XXV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2018

4 февраля

5–6 классы

1. Студент-астроном заметил, что несколько дней подряд ложится спать в момент восхода Бетельгейзе (α Ориона) над горизонтом. Раньше или позже он ложится в каждый последующий день? В какое время года ему удается наблюдать восход данной звезды?

Решение:

Поскольку Земля вращается вокруг своей оси в том же направлении, в котором обращается вокруг Солнца, период между двумя последовательными прохождениями Солнцем меридиана (полуднями или полуночами) оказывается чуть больше, чем период вращения Земли вокруг своей оси (разница составляет примерно 1/365 часть суток, это около 4 минут). И, поскольку восход Бетельгейзе связан только с вращением Земли вокруг оси, он каждый день по солнечному времени происходит примерно на 4 минуты *раньше* (а студент, соответственно, раньше ложится спать).

Далее следует вспомнить небо. Орион — «зимнее» созвездие, и это значит, что оно оказывается выше всего над горизонтом (кульминирует) в середине ночи зимой. Если предположить, что студент ведет более-менее здоровый образ жизни и ложится спать часов в районе 11 часов вечера (т.е. за два-три часа до истинной полуночи), то это значит, что описанная ситуация происходит поздней осенью или в начале зимы.

А.В.Веселова

2. Определите, какие дни недели были 4 февраля 1918 года в Югославии, Болгарии и России, в которых сегодня проходит олимпиада. Примечание: Болгария перешла на григорианский календарь в 1916 году, Югославия — в 1919 году.

Решение:

Начнем с наиболее простого случая — григорианский календарь в Болгарии. В этом случае от дня проведения тура прошло ровно 100 лет, причем в соответствующем промежутке не было ни одного года, который являлся бы високосным в юлианском календаре и не являлся бы — в григорианском. Поэтому каждый четвертый год длиннее на одни сутки, а средняя продолжительность года равна точно 365.25 суток. Следовательно, за это время прошло 36525 дней, и мы сможем определить день недели 4 февраля 1918 года, если поделим это число на 7 с остатком. Конечно, можно честно выполнить деление в столбик, но, поскольку нас интересует только остаток, можно упростить себе жизнь, просто откидывая слагаемые, заведомо делящиеся на 7 нацело. $36525-35000 = 1525$, $1525-1400 = 125$, $125 - 70 = 55$, $55 - 49 = 6$, значит, разница в днях недели равна 6, причем отсчитывать эти дни надо назад от воскресенья, в которое проходил тур. Отсюда делаем вывод: 4 февраля 1918 года в Болгарии — понедельник.

В Югославии (точнее, странах Югославии — так она стала называться только в конце 1918 года) в тот момент действовал юлианский календарь. Разность дат между юлианским и григорианским календарями и в XX, и в XXI веке составляет 13 дней. Таким образом, 4 февраля 1918 года по юлианскому календарю это 17 февраля 1918 года по григорианскому. Так как 4 февраля 1918 года по григорианскому календарю — понедельник, то 17 февраля 1918 года (также по григорианскому календарю) было воскресеньем и, следовательно, в странах Югославии 4 февраля 1918 года — воскресенье.

Казалось бы, поскольку календарей только два, то ответ для России должен совпадать с каким-то из двух предыдущих. Однако три вопроса задачи наводят на мысль, что ответов все-таки тоже три. Это действительно так: кроме вариантов, когда действовал какой-то один из календарей, остается еще вариант перехода с одного календаря на другой. В самом деле, поскольку даты по григорианскому календарю обгоняют даты по юлианскому, в каждой стране, переходившей с первого календаря на второй, какие-то даты должны были просто отсутствовать. В России сразу после 31 января 1918 года наступил день 14 февраля 1918 года и, соответственно, дня 4 февраля 1918 года просто не было.

Примечание. Некоторые участники, полностью решившие задачу, после тура интересовались, насколько корректно было со стороны организаторов олимпиады давать задачу про особенности календаря в России, о которых участники-иностранцы знать скорее всего не могут. Спешим всех успокоить: задача была включена в комплект только после того как мы убедились, что в этой возрастной параллели участников из других стран не будет. С другой стороны, в этом нам немного повезло: упустить случай отметить вековой юбилей смены календаря было бы обидно, второй такой же представился бы еще только через 100 лет, на CXXV Санкт-Петербургской астрономической олимпиаде.

П.А.Тараканов

3. У полярника, зимующего неподалеку от Северного полюса, остановились часы. На какой минимальной широте полярник сможет бегать вокруг полюса так, чтобы его часы постоянно показывали точное местное время?

Решение:

Чтобы часы полярника всегда показывали точное местное время, он должен пробегать всю параллель за то же время, что и Солнце, т.е. за 24 часа. Так как требуется минимальная широта, то эта параллель будет самой длинной, которую в принципе может пробежать полярник. Таким образом, надо оценить максимальную скорость, с которой полярник может бегать. Пусть она равна 10 км/час, тогда за 24 часа полярник сможет пробежать 240 км. Это и будет длина параллели L с минимальной широтой. Так как параллель маленькая, то можно считать, что она представляет из себя обычный круг на плоскости. Найдем радиус этого круга R, т.е. расстояние от полюса до параллели:

$$R = \frac{L}{2\pi} = \frac{240}{2\pi} \approx 40\,\text{км}.$$

Известно, что 1° меридиана на земной поверхности соответствует 111 км, следовательно, расстояние в градусах от полюса до параллели, по которой бегает полярник, будет равно $40/111 \approx 0.4^\circ$. Таким образом искомая широта будет равна $90^\circ - 0^\circ.4 = 89^\circ.6$ или примерно $89^\circ 40'$.

Примечание. Конкретный ответ в этой задаче, естественно, зависит от предполагаемой скорости бега полярника, так что оценивается не столько ответ, сколько ход решения и рассуждения. Участники могут брать любую разумную скорость полярника (примерно от 5 км/час до 20 км/час), оценка при этом не снижается.

Коллектив

4. В изданном 95 лет назад задачнике по астрономии упоминается «Звезда Великой Октябрьской Революции», выбор которой был обусловлен тем, что она видна в лучах заходящего Солнца в день Революции. Что это за звезда? Какого она цвета?

Решение:

Для начала придется вспомнить историю (или здравый смысл) и учесть, что Октябрьская революция произошла 7 ноября (если вспоминалась история) или где-то в октябре (если использовался здравый смысл). Дальнейшее чтение условий задачи позволяет сформулировать несколько важных утверждений.

1) Эта звезда очень яркая, скорее всего это одна из ярчайших звезд неба (иначе ее просто не будет видно в лучах заходящего Солнца).
2) Эта звезда находится на небе сравнительно недалеко от Солнца 7 ноября (раз она видна на закатном небе), но все же не очень близко (иначе даже очень яркую звезду увидеть не удастся).
3) Поскольку в течение года Солнце движется по небу в сторону, противоположную суточному движению (см. решение задачи №1), после 7 ноября Солнце на небе к этой звезде будет приближаться.
4) Если цвет звезды имеет хоть какое-нибудь отношение к революции, то, по-видимому, звезда должна быть красной.

Из второго утверждения следует, что искать надо звезду в созвездиях на эклиптике, причем в тех, в которых Солнце бывает примерно в ноябре. Даже если выбирать созвездия с большим запасом — Весы, Скорпион, Змееносец и Стрелец — сразу же можно заметить, что в них есть ровно одна действительно яркая звезда — Антарес. Остается только убедиться, что он же удовлетворяет и всем другим условиям.

П.А.Тараканов

5. В одном из фильмов о «людях в черном» у кота по кличке Орион в подвеске к ошейнику была заключена галактика. Если предположить, что радиус подвески равен 1 см, а галактика (является уменьшенной копией нашей) имеет радиус $R = 50$ тысяч световых лет, то во сколько раз больше или меньше протона были бы звезды типа Солнца в таком масштабе? Радиус протона 10^{-13} см.

Решение:

Сначала определим, во сколько раз радиус галактики превосходит радиус подвески. Переведем значение R в сантиметры. Данное расстояние свет со скоростью $\approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с проходит за 50 тысяч лет; в одном году примерно $365 \cdot 24 \cdot 3600 \approx 3.2 \cdot 10^7$ секунд.

$$50 \cdot 10^3 \cdot 3.2 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^{10} = 4.8 \cdot 10^{22} \text{ см.}$$

Таким образом, радиус галактики превосходит радиус подвески в $N = 4.8 \cdot 10^{22}$ раз. Тогда в масштабе подвески Солнце имело бы радиус в N раз меньше настоящего:

$$r = \frac{7 \cdot 10^{10}\text{см}}{4.8 \cdot 10^{22}} = 1.5 \cdot 10^{-12} \text{ см.}$$

Таким образом, отношение размеров Солнца в данном масштабе и протона составляет

$$\frac{1.5 \cdot 10^{-12}}{10^{-13}} \approx 15.$$

А.В.Веселова

XXV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2018

4 февраля

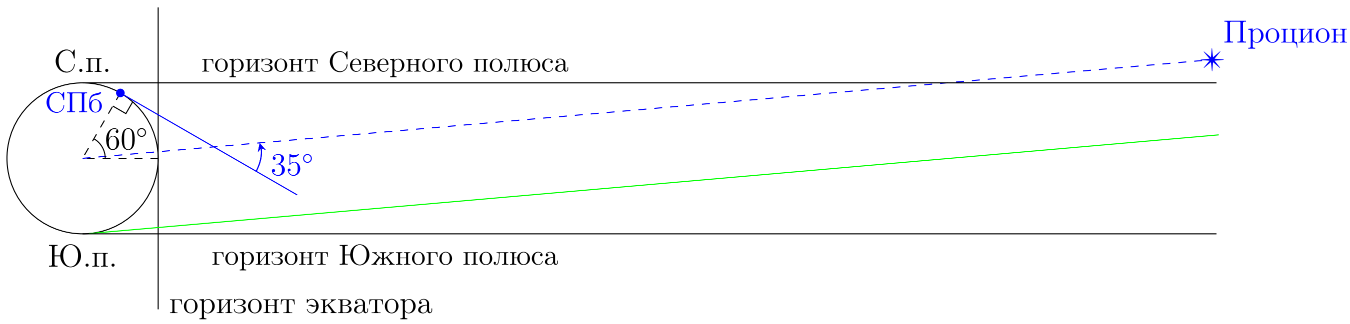
7–8 классы

1. Максимальная высота над горизонтом звезды Процион для наблюдателя в Санкт-Петербурге составляет 35°. Верно ли утверждение, что везде, где на Земле водится енот-полоскун (*Procyon lotor* на латыни), виден «небесный собрат» енота?

Решение:

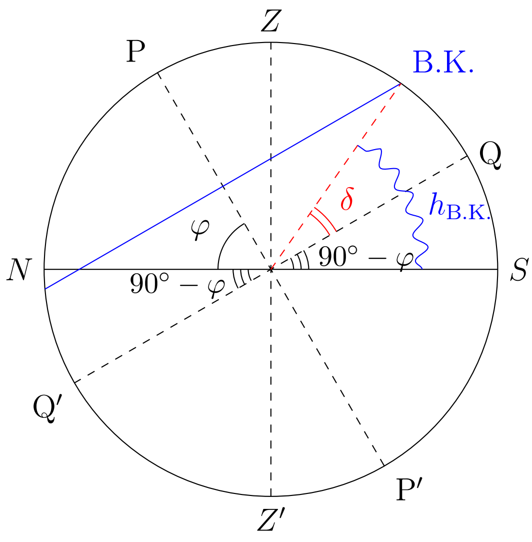
Основная часть задачи состоит в том, чтобы выяснить, в каких местах Земли в принципе можно увидеть Процион. Это можно сделать как минимум двумя способами, один из которых предполагает наличие базовых знаний сферической астрономии, а во втором можно обойтись и без них. Начнем со второго.

Построим чертеж, на котором нарисуем Землю, Санкт-Петербург (СПб) на ней и его горизонт (синяя сплошная линия), а также удаленный (на самом деле на куда большее расстояние, но размеры листа бумаги ограничены) Процион. Видно, что максимальная высота Проциона над горизонтом (или угол между линией горизонта и направлением на Процион) будет в том случае, когда СПб ближе всего к Проциону (именно этот случай и изображен на чертеже).



Поскольку Процион на самом деле находится на намного большем расстоянии, с Земли он будет наблюдаться в направлении, параллельном направлению из центра Земли (на рисунке оно отмечено синей штрихованной линией). Построив несколько таких параллельных прямых, мы обнаружим, что остается только маленькая область в окрестности Южного полюса Земли, в которой Процион не будет виден ни при каком положении Земли (предельная прямая для самой южной широты, на которой Процион еще можно увидеть, изображена на рисунке зеленым). Аккуратный чертеж позволит даже найти нужную широту, но для получения итогового ответа это не обязательно.

Аналогичный вывод можно получить более формальным путем. В момент наибольшей высоты над горизонтом светило находится в верхней кульминации (В.К.). В этот момент высота светила связана с широтой φ и склонением δ по формуле $h = 90° - \varphi + \delta$. Отсюда получаем, что склонение Проциона равно $\delta = h + \varphi - 90° = 5°$. Таким образом, звезда Процион находится в северном полушарии небесной сферы и видна для всех наблюдателей в северном полушарии Земли.



Оценим минимальное значение широты, на которой виден Процион. В этом случае при видимости Проциона на горизонте его высота составит $0°$:

$$0^\circ = 90^\circ - |\varphi - \delta|.$$

Отсюда наиболее южная широта видимости Проциона составляет $85°$ ю.ш. (и, как видим, это действильно довольно близко к Южному полюсу). Таким образом, Процион нельзя увидеть в круге радиусом $5°$ (или $500 \div 600$ км) вокруг Южного полюса.

Осталось ответить на основной вопрос задачи. Даже при весьма скромных познаниях в биологии несложно вспомнить, что территория $85°$ ю.ш. и южнее — это самый центр Антарктиды, где не водятся не только еноты, но даже пингвины с тюленями. Следовательно, везде, где водится енот-полоскун (а он на самом деле живет только в Северном полушарии Земли), он может по ночам любоваться одноименной звездой.

А.В.Веселова

2. С какой пространственной скоростью геостационарный спутник движется относительно точки экватора, над которой находится? Геостационарным спутником называется спутник, вращающийся вокруг Земли в плоскости экватора таким образом, что он постоянно находится над одной и той же точкой экватора (на высоте 36 тыс. км над ней).

Решение:

То, что спутник постоянно находится над одной точкой экватора, означает, что он совершает полный оборот вокруг Земли за то же время, за которое точка на экваторе Земли совершает полный оборот, т.е. за 24 часа (точнее за звездные сутки — 23^h56^m, но в дальнейших расчетах такая точность явно чрезмерна). Радиус орбиты спутника равен сумме высоты h, на которой он находится, и радиуса Земли $R_\oplus$. Полная длина орбиты спутника равна $2\pi(R_\oplus + h)$. Он ее проходит за время T, за которое точка экватора проходит окружность экватора, т.е. $2\pi R_\oplus$.

Скорости спутника и точки на экваторе сонаправлены, но скорость спутника больше (поскольку за одно и то же время он проходит большее расстояние). Следовательно, чтобы найти относительную скорость, надо из скорости спутника вычесть скорость точки на экваторе (расстояния при этом мы будем измерять в километрах, а время — в часах):

$$v_{\text{отн}} = v_{\text{сп}} - v_{\text{экв}} = \frac{2\pi(R_\oplus + h)}{T} - \frac{2\pi R_\oplus}{T} = \frac{2\pi h}{T} = \frac{2\pi \cdot 36 \cdot 10^3}{24} \approx 10^4\ \text{км/час}.$$

П.А.Тараканов

3. В полдень 22 марта в столице Болгарии Софии в комнате с закрытым занавеской окном на противоположной окну стене комнаты виден «зайчик» от дырки в занавеске. Расстояние между окном и противоположной стеной равно 5 метрам. В какую сторону движется «зайчик» для человека, смотрящего на него? Оцените скорость его движения.

Решение:

Болгария находится в Северном полушарии (и даже заведомо севернее Северного тропика), так что Солнце в ней в полдень будет находиться с южной стороны от зенита. Это означает, что для человека, смотрящего на Солнце, оно движется слева направо, и в том же направлении будет двигаться зайчик для человека, который будет смотреть на него.

Зайчик движется с той же угловой скоростью, что и Солнце, т.е. $15°$/час (поскольку дело происходит практически в день равноденствия, то за сутки Солнце на небе описывает большой круг — $360°$). Поскольку Солнце и зайчик всегда находятся с противоположных сторон от дырки в занавеске, то и зайчик также будет перемещаться с угловой скоростью $15°$/час.

Осталось понять, на каком расстоянии зайчик будет находиться от дырки. В самом деле, поскольку Солнце находится не на горизонте, то и расстояние от дырки до зайчика не равно расстоянию от окна до стены. Широту Болгарии можно грубо считать равной $45°$ (в решении можно использовать оценки в очень широких пределах — от $30°$ до $60°$), и тогда нам надо найти длину гипотенузы прямоугольного треугольника, в котором один из углов равен широте Болгарии, а противолежащий катет — 5 метрам. Это можно сделать с помощью чертежа, и в результате окажется, что расстояние R от дырки до зайчика составляет от 6 до 10 метров.

Если Солнце за 24 часа проходит окружность, то и зайчик (если бы он двигался по сферической поверхности, а Земля была прозрачной) сделал бы то же самое. Тогда за сутки зайчик должен пройти расстояние $2\pi R$ — в пределах $40 \div 60$ метров. Делим это расстояние на 24 часа и получаем окончательный ответ: скорость зайчика составляет $1.5 \div 2.5$ метра в час.

Б.Б.Эскин

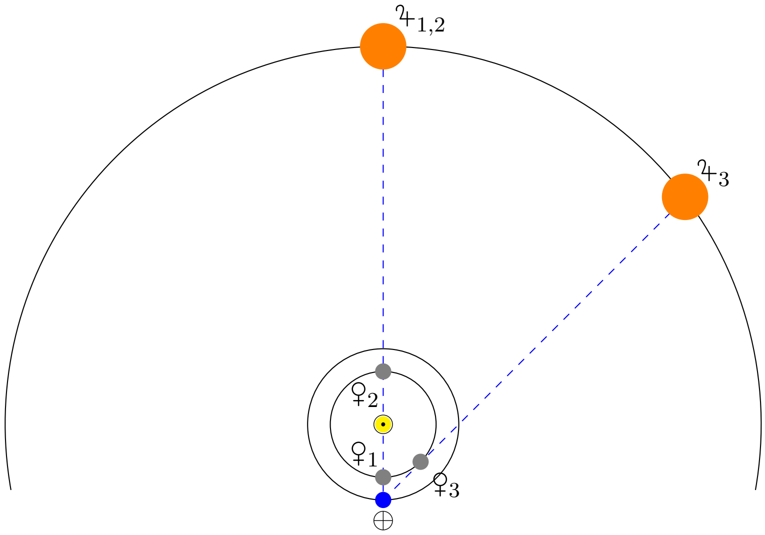
4. В какой-то момент произошло прохождение Венеры по диску Юпитера, видимое с Земли. Оцените максимально возможную и минимально возможную часть диска Юпитера, которая могла была закрыта Венерой в момент максимальной фазы покрытия. Радиус орбиты Юпитера равен 5 а.е., радиус орбиты Венеры 0.7 а.е., радиус Юпитера в 12 раз больше радиуса Венеры.

Решение:

Изобразим возможное покрытие на чертеже (в масштабе). Сразу же можно отметить, что расстояние до Юпитера и, следовательно, угловой размер его диска Юпитера почти не меняются. До Венеры в положении 1 от Земли 0.3 а.е., в положении 2 — 1.7 а.е. До Юпитера в любом случае около 6 а.е. (аккуратный расчет показывает, что минимальное расстояние — в положении 3 — составит около 5.7 а.е., но на итоговый результат это никак не влияет).

В максимальной элонгации Венеры (положение 3) от Земли до Венеры 0.7 а.е. (что можно легко получить, воспользовавшись теоремой Пифагора), т.е. примерно в 2 раза больше, чем в нижнем соединении, т.е. это промежуточный случай между двумя крайними: максимально возможная закрытая часть будет, когда Венера в нижнем соединении, а минимальная — когда в верхнем.

Сравним угловые размеры Юпитера и Венеры. Очевидно, что чем больше радиус планеты, тем больше угловые размеры. Чем дальше планета, тем меньше угловые размеры.



Максимальная часть (положение 1):

Юпитер по линейным размерам в 12 раз больше Венеры, но в $6/0.3 = 20$ раз дальше, следовательно, угловой размер Юпитера в таком положении будет в $20/12 \approx 1.6$ раза меньше, чем Венеры, следовательно, Венера может закрыть Юпитер полностью.

Минимальная часть (положение 2):

Юпитер в 12 раз больше Венеры, и всего в $6/1.7 \approx 3.5$ раза дальше, следовательно, угловой размер Юпитера в таком положении будет в $12/3.5 \approx 3.7$ раза больше, чем Венеры, поэтому Венера закроет примерно $1/3.7^2 \approx 1/14$ часть площади Юпитера.

Заметим, что ближайшее подобное прохождение Венеры по Юпитеру, принципиально видимое с Земли (когда Венера будет близка к своему верхнему соединению), произойдет 22 ноября 2065 года. Конечно, из-за близости планет к Солнцу его будет трудно наблюдать.

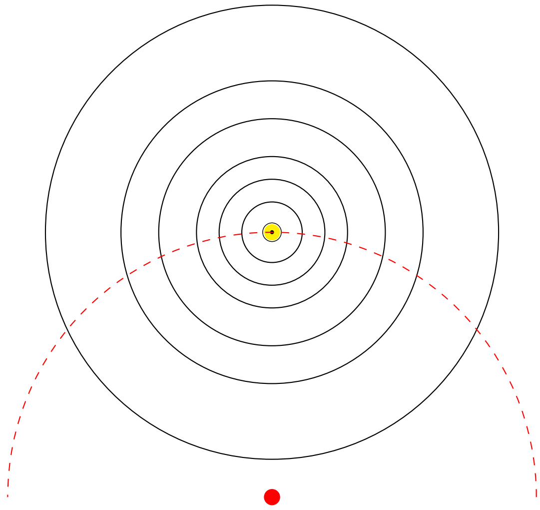
А предыдущее прохождение Венеры по Юпитеру, видимое с Земли, случилось 200 лет назад: 3 января 1818 года.

М.В.Костина

5. Межзвездный корабль терпит бедствие на границе Солнечной системы. Капитан корабля посылает радиосигнал ко всем большим планетам Солнечной системы. Сколько времени может пройти между приемами сигналов на планетах? Орбиты планет считать круговыми. Докажите, что существует такое расположение планет, при котором сигнал будет принят на всех планетах одновременно.

Решение:

Докажем сначала последнее утверждение. Посмотрим, как будет распространяться сигнал от корабля, находящегося на границе Солнечной системы в плоскости эклиптики (в которой примерно лежат орбиты всех планет). Спустя время Δt после отправления сигнала свет достигнет сферы радиуса $c\Delta t$, где c — скорость света. Значит, если планеты в какой-то момент времени будут располагаться на одной из таких сфер, то сигнал будет принят одновременно. Нарисуем семейство сфер для разных значений Δt и выберем такую, которая проходит через Солнце (см. рисунок ниже). Такая сфера пересечет и орбиты всех планет, значит, если в точках пересечения сферы с орбитами будут располагаться планеты, то сигнал на них будет получен одновременно. Таким образом, минимально возможное время между приемами сигналов на планетах равно 0.



Оценим максимальное время. Поскольку орбиты больших планет заключены в сфере с радиусом, равным радиусу орбиты Нептуна, то наибольшее расстояние между двумя планетами не может превосходить диаметра орбиты Нептуна. Время приема сигналов будет наибольшим в том случае, когда корабль, Солнце и две самых далеких от Солнца планеты, Уран и Нептун, расположены на одной линии, причем одна из планет расположена по другую сторону от Солнца относительно корабля. В данном случае разность времени приема сигнала будет равна времени, в течение которого сигнал пройдет расстояние, равное сумме радиусов орбит Нептуна и Урана. Радиус орбиты Нептуна равен примерно 30 а.е., радиус орбиты Урана — примерно 20 а.е. Поскольку известно, что расстояние 1 а.е. свет проходит примерно за 8 минут, то расстояние между планетами сигнал пройдет за $(30 + 20) \cdot 8 = 4 \cdot 10^2$ минут.

А.В.Веселова

XXV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2018

4 февраля

9 класс

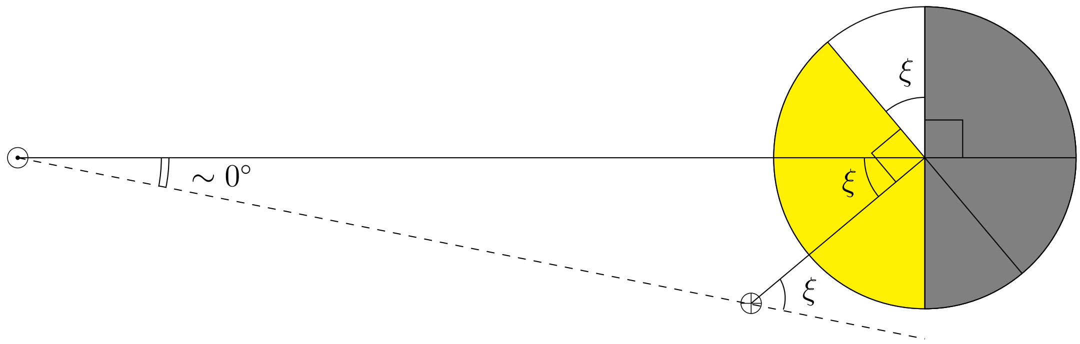
1. В некоторый день Луна, будучи в полнолунии, покрыла Альдебаран. Через месяц Луна снова покрыла Альдебаран. Какой была фаза Луны (с точностью до 1%) во время второго покрытия?

Решение:

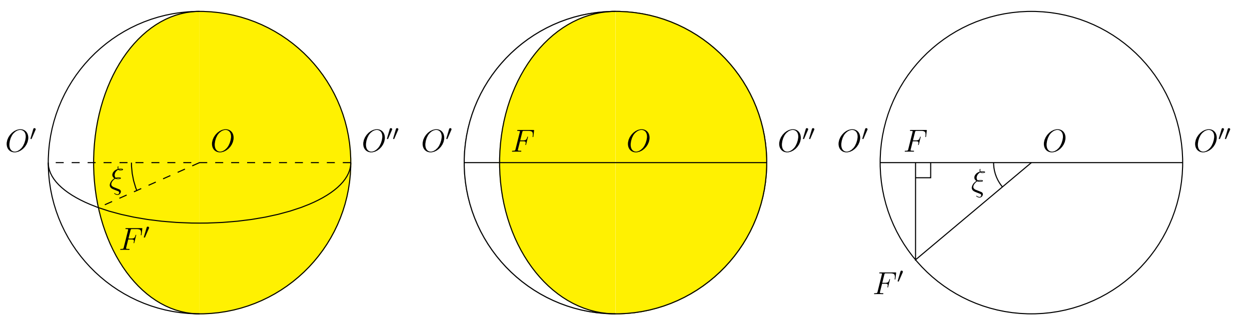
То, что по условию задачи Луна во время первого покрытия была полной, означает, что Альдебаран, Луна, Земля и Солнце находились на одной линии в указанном порядке.

В следующий раз Луна покроет Альдебаран ровно через то время, которое ей требуется, чтобы завершить оборот вокруг Земли относительно звезд. Это время равно 27.3 суток. Для того, чтобы полностью повторилась фаза Луны, необходимо чуть большее время — так называемый синодический месяц — 29.5 суток. То есть к следующему покрытию Луна «не дойдет» до фазы 100%, при которой было предыдущее покрытие, примерно 2 суток, или на угол $\xi = 2 \cdot (360°/29.5) \approx 24°$.

Нарисуем схему образования фазы Луны (Луна для наглядности сильно увеличена).



В треугольнике $\oplus\odot$☾ сторона $\oplus\odot$ примерно в 400 раз больше стороны $\oplus$☾, так что можно считать, что угол при $\odot$ близок к нулю, а угол при ☾ равен ξ. Таким образом, угол, стягивающий сектор, закрашенный белым на рисунке, а, следовательно, и двугранный угол, «вырезающий» часть площади, освещенной Солнцем и не видимой с Земли, равен ξ (см. ниже рис. а).



а б в

При проецировании изображения Луны на небесную сферу получится «серп», изображенный на рис. б, наибольшая ширина освещенной части которого $O''F$ определяется как $OO'' + OF$ (рис. в). $OO'' = OO' = OF' = R_{☾}$, где $R_{☾}$ — радиус изображения Луны на небе.

$$O''F = OO'' + OF = OO'' + OF' \cos\xi = R_{☾}\,(1 + \cos\xi).$$

Фаза Φ — это отношение освещенной части диаметра к полному диаметру, следовательно,

$$\Phi = \frac{R_{☾}\,(1+\cos\xi)}{2R_{☾}} = \frac{1+\sqrt{1-\sin^2\xi}}{2} \approx \frac{1+\sqrt{1-0.4^2}}{2} \approx 0.95,$$

т.е. 95%.

М.В.Костина

2. В Древней Греции термином «стадий» называли расстояние, которое человек проходит за время восхода Солнца. Определим аналогичное понятие для Луны: лунным стадием назовем расстояние, которое пройдет наблюдатель в течение времени восхода Земли для этого наблюдателя. Оцените минимальную величину такого лунного стадия.

Решение:

Если не учитывать либрацию Луны, то изменение положения Земли над горизонтом Луны будет связан с изменением пункта наблюдения. Угловое расстояние, на которое требуется переместиться наблюдателю по поверхности Луны, равно угловому диаметру Земли для наблюдателя на Луне (угол между точками касания двух общих касательных для окружностей). Угловой диаметр Земли равен приблизительно

$$d = \frac{2R_\oplus}{r} = \frac{2\cdot 6.4\cdot 10^3}{4\cdot 10^5} \approx 3\cdot 10^{-2}\ \text{рад} \approx 2^\circ.$$

Заметим, что тот же результат можно получить, зная, что угловой диаметр Луны для земного наблюдателя равен $\approx 0^\circ.5$, а радиус Земли примерно в 4 раза превышает лунный.

Теперь определим расстояние на поверхности Луны, соответствующее угловому расстоянию 2°: $l = d\cdot R \approx d\cdot R_\oplus/4 = 3\cdot 10^{-2}\cdot 6.4\cdot 10^3/4 \approx 50$ км.

А.В.Веселова, И.И.Никифоров

3. Маша увидела мем в интернете: «На верхней полке ехать выгодно! За счет кривизны поверхности Земли верхняя полка описывает дугу большего радиуса, чем нижняя. Соответственно, на верхней полке за те же деньги проезжаешь чуть большее расстояние.» «А ведь и правда!» — подумала Маша и купила билет на верхнюю полку. Сколько денег сэкономит Маша на пути из Петербурга в Москву, если билет стоит 1200 рублей? Москва находится на $7^\circ.5$ восточнее и на 4° южнее Петербурга, железная дорога соединяет города по кратчайшему расстоянию.

Решение:

Расстояние вдоль параллели, редуцированное к экватору: $7.5\cdot\cos 60^\circ \approx 4^\circ$, следовательно, расстояние по прямой (поскольку в 1° дуги меридиана около 110 км) равно $110\cdot 4\sqrt{2} \approx 620$ км., т.е. примерно 1/10 радиуса Земли, соответствующее дуге в 1/10 радиана. Разность высот полок примем за 1 м, тогда радиус окружности r_1, описываемой нижней полкой, меньше радиуса окружности r_2, описываемого вехрней, на $\Delta r = 1$ м. Длина дуги, описываемой нижней полкой, равна $l_1 = 0.1\cdot r_1$, а верхней — $l_2 = 0.1\cdot r_2 = 0.1(r_1 + \Delta r)$. Таким образом, разность путей, пройденных верней и нижней полками, равна $\Delta l = 0.1 \cdot \Delta r = 0.1$ м, что составляет $0.1/(620 \cdot 10^3)$ всего пути. Умножая на стоимость проезда — 1200 рублей, получим «разность в стоимости проезда» на верхней и нижней полках: $1200 \cdot 0.1/(620 \cdot 10^3) \approx 2 \cdot 10^{-4}$ рубля или 2/100 копейки.

П.А.Тараканов, М.В.Костина

4. 12 сентября 2014 года кульминация Дубхе ($\alpha = 11^h04^m, \delta = 61°40'$) в центре Санкт-Петербурга (на широте $\varphi = 59°56'$) наблюдалась в 23^h46^m по истинному солнечному времени. В этот же момент кульминировала вторая звезда, причем сумма высот этих звезд составила 90°. Определите склонение второй звезды.

Решение:

Сначала определим, в какой кульминации — верхней или нижней — находилась Дубхе. Прямое восхождение Солнца в окрестности осеннего равноденствия составляет около 12^h. В 23^h46^m по истинному солнечному времени Солнце находится вблизи нижней кульминации. Соответственно, Дубхе, у которой примерно такое же прямое восхождение, в этот момент также оказалась в нижней кульминации. Тогда высота Дубхе составляет $h_д = \varphi + \delta - 90° = 31°36'$.

Высота второй звезды в кульминации составляет $h = 90° - h_д = 58°24'$. Пусть вторая звезда находилась в верхней кульминации, определим её склонение:

$$h = 90° - |\varphi - \delta| \Rightarrow |\varphi - \delta| = 90° - h = 31°36' \Rightarrow \delta = 28°20'.$$

Если же звезда находилась в нижней кульминации:

$$h = \varphi + \delta - 90° \Rightarrow \delta = 90° + h - \varphi = 88°28'.$$

А.В.Веселова

5. Собственное движение второй звезды в два раза меньше, чем первой, а видимая звездная величина на единицу больше. У какой звезды лучевая скорость больше, если полные скорости их равны, а также равны светимости?

Решение:

Поскольку светимости звезд равны, то разница звездных величин определяется различием в расстояниях.

$$m_2 - m_1 = 5 \lg \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{r_2}{r_1} = 10^{0.2} = \sqrt{10^{0.4}} = \sqrt{2.512} \approx 1.6.$$

Тангенциальная компонента скорости пропорциональна $\mu \cdot r$, где μ — собственное движение. Равенство полных скоростей можно переписать в терминах тангенциальных и лучевых компонент скоростей:

$$v_{r,1}^2 + \mu_1^2 r_1^2 = v_{r,2}^2 + \mu_2^2 r_2^2.$$

Выразим второе слагаемое правой части через μ_1 и r_1:

$$v_{r,1}^2 + \mu_1^2 r_1^2 = v_{r,2}^2 + (0.5\mu_1)^2(1.6r_1)^2, \quad v_{r,1}^2 + \mu_1^2 r_1^2 = v_{r,2}^2 + 0.64\mu_1^2 r_1^2, \quad v_{r,1}^2 + 0.36\mu_1^2 r_1^2 = v_{r,2}^2,$$

то есть вторая звезда обладает большей лучевой скоростью.

А.В.Веселова

XXV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2018

4 февраля

10 класс

1. Согласно «Сильмариллиону», движущиеся вокруг Арды Луна (*Итиль*) и Солнце (*Анор*) были созданы для освещения земель после гибели Древ Валар. Предположим, что Итиль и Анор движутся по круговым орбитам почти одинаковых радиусов, причем радиус орбит в несколько раз превышает радиус Арды. Известно, что угловые диаметры Итиль и Анора равны 0.5°, видимая звездная величина Анора в зените совпадает с солнечной. Определите видимую звездную величину Итиль в «полнолуние», считая, что Итиль отражает 40% падающего на ее поверхность света Анора.

Решение:

Обозначим радиус орбит Итиль и Анора как d, радиус Арды как R, светимость Анора как L_A. Равенство видимых звездных величин Анора и Солнца обозначает равенство освещенностей от данных объектов. Поскольку освещенности прямо пропорциональны светимости и обратно пропорциональны квадратам расстояний, получим выражение:

$$\frac{L_A}{(d-R)^2} = \frac{L_\odot}{l^2},$$

где l — астрономическая единица, а $L_\odot$ — светимость Солнца. Таким образом, светимость Анора равна $L_A = L_\odot \cdot (d-R)^2/l^2$.

Тогда количество энергии, которое падает за секунду на Итиль в полнолуние, равно

$$\mathcal{E} = \frac{L_A}{4\pi(2d)^2} \cdot \pi r^2 = L_\odot \cdot \frac{(d-R)^2}{l^2} \cdot \frac{\pi r^2}{4\pi(2d)^2},$$

где r — радиус Итиль. Тогда освещенность на поверхности Арды, создаваемая Итиль, оказывается равной

$$\frac{0.4 \cdot \mathcal{E}}{4\pi(d-R)^2} = 0.4 L_\odot \cdot \frac{(d-R)^2}{l^2} \cdot \frac{\pi r^2}{4\pi(2d)^2} \frac{1}{4\pi(d-R)^2} =$$
$$= 0.4 \frac{L_\odot}{4\pi l^2} \cdot \frac{\pi r^2}{4\pi(2d)^2} = 0.4 \frac{L_\odot}{4\pi l^2} \cdot \frac{r^2}{16 d^2} = 0.4 E_\odot \cdot \frac{(\alpha/2)^2}{16},$$

где α — видимый угловой диаметр Итиль.

Для определения видимой звездной величины сопоставим полученную освещенность с освещенностью от Солнца:

$$m_\odot - m = 2.5 \lg\left(\frac{E}{E_\odot}\right) = 2.5 \lg\left(0.4 \frac{(\alpha/2)^2}{16}\right) \approx 2.5 \lg(10^{-6}) = -15.$$

Поскольку видимая звездная величина Солнца равна -27^m, то видимая звездная величина Итиль получается равной -12^m.

А.В.Веселова

2. Двойная звезда с обращающимися по круговой орбите компонентами равных масс наблюдается на телескопе с диаметром 50 см. Известно, что каждый компонент имеет предельную для данного телескопа видимую звездную величину при наблюдении глазом, а угловое расстояние между звездами совпадает с разрешающей способностью телескопа. Обе звезды являются звездами главной последовательности. Каков период обращения данных звезд, если расстояние до них равно 1000 пк?

Решение:

Связь предельной видимой звездной величины с диаметром телескопа можно представить формулой

$$m_{\rm lim} - 6 = 5 \lg \left(\frac{D}{5 \text{ мм}} \right), \quad m_{\rm lim} = 6 + 5 \cdot 2 = 16.$$

Абсолютная звездная величина компонентов равна

$$M = m + 5 - 5 \lg r = 16 + 5 - 5 \lg 1000 = 6.$$

Найдем светимость каждого компонента L, сравнив звезду с Солнцем:

$$M - M_{\odot} = 2.5 \lg \left(\frac{L_{\odot}}{L} \right), \quad 1.2 = 2.5 \lg \left(\frac{L_{\odot}}{L} \right), \quad L/L_{\odot} \approx 1/3.$$

Поскольку для звезд главной последовательности приблизительно выполняется пропорциональность $L \propto \mathfrak{M}^4$, где $\mathfrak{M}$ — масса звезды, то в данном случае масса звезды будет равна $(1/3)^{1/4} \mathfrak{M}_{\odot} \approx \frac{3}{4} \mathfrak{M}_{\odot}$.

Определим большую полуось орбиты звезд. Разрешающая способность телескопа равна $\alpha \approx \lambda/D = 5 \cdot 10^{-7}/0.5 = 10^{-6}$. Тогда большая полуось орбиты равна $\alpha \cdot r \approx 10^{-6} \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^2$ а.е.

Третий закон Кеплера в системе единиц «а.е. — год — масса Солнца» имеет вид

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2},$$

поэтому

$$P = \sqrt{\frac{a^3}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}} \approx \sqrt{\frac{2^3 \cdot 10^6}{1.5}} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ лет}.$$

А.В.Веселова

3. По-словенски Млечный Путь называется «Римской дорогой» (*Rimska cesta*). Если все дороги ведут в Рим, то уж Римская точно должна. Верно ли это для жителя Любляны, наблюдающего проходящий через зенит Млечный Путь? Найдите угол между направлением на Рим и направлением, задаваемым «Римской дорогой». Координаты столицы Словении Любляны: $46°$ с.ш., $14°30'$ в.д., координаты Рима: $42°$ с.ш., $12°30'$ в.д. Считайте что координаты северного полюса Галактики $\alpha = 12^h 50^m$ и $\delta = +27°$.

Решение:

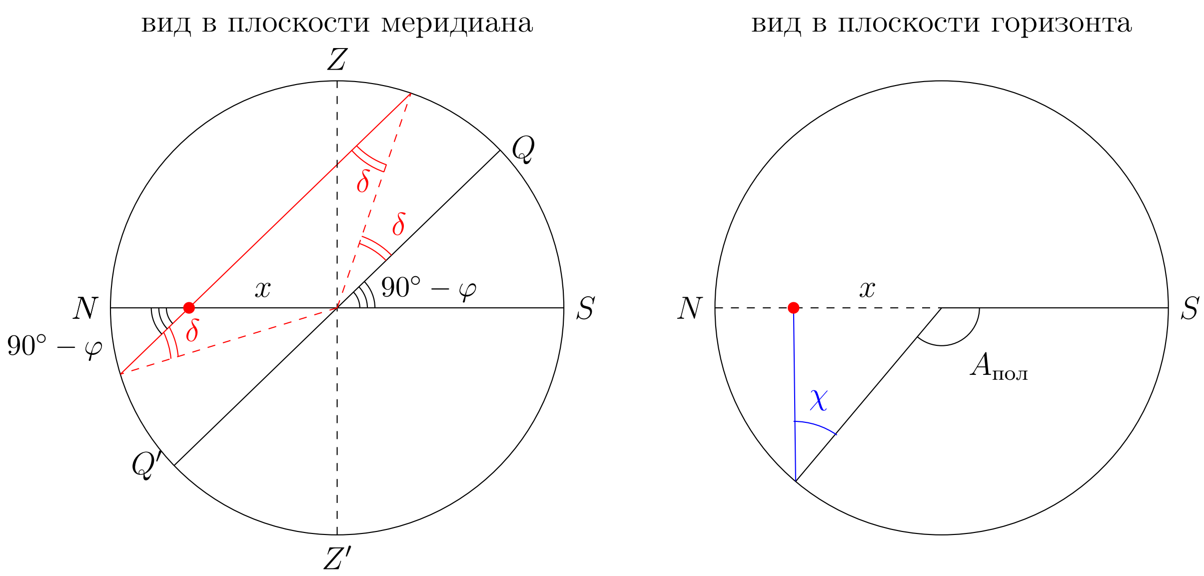
Направления на полюса Галактики перпендикулярны плоскости Млечного Пути (которая соответствует некоторому большому кругу на небесной сфере). Поэтому если Млечный Путь в некоторый момент проходит через зенит, то полюса Галактики в этот же момент находятся на горизонте.

Если «Римская дорога» действительно ведет в Рим, то это означает, что азимут одной из точек пересечения Млечного Пути с горизонтом совпадает с азимутом Рима в Любляне, а в этом случае азимут Рима и азимут полюса Галактики должны отличаться на $90°$.

Как следствие, отличие разности этих азимутов от 90° и будет углом между направлением на Рим и направлением, задаваемым «Римской дорогой».

Начнем с поиска азимута Рима. Он находится не слишком далеко от Любляны, поэтому можно ограничиться плоским приближением. Из данных задачи следует, что Рим на 4° южнее и на 2° западнее Любляны. Учитывая, что один градус долготы на широте $\varphi \approx 45°$ соответствует расстоянию, в $1/\cos\varphi = \sqrt{2} \approx 1.4$ меньшему, чем градус широты, получаем, что тангенс азимута Рима $\operatorname{tg} A_{\text{Рим}} \approx 1.4/4 \approx 1/3$, а сам азимут $A_{\text{Рим}} \approx 20°$ (его можно оценить по значению тангенса, считая угол малым: поскольку Млечный Путь все же не бесконечно тонкий, погрешность даже в несколько градусов вполне допустима).

Осталось оценить азимут полюса Галактики на горизонте. Это можно сделать с помощью сферической тригонометрии (если участник умеет ей пользоваться), однако мы изложим технически более простое решение, позволяющее при некоторой аккуратности (а также при наличии линейки, циркуля и транспортира, использование которых правилами олимпиады не запрещено) обойтись вообще без вычислений.



Построим проекцию небесной сферы на плоскость небесного меридиана для Любляны (левый рисунок). Тут NS — горизонт, а QQ' — небесный экватор. Нарисуем на этой проекции суточную параллель полюса Галактики (сплошная красная линия) и найдем точку ее пересечения с горизонтом (большая красная точка). Затем построим еще одну проекцию небесной сферы, только теперь на плоскость горизонта. Перенеся на нее большую красную точку с предыдущего рисунка, мы найдем положение точки захода полюса, если опустим перпендикуляр с линии NS вниз до пересечения с окружностью. Получившийся угол $A_{\text{пол}}$ — это азимут точки захода полюса. Поскольку все откладываемые углы известны, то при построении обоих чертежей можно отмерять правильные значения углов, после чего построенный азимут нужно будет просто измерить транспортиром.

Однако те же рисунки позволяют и вычислить результат численно. На левом рисунке для треугольника «центр сферы – точка захода – нижняя точка суточной параллели» можно записать теорему синусов, из которой следует, что

$$\frac{x}{\sin\delta} = \frac{1}{\sin(90° + \varphi)}$$

(радиус небесной сферы считается равным единице), а из правого рисунка следует, что $x = \sin\chi$. Отсюда

$$\sin\chi = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi} \approx \frac{9}{10}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},$$

поэтому $\chi \approx 40^\circ$, а $A_{\text{пол}} = 90^\circ + \chi$.

Последний вывод означает, что χ — это как раз и есть азимут, на который направлена «Римская дорога», и это означает, что для жителя Любляны Млечный Путь и в самом деле довольно неплохо указывает на Рим, отклонение от правильного направления составляет около 20° к западу. Можно также заметить, что Словения простирается на восток от Любляны примерно на 2°, так что в восточной Словении название «Римская дорога» является совершенно точным.

Заметим, что при решении задачи можно было аналогичным образом найти азимут не только точки захода полюса, но и точки восхода (или захода, но южного полюса Галактики), получив тем самым второе возможное решение этой части задачи. Однако после определения азимута Рима (или просто осознания, что Рим находится юго-западнее Любляны) становится очевидным, что второе решение дает заведомо худшее совпадение направлений, чем первое. В самом деле, из соображений симметрии можно заключить, что угол между направлением на Рим и направлением «Римской дороги» в этом случае составит около 60°.

Примечание. Возможно, жителям Словении было бы чуть проще оценить правдоподобность их названия Млечного Пути, но, как и в одной из задач 5–6 классов, соревнование честное — в этой параллели и в этом туре участников из Словении не было, что и позволило использовать задачу.

П.А.Тараканов, М.В.Костина

4. В галактике на расстоянии 44 Мпк наблюдается мазерный радиоисточник (излучающий на фиксированной длине волны), двигающийся вблизи центральной черной дыры. Орбита источника перпендикулярна картинной плоскости, а большая ось лежит в картинной плоскости. Угловые размеры орбиты источника составляют $0''.0005$, относительное смещение спектральных линий для наблюдаемой звезды относительно лабораторной длины волны составляет от 0.008 до 0.011. Определите массу центральной черной дыры. Собственным вращением звезды пренебречь.

Решение:

Определим величину большой полуоси орбиты:

$$a = \frac{\alpha}{2} D = \frac{0.0005}{2} \cdot 44 \cdot 10^6 \approx 11 \cdot 10^3 \text{ а.е.}.$$

Смещение спектральных линий происходит вследствие эффекта Доплера, при этом следует учитывать как скорость удаления самой галактики, так и движение звезды в ней. Скорость удаления галактики оценим по закону Хаббла:

$$v_c = H_0 D = 68\,\text{км/с/Мпк} \cdot 44\,\text{Мпк} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ км/с}.$$

Орбита расположена таким образом, что максимальная и минимальная лучевые скорости соответствуют расположению звезды в апоцентре и перицентре орбиты. Однако направление вращения звезды неизвестно.

$$\delta\lambda_i = \frac{v_c \pm v_\alpha}{c}, \quad \delta\lambda_j = \frac{v_c \mp v_\pi}{c}.$$

Изначально неизвестно, какое смещение соответствует перицентру, какое — апоцентру. Выразим модули скорости в апоцентре и перицентре:

$$v_\alpha = |v_c - c\delta\lambda_i|, \quad v_\pi = |v_c - c\delta\lambda_j|.$$

Заметим, что скорость в апоцентре должна быть меньше скорости в перицентре. Вычислим значения модулей:

$$\left|3 \cdot 10^3 - 0.008 \cdot 3 \cdot 10^5\right| = 600 \text{ км/с}, \quad \left|3 \cdot 10^3 - 0.011 \cdot 3 \cdot 10^5\right| = 300 \text{ км/с}.$$

Заметим, что первое выражение без модуля положительно, второе — отрицательно. Таким образом, в перицентре скорость составляет 600 км/с, в апоцентре — 300 км/с. Скорости в перицентре и апоцентре можно выразить через параметры орбиты и массу притягивающего центра:

$$v_\pi^2 = \frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}, \quad v_\alpha^2 = \frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e} \quad \Longrightarrow \quad v_\alpha v_\pi = \frac{GM}{a}.$$

Отсюда получим оценку для массы центрального тела:

$$M = \frac{v_\alpha v_\pi a}{G} = \frac{6 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 0.06 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1.5 \cdot 10^{11}}{6.67 \cdot 10^{-11}} = 4 \cdot 10^{36} \text{ кг} = 2 \cdot 10^6 M_\odot.$$

А.В.Веселова

5. Оцените среднюю поверхностную плотность протопланетного диска, из которого была образована наша Солнечная система, если по современным представлениям отношение пылевой компоненты в диске составляет 1% от газовой компоненты, а пояс Койпера образовался на его краю.

Решение:

Планеты земной группы, спутники планет и астероиды образовались из пылевой компоненты, а не из газовой. Газовые гиганты — это первые сгустки пыли, которые затем притянули на себя большую массу газа и при этом не растеряли ее в процессе эволюции. Тогда для оценки можно считать, что у газового гиганта каменное ядро составляет 1% по массе. Вспомнив или примерно оценив массу Юпитера (318 масс Земли), Сатурна (95 масс Земли), Урана и Нептуна (по ≈ 15 масс Земли), а также Венеру и саму Землю, можно посчитать суммарную массу пыли, которая пошла на построение наиболее крупных планет: $3 + 1 + 2 \cdot 0.1 + 1 + 1 \approx 6$ масс Земли. Если учтем еще и Марс (0.1 массы Земли), Меркурий (в пять раз тяжелее Луны) а также все спутники (крупных порядка тридцати штук, а их масса сопоставима с массой Луны, равной 1/81 массы Земли) и астероиды (главный пояс астероидов составляет 4% массы Луны, пояс Койпера в ≈ 100 раз массивнее последнего), то оценка изменится несущественно и возрастет в лучшем случае до $7 \div 8$ масс Земли.

Таким образом, можно считать, что исходная масса диска составляла порядка $8 \cdot 10^2$ масс Земли. Размеры пояса Койпера — до $55 \div 60$ а.е. То есть общая площадь протопланетного диска составляла $\pi \cdot 60^2 \approx 10^4$ а.е.^{2}. Пространством в центре диска из-за наличия Солнца можно пренебречь, т.к. площадь, ограниченная орбитой Меркурия, заметно меньше 1 а.е.^{2}. Итого, средняя поверхностная плотность

$$\sigma = 8 \cdot 10^2/10^4 M_\oplus/\text{а.е.}^2 = 8 \times 10^{-2} M_\oplus/\text{а.е.}^2 = 5 \times 10^{23}\text{кг/а.е.}^2 \approx 20 \text{ кг/м}^2$$

В.В.Григорьев

XXV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2018

4 февраля

---

11 класс

---

1. В повести Н. Носова «Незнайка на Луне» приключения главного героя проходили внутри полой Луны, среди коротышек, живущих на ядре внутри Луны. Представим, что в результате тотальной войны между обитателями Луны внешняя оболочка распалась на небольшие фрагменты, не связанные друг с другом. За какое время эти фрагменты упадут на ядро? Считайте, что масса Луны распределена поровну между ядром и оболочкой, масса оболочки распределена по ней равномерно, толщина оболочки и размер ядра пренебрежимо малы в сравнении с радиусом Луны.

Решение:

Движение каждого отдельного малого кусочка оболочки можно рассматривать как движение под действием ускорения, создаваемого гравитацией ядра и остальной оболочки. Выделим малый кусочек массы и найдем эти две составляющие. Пусть в некоторый момент радиус оболочки равен r. Тогда, по закону всемирного тяготения, ускорение кусочка оболочки вследствие притяжения его ядром равно $g_{я} = \frac{GM_{\leftmoon}}{2r^2}$, где $M_{\leftmoon}$ — масса Луны (по условию она разделилась поровну между маленьким ядром и абсолютно тонкой оболочкой).

С оценкой ускорения, создаваемого остальной оболочкой, дело обстоит несколько сложнее. Пусть кусочек массы dm имеет площадь dS. Известно, что потенциальная энергия самогравитирующей сферы массы M и радиуса r равна $\Phi = -\frac{GM^2}{2r}$ (в нашем случае $M = M_{\leftmoon}/2$). Пусть сила гравитации, приходящаяся на единицу площади оболочки, равна p (фактически эта величина имеет смысл давления, действующего на оболочку). Мысленно изменим радиус сферы на величину dr и запишем закон сохранения энергии, чтобы найти p:

$$A = p\,dV = p\,4\pi r^2\,dr = -d\Phi = -d\left(\frac{GM^2}{2r}\right) = \frac{GM^2}{2r^2}\,dr.$$

Отсюда

$$p = \frac{GM^2}{2r^2\,4\pi r^2},$$

а сила гравитации, действующей на кусочек массой dm и площадью dS, равна $F = p\,dS$. Заметив, что $\frac{M\,dS}{4\pi r^2} = dm$, получаем, что

$$F = p\,dS = \frac{GM\,dm}{2r^2},$$

т.е. гравитационное ускорение, которое получает оболочка при воздействии самой на себя, равно ускорению, которая получала бы частица массы dm при воздействии на ее половины массы оболочки, сосредоточенной в центре.

Тот же вывод можно получить и другим способом, несколько менее честным, но не требующим привлечения информации о потенциальной энергии самогравитирующей сферы и дифференцирования. Рассмотрим оболочку конечной (хотя и малой) толщины и разделим ее на тонкие концентрические слои. В соответствии с теоремой Ньютона самый внешний слой притягивается остальной оболочкой так же, как материальной точкой с массой, равной массе оболочки, и расположенной в центре сферы. На самый внутренний слой — в соответствии с утверждением той же теоремы — оболочка просто не действует. Каждый же промежуточный слой притягивается только той массой оболочки, которая находится внутри него. Поскольку оболочка тонкая, то притягивающая некоторый слой масса линейно меняется с глубиной от полной массы оболочки до нуля, и в среднем произвольный малый кусочек оболочки притягивается массой, равной половине массы оболочки. Очевидно, что если устремить толщину оболочки к нулю, то полученный результат не изменится, а отсюда сразу же следует вывод, сделанный абзацем выше.

Таким образом, задача сводится к выяснению того, за какое время пробная частица, находящаяся с нулевой начальной скоростью на расстоянии, равном радиусу Луны $R_☾$, упадет на притягивающий центр, масса которого равна $\frac{3}{4}M_☾$. Вычисляя это время t с помощью III закона Кеплера как половину периода вырожденной эллиптической орбиты с большой полуосью, равной $R_☾/2$, получаем

$$\frac{(2t)^2}{(R_☾/2)^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot 3M_☾/4},$$

откуда

$$t = \pi\sqrt{\frac{R_☾^3}{6GM_☾}}.$$

Далее можно либо оценить радиус Луны (например, как 1/4 радиуса Земли) и массу Луны (как 1/80 массы Земли), вычислив результат непосредственно, либо предварительно преобразовать полученное выражение к виду

$$t = \sqrt{\frac{\pi}{8G\rho}},$$

где $\rho = \frac{M_☾}{\frac{4}{3}\pi R_☾^3}$ — средняя плотность Луны. Последняя составляет примерно 3 г/см^3, но даже достаточно грубая оценка этой величины не слишком сильно изменит результат, поскольку $t \propto \rho^{-1/2}$. В итоге получаем, что время падения составит около 20 минут.

И.Д.Маркозов, П.А.Тараканов

2. Солнечный парус, изначально покоившийся на земной орбите, вследствие солнечной вспышки приобрел скорость $v_0 = 3$ м/с, направленную от Солнца. Как далеко от Солнца он сможет улететь? Гравитационным взаимодействием с планетами пренебречь, парус полностью отражает все падающее на него излучение.

Решение:

Сила светового давления, действующая на покоящийся парус, компенсирует его притяжение к Солнцу:

$$\frac{L_\odot}{4\pi r^2}\frac{S}{c} - \frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{r^2} = 0.$$

Это уравнение выполняется при любом гелиоцентрическом расстоянии паруса r. Означает ли это, что парус будет двигаться равномерно и покинет пределы Солнечной системы?

Нет! Если парус начинает двигаться, в игру вступает эффект Доплера. Рассмотрим фотон, летящий «вдогонку» парусу, движущемуся со скоростью v, и имеющий энергию E. В системе отсчета паруса его энергия меньше, чем в «солнечной»:

$$E' = E\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Хотя энергия фотона при отражении не меняется в системе отсчета паруса, в «солнечной» она составит уже

$$E'' = E'\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Таким образом,

$$E'' = E\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 \approx E\left(1 - \frac{2v}{c}\right).$$

Если бы парус покоился, при отражении этого фотона ему был бы передан импульс

$$\Delta p = \frac{2E}{c},$$

для движущегося же паруса

$$\Delta p'' = \frac{2E}{c}\left(1 - \frac{2v}{c}\right).$$

Можем заключить, что на движущийся парус оказывается меньшая сила светового давления.

Уравнение движения паруса имеет вид

$$ma = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}\frac{S}{c}\left(1 - \frac{2v}{c}\right) - \frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{r^2}$$

и с учетом условия равновесия для покоящегося паруса записывается как

$$ma = -\frac{2G\mathfrak{M}_\odot m}{r^2 c}v.$$

Домножим обе части на Δt:

$$\frac{mc}{2}\Delta v = -\frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{r^2}\Delta r.$$

В правой части полученного соотношения стоит не что иное, как работа гравитационных сил. Мы вполне можем просуммировать ее, поскольку в результате получим просто разность гравитационных потенциальных энергий, взятую со знаком минус:

$$\frac{mc}{2}(v_1 - v_0) = \frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{r_1} - \frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{r_0}.$$

Потребуем, чтобы удалению r_1 соответствовала нулевая скорость $v_1 = 0$:

$$\frac{cv_0}{2} = G\mathfrak{M}_\odot\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right) = G\mathfrak{M}_\odot\frac{r_1 - r_0}{r_0 r_1}.$$

Таким образом,

$$\frac{r_1 - r_0}{r_1} = \frac{cv_0}{2}\left(\frac{G\mathfrak{M}_\odot}{r_0}\right)^{-1} = \frac{cv_0}{2v_\oplus^2} = \frac{3\cdot 10^8 \times 3}{2\times(3\cdot 10^4)^2} = \frac{1}{2};$$

$$r_1 = \frac{r_0}{1 - 1/2} = 2r_0.$$

Солнечный парус отлетит от Солнца и расположится на расстоянии 2 а. е. от него.

И.А. Утешев

3. Транснептуновый объект (174567) Варда в настоящее время имеет видимую звездную величину 21^m (при наблюдении с Земли) и находится на расстоянии 48 а.е. от Солнца. Оцените диаметр Варды, если ее поверхность отражает 10% падающего на нее света. Видимая звездная величина Солнца (также при наблюдении с Земли) составляет -27^m.

Решение:

Определим, какое количество энергии от Солнца падает на единицу площади поверхности Варды — определим освещенность Варды. Освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника излучения, тогда освещенность Варды $E_\mathrm{v} = L_\odot/4\pi r^2$. Количество энергии, получаемое Вардой за секунду времени, равно $\mathcal{E} = E_\mathrm{v} \cdot \pi R^2$, где R — радиус Варды.

Определим освещенность, создаваемую Вардой на поверхности Земли. Поскольку нам точно не известно взаимное расположение Солнца, Земли и Варды, будем считать, что Варда удалена от Земли в среднем также на $r = 48$ а. е. Тогда освещенность, создаваемую Вардой для наблюдателя на Земле, можно оценить как

$$E = A\mathcal{E}/(2\pi r^2) = A(L_\odot/4\pi r^2) \cdot \pi R^2/(2\pi r^2) = AL_\odot R^2/8\pi r^4,$$

где $A = 0.1$. Значение радиуса можно определить, сравнив видимые звездные величины Варды и Солнца:

$$m_\mathrm{v} - m_\odot = 2.5 \lg \frac{E_\odot}{E} = 2.5 \lg \frac{L_\odot/4\pi a_\oplus^2}{AL_\odot R^2/8\pi r^4} = 2.5 \lg \frac{2r^4}{AR^2 a_\oplus^2}.$$

Выражая результат и вычисляя его в единицах СИ, получаем

$$R = \frac{r^2 10^{0.2(m_\odot - m_\mathrm{v})}}{a_\oplus}\sqrt{\frac{2}{A}} = \frac{(4.8 \cdot 10 \cdot 1.5 \cdot 10^{11})^2 \cdot 10^{0.2(-26.7-20.5)}}{1.5 \cdot 10^{11}}\sqrt{\frac{2}{0.1}} \approx 6 \cdot 10^5 \text{ м} = 6 \cdot 10^2 \text{ км}.$$

А.В.Веселова

4. Определите, на какой широте можно одновременно наблюдать звезды $\alpha\ For$ ($\alpha = 3^h 12^m, \delta = -28°59'$) и $\varepsilon\ CMa$ ($\alpha = 6^h 58^m, \delta = -28°58'$) на горизонте? Атмосферной рефракцией пренебречь.

Решение:

Поскольку рефракцией можно пренебречь, то в момент появления звезд на горизонте мы можем считать высоту равной нулю. Также, поскольку значения склонений звезд очень близки, можно считать их находящимися на одной суточной параллели. Тогда для часового угла t, склонения светила δ и широты φ справедливо соотношение

$$\cos t = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta,$$

которым можно воспользоваться как готовым фактом, а можно вывести, построив сферический треугольник с вершинами в полюсе мира, зените и светиле и записав для него теорему косинусов.

В момент нахождения звезд на горизонте они располагаются на суточной параллели симметрично относительно небесного меридиана. При этом разность часовых углов равна разности прямых восхождений: $\Delta t = t_1 - t_2 = \alpha_2 - \alpha_1$, поскольку звезды наблюдаются одновременно в момент звездного времени $s = t_{1,2} + \alpha_{1,2}$.

Рассмотрим точку наблюдения в северном полушарии. Часть суточной параллели звезд с отрицательным склонением, находящаяся над горизонтом, не превосходит половины всей параллели. Поскольку звезды одновременно видны на горизонте, то длина находящейся над горизонтом части суточной параллели равна разности прямых восхождений, а часовой угол заходящей звезды равен половине длины данного участка параллели. Тогда получим выражение для широты:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}{\operatorname{tg}\delta} = -\frac{\cos\left(\frac{1^h 53^m}{24^h}\cdot 360^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(-28^\circ 59'\right)} \approx -\frac{\cos(30^\circ)}{-\operatorname{tg}\left(30^\circ\right)} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/3} = 1.5.$$

Можно вспомнить табличные значения тангенсов: $\operatorname{tg}45^\circ = 1$, $\operatorname{tg}60^\circ = \sqrt{3} \approx 1.7$. Искомая широта заключена в данном интервале. В качестве пробного значения можно рассмотреть 55° и оценить тангенс такого угла:

$$\operatorname{tg}(55^\circ) = \operatorname{tg}(60^\circ - 5^\circ) = \frac{\operatorname{tg}60^\circ - \operatorname{tg}5^\circ}{1 + \operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}5^\circ} \approx \frac{\sqrt{3} - 5/57.3}{1 + \sqrt{3}\cdot 5/57.3} \approx 1.4.$$

У искомого угла тангенс несколько больше, поэтому для оценки можно принять значение $\varphi = 56^\circ$ или 57°. Еще один способ — вспомнить определение тангенса как отношения катетов прямоугольного треугольника, построить треугольник с нужным отношением и измерить угол в нем с помощью транспортира.

Теперь рассмотрим ситуацию для наблюдателя в южном полушарии. В данном случае над горизонтом будет находиться бóльшая часть суточной параллели звезд. Модуль часового угла звезд будет равен дополнению полуразности прямых восхождений до 12 часов:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\cos\left(12^h - \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)}{\operatorname{tg}\delta} =\approx -\frac{\cos(150^\circ)}{-\operatorname{tg}\left(30^\circ\right)} \approx -1.5.$$

Поскольку тангенс является нечетной функцией, то в данном случае широта равна $-56^\circ \div -57^\circ$, и это второй возможный ответ задачи.

А.В.Веселова

5. При рентгеновских наблюдениях нейтронной звезды с массой, равной $1.4\ \mathfrak{M}_\odot$, и радиусом 11 км была найдена эмиссионная линия с энергией квантов 400 кэВ. В результате какого процесса эта линия образовалась? На какой высоте над поверхностью звезды этот процесс происходил?

Решение:

Ключевым для решения задачи является ответ на первый вопрос. Нужно подобрать такой процесс, который приводил бы к излучению фотонов с практически одинаковой энергией, поскольку в противном случае линия не будет выделяться в спектре.

Переходы электронов в атомах не годятся, соответствующие энергии слишком малы. Можно было бы предположить, что речь идет о переходе в практически полностью ионизованном тяжелом атоме, однако можно либо знать, что соответствующие линии попадают максимум в мягкий рентгеновский диапазон (с энергиями на два порядка меньшими, чем требуется), либо догадаться, что характерные энергии таких переходов должны максимум на два-три порядка превышать характерные энергии обычных переходов в обычных атомов (из-за отсутствия в природе химических элементов с номерами около 100 и выше). Возможно, кто-либо из участников знает о существовании циклотронных линий в спектрах нейтронных звезд (возникающих из-за движения заряженных частиц в сильнейших магнитных полях), однако их энергии также на порядок меньше, и, главное, это линии поглощения. При ядерных реакциях образуются γ-кванты, энергия которых существенно больше.

В итоге остается один процесс, который, с одной стороны, достаточно распространен, с другой — приводит к образованию фотонов примерно нужной энергии. Это аннигиляция электрон-позитронных пар. Однако в этом случае должна образовываться линия с энергией 511 кэВ (это энергия покоя электрона), и это означает, что излучение претерпело красное смещение $z = \frac{511-400}{511} \approx \frac{1}{5}$.

Вследствие чего оно могло появиться? Нейтронные звезды с очень большим трудом наблюдаются даже в близких галактиках, так что космологическую природу красного смещения можно исключить сразу, оно для этого чрезмерно велико. Допплеровское смещение также не подходит — при таком z объект должен двигаться относительно нас с околосветовой скоростью, а относительные скорости звезд в Галактике (и скорости галактик друг относительно друга) на порядки меньше. Остается один вариант — гравитационное красное смещение. В самом деле, если излучение образуется где-то недалеко от поверхности нейтронной звезды (что косвенно следует из самой формулировки вопроса задачи), то это означает, что свет выходит из гравитационной потенциальной ямы, созданной объектом, чей радиус лишь в несколько раз превышает радиус Шварцшильда, и гравитационное красное смещение в такой ситуации должно быть вполне заметным.

Осталось оценить величину гравитационного красного смещения, которую создает объект массы $\mathfrak{M}$ для излучения, образующегося на расстоянии r от него. Поскольку $z \approx \frac{|\varphi|}{c^2} = \frac{G\mathfrak{M}}{c^2 r}$ (где φ — гравитационный потенциал), из имеющихся данных можно сразу вычислить r. В результате оказывается, что $r \approx 11$ км, т.е. процесс аннигиляции происходит практически на поверхности нейтронной звезды.

П.А. Тараканов