Эльмота стали выше и темнее, прежде чем Мелиан и Эльвэ произнесли хоть одно слово».

Предположим, что они стояли в центре поляны диаметром 30 м, скорость роста деревьев Нан Эльмота составляла 0.5 м/год, а в момент встречи высота деревьев не превышала 15 м. Через какое время количество света звезд (вроде бы Солнце и Луна тогда еще не были созданы), достигающее поляны, уменьшится вдвое? Можно считать, что звезды равномерно распределены по небесной сфере Арды.

Решение:

Необходимо понять, как будет меняться площадь видимой части небесной сферы. Площадь сферического сегмента составляет $2\pi R^2(1 - \cos\theta)$, где R — радиус сферы, θ — угол между радиус-векторами сферы, проведенными к точке на основании сегмента и к вершине сегмента. В данном случае угол θ равен углу между направлением из центра поляны на вершины деревьев и зенит, $\operatorname{tg}\theta(t) = D\big/2H(t)$, где рост деревьев $H(t) = H_0 + \Delta H \cdot t$.

Пусть θ_0 — угол между горизонтом и направлением на вершины деревьев в момент встречи. Определим, через какое время площадь сегмента уменьшится вдвое:

$$\frac{2\pi R^2(1 - \cos\theta_0)}{2\pi R^2\big(1 - \cos\theta(t)\big)} = 2,$$

$$1 - \cos\theta_0 = 2 - 2\cos\theta(t),$$

$$\cos\theta(t) = \frac{1 + \cos\theta_0}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1 + D^2\big/4H_0^2}} \approx 0.85.$$

$$\operatorname{tg}\theta(t) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta(t)} - 1} \approx 0.62, \quad H(t) = \frac{D}{2\operatorname{tg}\theta(t)} = 24 \text{ м}, \quad t = \frac{H - H_0}{\Delta H} = 18 \text{ лет}.$$

А.В.Веселова