

Инструкция для участников

- (1) Продолжительность выполнения заданий составляет 5 часов.
- (2) Задания раунда включают:
 - Вопросы 1-5 - по 10 баллов каждое - $10 \times 5 = 50$ баллов
 - Вопросы 6-10 - по 20 баллов каждое - $20 \times 5 = 100$ баллов
 - Вопросы 11-12 - по 50 баллов каждое - $50 \times 2 = 100$ баллов
 - Всего = 250 баллов
- (3) Конверт содержит:
 - a. Листы заданий на английском.
 - b. Листы заданий на русском.
 - c. Таблица констант на английском.
 - d. Таблица констант на русском.
 - e. Листы ответов.
 - f. Титульный лист.
- (4) Используйте чёрную или синюю ручкой. Для рисунков можно использовать карандаш.
- (5) Отрицательных оценок нет
- (6) При отсутствии подробного решения часть баллов будет снята.
- (7) При неправильном округлении итогового ответа, отсутствии или ошибках использования единиц измерения часть баллов будет снята.
- (8) Необходимые значения фундаментальных и астрономических постоянных должны быть взяты из предоставленной Вам таблицы констант.
- (9) Инструкция по использованию листов ответов.
 - a. Для каждого задания предоставлен отдельный лист ответов. Окончательный ответ на каждое задание / каждую часть задания должны быть написаны в соответствующем месте на листе ответов. На каждом листе ответов напишите Ваш код участника и номер страницы.
 - b. Вы должны предоставить подробное решение в пустой области соответствующего листа ответов. Если необходимо, Вы можете попросить дополнительные чистые листы у наблюдателей.
 - c. Каждое задание выполняйте на отдельном листе.
 - d. На лицевой стороне каждого листа ответов напишите Ваш код участника, номер задания и номер листа. На обратной стороне каждого листа ответов напишите Ваш код участника и номер листа.
 - e. Номера листов должны быть непрерывными; например, если Вы используете 20 листов, листы должны быть пронумерованы от 1 до 20.
 - f. Пишите только в выделенной области.
 - g. Чтобы выделить часть работы, которая является черновиком и не будет оцениваться, напишите "ROUGH" над этой частью и перечеркните эту часть.
- (10) В конце раунда
 - a. На титульном листе напишите номера листов для каждого выполненного задания.
 - b. Проверьте наличие кода участника на каждом листе.
 - c. Вложите титульный лист, все листы ответов, пустые и черновые листы в конверт. Вы можете забрать с собой листы заданий и таблицу констант.

(T1) True or False

Определите, верны ли следующие утверждения. В Summary Answersheet отметьте галочкой нужный ответ (TRUE / FALSE – Верно/Неверно) для каждого утверждения. Объяснения не нужны.

- (T1.1) На фотографии ясного неба, сделанной в полнолуние с достаточно длинной выдержкой, небо голубое, как днём. 2
- (T1.2) Астроном в Бхубанешваре отмечает положение Солнца на небе в 5:00 UT каждый день в течение года. Если ось вращения Земли перпендикулярна плоскости орбиты, эти отметки располагаются на дуге большого круга. 2
- (T1.3) Если период обращения тела, обращающегося вокруг Солнца в плоскости эклиптики, меньше периода обращения Урана, то его орбита непременно полностью лежит внутри орбиты Урана. 2
- (T1.4) Центр масс Солнечной системы всегда находится внутри Солнца. 2
- (T1.5) Фотон движется в пустом пространстве. Из-за расширения Вселенной его импульс уменьшается. 2

(T2) Газы на Титане

Частицы газа в планетной атмосфере имеют широкое распределение по скоростям. Если средне-квадратичная тепловая скорость частиц превышает 1/6 скорости убегания, то большая часть газа покинет планету. Какова минимальная масса (в атомных единицах массы), A_{\min} , идеального одноатомного газа, который остался в атмосфере Титана? 10

Дано: масса Титана $M_T = 1.23 \times 10^{23}$ кг. Радиус Титана $R_T = 2575$ км, поверхностная температура Титана $T_T = 93.7$ К.

(T3) Ранняя Вселенная

Космологические модели показывают, что плотность энергии излучения, ρ_r , во Вселенной пропорциональна $(1+z)^4$, а плотность энергии вещества, ρ_m , пропорциональна $(1+z)^3$, где z — красное смещение. Безразмерная параметр, Ω , определяется как $\Omega = \rho/\rho_c$, где ρ_c — критическая плотность Вселенной. В нынешней Вселенной параметры равны $\Omega_{r0} = 10^{-4}$ и $\Omega_{m0} = 0.3$ для излучения и вещества, соответственно.

- (T3.1) Вычислите красное смещение, z_c , при котором плотности энергии излучения и вещества были равны. 3
- (T3.2) Считая, что спектр реликтового излучения чернотельный с температурой 2.732 К, определите температуру излучения, T_c , на красном смещении z_c . 4
- (T3.3) Оцените характерную энергию фотона, E_ν (в эВ), излучения, испущенного на красном смещении z_c . 3

(T4) Тени

Наблюдатель в северном полушарии заметил, что минимальная длина тени в течение дня метрового вертикального столба составила 1.732 м. В те же самые сутки максимальная длина тени того же столба была равна 5.671 м. 10

Найдите широту места наблюдения ϕ и склонение Солнца в этот день, δ_\odot . Считать Солнце точечным источником и пренебречь рефракцией.

(T5) GMRT beam transit

Giant Metrewave Radio Telescope (GMRT), один из самых больших радиотелескопов мира в метровом диапазоне, находится в западной Индии (широта $19^\circ 6'$ с.ш., долгота $74^\circ 3'$ в.д.). GMRT состоит из 30 антенн-тарелок, диаметром 45 м каждая. Каждая отдельная антенна жестко закреплена таким образом, что её ось указывает на точку с зенитным расстоянием $39^\circ 42'$ на северном меридиане, так что точечный радиоисточник проходит по диаметру диаграммы направленности, когда он проходит через меридиан. 10

Чему равно время, T_{transit} , в течение которого этот источник будет находиться в пределах FWHM (полной ширины на половине интенсивности) диаграммы направленности одиночной антенны GMRT при наблюдении на частоте 200 МГц?

Подсказка: FWHM диаграммы направленности антенны, работающей на данной частоте, соответствует угловому разрешению антенны.

(T6) Пульсация цефеиды

Переменная звезда β -Doradus – цефеида с периодом пульсаций 9.84 дня. Считайте, что звезда наиболее ярка в наиболее сжатом состоянии (радиус R_1), напротив, обладает наименьшей яркостью при наибольшем радиусе (R_2). Звезда всегда имеет сферическую форму и излучает как абсолютно черное тело. Боллометрическая звездная величина изменяется в пределах от 3,46 до 4,08m. По доплеровскому смещению мы знаем, что на протяжении пульсации поверхность звезды расширяется или сжимается со средней лучевой скоростью 12,8 км/с. На протяжении периода пульсаций, длина волны максимума излучения изменяется от 531 до 649,1 нм.

(T6.1) Найдите отношение радиусов звезды при наименьшем и наибольшем радиусе (R_1/R_2) . 7

3

(T6.2) Найдите радиус звезды в метрах при минимальном и максимальном радиусе $(R_1 \text{ и } R_2)$. 3

(T6.3) Вычислите поток от звезды, F_2 , когда звезда имеет наибольший размер. 5

5

(T6.4) Выразите расстояние до звезды, D_{star} , в парсеках. 5

5

(T7) Оптика телескопа

В нашем распоряжении идеальный телескоп-рефрактор с относительным отверстием $f/5$, фокусным расстоянием объектива 100 см и фокусным расстоянием окуляра 1 см.

(T7.1) Каково увеличение m_0 телескопа? Каково расстояние L_0 между объективом и окуляром телескопа (длина телескопа)? 4

4

Добавление линзы Барлоу между объективом и главным фокусом позволяет усилить увеличение, сохранив компактный размер телескопа. Пусть линза Барлоу с фокусным расстоянием 1 см установлена между объективом и окуляром телескопа для достижения удвоения увеличения.

(T7.2) На каком расстоянии d_B от главного фокуса необходимо установить линзу Барлоу для того, чтобы добиться удвоения увеличения телескопа? 6

6

(T7.3) На какую величину ΔL увеличится длина телескопа? 4

4

Теперь в главный фокус телескопа установили ПЗС-приёмник (без линзы Барлоу и окуляра). Размер пикселя ПЗС-камеры 10 мкм.

(T7.4) Каково расстояние в пикселях n_p между центрами изображений двух звезд на ПЗС-камере, если на небе их разделяет $20''$? 6

6

(T8) Фотометрия в полосе U

Звезда имеет видимую звездную величину $m_U = 15.0m$ в полосе U . Фильтр U идеальный: имеет полное (100%) пропускание во всей своей полосе и непрозрачен (пропускание 0%) вне полосы. Центр полосы пропускания приходится на 360 нм, полная ширина полосы 80 нм. Предполагается, что звезда имеет излучает одинаково на разных частотах (плоский спектр). Зависимость между звездной величиной m (в любой полосе) и плотностью потока f звезды выражается в Янских ($1 \text{ Ян} = 10^{-26} \text{ Вт Гц}^{-1} \text{ м}^{-2}$) дается выражением:

$$f = 3631 \times 10^{-0.4m} \text{ Ян}$$

(T8.1) Оцените, сколько фотонов N_0 в полосе U падает от звезды на перпендикулярно лежащую площадку площадью 1 м^2 на границе атмосферы Земли каждую секунду. 8

8

Наблюдения этой звезды в полосе U проводятся наземным телескопом с диаметром объектива 2 метра. Атмосферное поглощение в полосе U во время наблюдений составило 50%. Качество изображения (seeing) соответствует дифракционному. Средняя величина фона неба в полосе U составляет 22 звёздные величины с квадратной угловой секунды.

(T8.2) Каково отношение R числа фотонов, зарегистрированных от звезды за секунду, к числу фотонов, зарегистрированных от неба за секунду, если мы проводим измерения в круге диаметром $2''$? 8

8

4

(T8.3) В реальности регистрируется только 20% падающих на главное зеркало фотонов в полосе U. Сколько фотонов N_t от звезды будет зарегистрировано в этом случае за секунду измерений?

(T9) Mars Orbiter Mission

Индийская станция Mars Orbiter Mission (MOM) была запущена 5 ноября 2013 года. Масса без топлива составляет 500 кг, масса топлива составляет 852 кг. Станция была выведена на эллиптическую орбиту вокруг Земли с высотой перигея 264,1 км и высотой апогея 23903,6 км над поверхностью Земли. После шести орбитальных манёвров станция была выведена на межпланетную траекторию полёта к Марсу (Гомановскую орбиту).

Первый орбитальный маневр был осуществлен включением двигателей на очень короткое время вблизи перигея. После импульса плоскость орбиты и перигей орбиты остались неизменными. Станция получила дополнительный импульс $1,73 \times 10^5$ кг·м/с. Изменением массы при сгорании топлива пренебречь.

(T9.1) Чему равна высота нового апогея h_a над поверхностью Земли после маневра?

14

(T9.2) Найдите эксцентриситет (e) новой орбиты и новый орбитальный период (P) станции в часах.

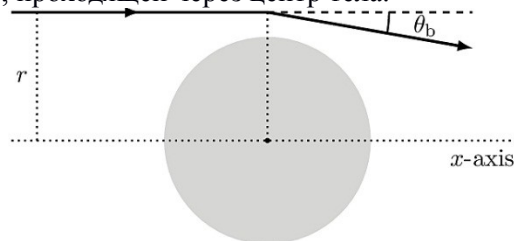
6

(T10) Gravitational Lensing Telescope

Общая Теория Относительности Эйнштейна предсказывает отклонение света вблизи массивных тел. Для упрощения предположим, что отклонение света происходит в одной точке для каждого луча, как показано на рисунке. Угол отклонения, θ_b , задается соотношением:

$$\theta_b = \frac{2 R_{sch}}{r}$$

где R_{sch} - это радиус Шварцшильда, соответствующий данному гравитирующему телу. Зададим «прицельный параметр» r как расстояние между лучом света и располагающейся параллельно осью x (x -axis), проходящей через центр тела.



Массивное тело ведёт себя как фокусирующая линза. Лучи, приходящие из бесконечности, с одним и тем же прицельным параметром r , сходятся в точку на оси x , на расстоянии f_f от центра массивного тела. И наблюдатель увидит увеличения яркости благодаря такому гравитационному фокусированию. Массивное тело становится гравитационным телескопом, усиливающим сигнал далёких галактик.

(T10.1) Пусть Солнце является таким гравитационным телескопом. Посчитайте наименьшее расстояние f_{min} от центра Солнца (в а.е. - AU), на котором лучи могут сфокусироваться.

6

(T10.2) Предположим, что маленький круглый детектор размером a , установлен на расстоянии f_{min} , сцентрирован на оси x и расположен перпендикулярно ей. Попасть в детектор могут только лучи, проходящие до некоторой высоты h над поверхностью Солнца ($h \ll R_\odot$). Величина усиления на приёмнике задается как отношения интенсивности при присутствии Солнца к интенсивности при отсутствии Солнца. Выразите величину усиления A_m через R_\odot и a .

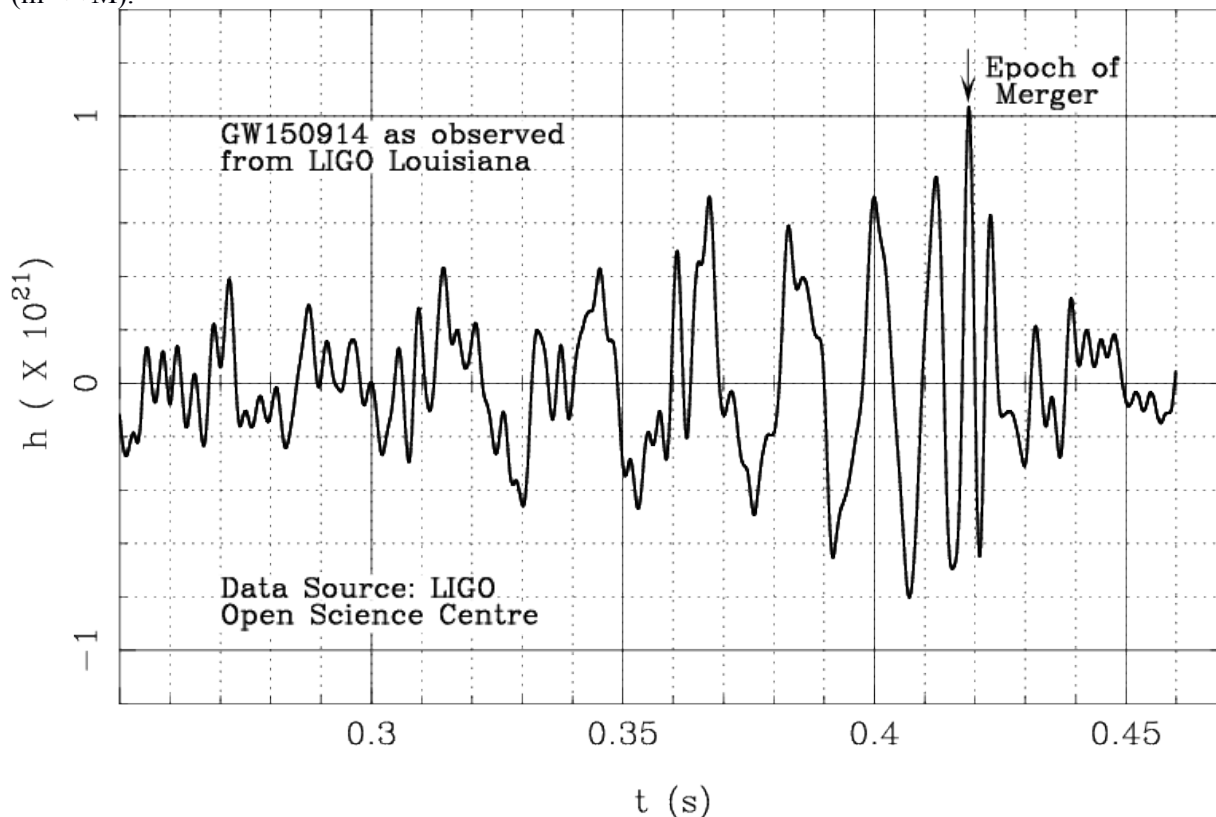
8

(T10.3) Пусть луч света проходит через скопление галактик с неким распределением массы. В гравитационном линзировании участвует только масса $M(r)$, лежащая внутри радиуса r , равного прицельному параметру r . Найдите выражение для распределения массы $M(r)$, при котором гравитационная линза ведёт себя как идеальная оптическая собирающая линза.

6

(T11) Гравитационные волны Gravitational Waves

Перед Вами сигнал, зарегистрированный детектором LIGO в сентябре 2015 г. По оси абсцисс отложено время в секундах, по оси ординат — сигнал (растяжение). В рамках задачи рассматривается орбитальное движение пробной частицы массы m вокруг тела массы M ($m \ll M$).



Пробная частица теряет энергию, излучая гравитационные волны. В результате орбита постепенно уменьшается, до тех пор, пока частица не достигнет поверхности тела, или, в случае чёрной дыры, последней устойчивой орбиты — ISCO — радиус которой равен $R_{\text{ISCO}} = 3R_{\text{sch}}$, где R_{sch} — шварцшильдовский радиус чёрной дыры. Момент слияния называется “epoch of merger”. В этот момент амплитуда гравитационной волны максимальна, также как и её частота, которая всегда в 2 раза больше, чем орбитальная частота. Считайте, что законы Кеплера выполняются.

(T11.1) По графику оцените период T_0 и отсюда вычислите частоту f_0 гравитационных волн прямо перед моментом слияния. 3

(T11.2) Для звёзд главной последовательности (main sequence, MS) выполняется соотношение «масса – радиус» 10

$$R_{\text{MS}} \propto (M_{\text{MS}})^\alpha$$

где $\alpha = 0.8$ для $M_\odot < M_{\text{MS}}$

$\alpha = 1$ для $0.08 M_\odot < M_{\text{MS}} < M_\odot$

Напишите выражение для максимальной частоты гравитационных волн в зависимости от массы звезды в массах Солнца (M_{MS}/M_\odot) и α .

(T11.3) Используя этот результат, определите подходящее значение α , при котором частота гравитационных волн максимальна для любой звезды главной последовательности. Вычислите эту частоту. 9

(T11.4) Максимально возможная масса белого карлика (white dwarf — WD) равна $1.44 M_\odot$. Соотношение «масса—радиус» для белых карликов $R \propto M^{-1/3}$. Радиус белого карлика солнечной массы равен 6000 км. Найдите наибольшую частоту гравитационных волн $f_{\text{WD,max}}$, излучаемой пробной частицей, обращающейся вокруг белого карлика. 8

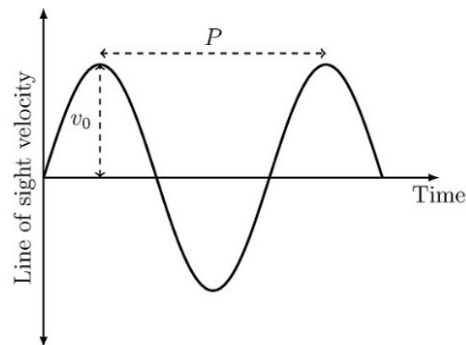
- (T11.5) Нейтронные звезды имеют массы от 1 до 3 M_{\odot} и радиусы 10–15 км. Найдите интервал частот гравитационных волн, излучаемых частицей, $f_{NS,min}$ и $f_{NS,max}$, обращающейся вокруг нейтронной звезды практически по её поверхности. 8
- (T11.6) Напишите выражение для частоты гравитационных волн f_{BH} , испускаемых пробной частицей, обращающейся вокруг чёрной дыры (black hole — BH), в зависимости от массы чёрной дыры в массах Солнца M_{\odot} . 7
- (T11.7) Используя только период (или частоту) гравитационных волн до момента слияния, определите чем может быть центральный объект: звездой ГП (MS), белым карликом (WD), нейтронной звездой (NS) или чёрной дырой (BH). Отметьте галочкой правильный ответ в бланке ответов (Summary Answersheet). Оцените массу этого объекта M_{obj} в массах Солнца M_{\odot} . 5

(T12)

Два основных метода открытия экзопланет — это метод лучевых скоростей и метод транзита.

Рассмотрим планету массы M_P и радиуса R_P , обращающуюся по круговой орбите радиуса a вокруг звезды массой M_S ($M_S \gg M_P$) и радиуса R_S . Нормаль к орбите планеты наклонена к лучу зрения на угол i ($i = 90^\circ$ означает, что орбита видна с ребра). Считайте, что у звезды нет других планет и $R_S \ll a$

Метод лучевых скоростей:



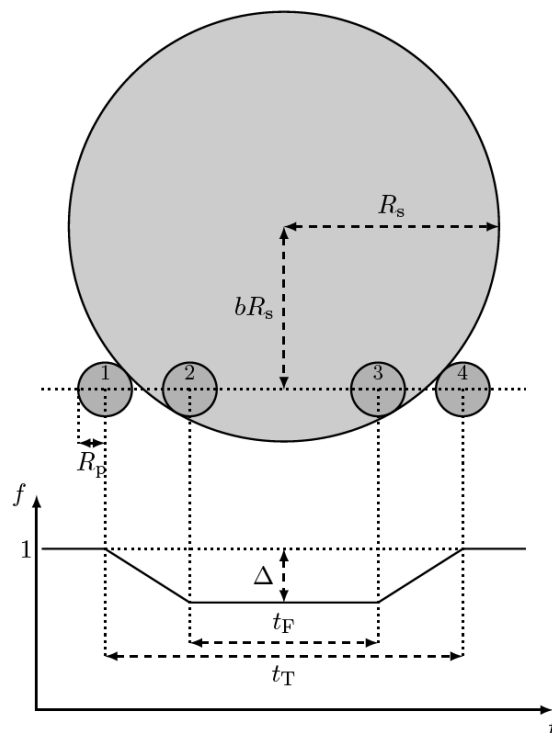
На рисунке дана кривая лучевых скоростей (изменение лучевой скорости v_1 со временем t) с обозначенными измеряемыми величинами: орбитальный период P , максимальная лучевая скорость v_0 .

(T12.1) Выпишите выражение для радиуса орбиты (a) и орбитальной скорости планеты (v_P) в зависимости от M_S и P . 3

(T12.2) Получите нижний предел на массу планеты $M_{P,min}$ в зависимости от M_S , v_0 и v_P . 4

Метод транзитов:

Введем следующие обозначения (см. внизу схему транзита и соответствующую кривую блеска (НЕ в масштабе)):



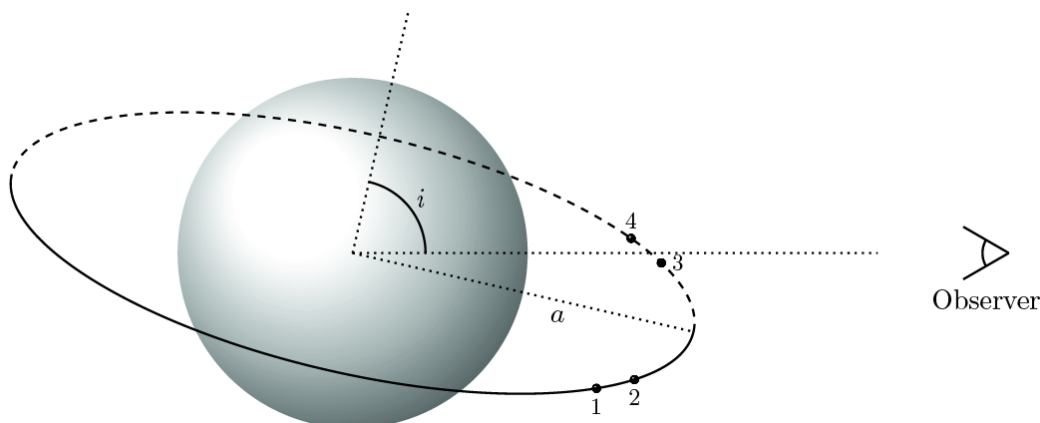
i — наклон нормали к орбите планеты к лучу зрения;

bR_s — кратчайшее расстояние от центра диска звезды до хорды, отражающей путь планеты по диску звезды в случае, когда $i \neq 90^\circ$;

f — поток излучения от звезды вне транзита принят за 1, а максимальное падение яркости — Δ ;

t_F — время между вторым и третьим контактами;

t_T — время между первым и четвертым контактами.



Измеряемыми величинами в методе транзитов являются P , t_T , t_F и Δ .

(T12.3) Найдите выражение для i в зависимости от R_s и a для транзита в принципе видимого и измеряемого удалённым наблюдателем. 2

(T12.4) Выразите Δ через R_s и R_p . 1

(T12.5) Выразите t_T и t_F через R_s , R_p , a , P и b . 8

(T12.6) Предполагая, что орбита много больше радиуса звезды, покажите, что параметр b выражается следующим образом: 5

$$b = \left[1 + \Delta - 2\sqrt{\Delta} \frac{1 + \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2}{1 - \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2} \right]^{1/2}$$

(T12.7) Из формулы (T12.6) получите выражение для отношения a/R_s через измеряемые параметры транзита, используя подходящую аппроксимацию. 3

(T12.8) Объединив результаты обоих методов выразите среднюю плотность звезды 6

$$\rho_s \equiv \frac{M_s}{4\pi R_s^3/3} \text{ через } t_T, t_F, \Delta \text{ и } P.$$

Каменная или газовая:

Рассмотрим видимую с Земли с ребра ($i = 90^\circ$) систему звезда-планета с круговой орбитой. Известно, что масса звезды равна $1 M_\odot$. Транзиты наблюдаются с периодом $P = 50.0$ дней и полная продолжительность транзита $t_T = 1.00$ час. Глубина транзита $\Delta = 0.0064$. Максимальная лучевая скорость звезды равна 0.400 м/с.

(T12.9) Найдите радиус орбиты (a) планеты в а.е. и в метрах. 2

(T12.10) Найдите отношение t_F/t_T системы. 2

(T12.11) Получите массу M_p и радиус R_p планеты в массах M_\oplus и радиусах R_\oplus Земли, соответственно. Как Вы думаете, планета каменная или газовая? Поставьте галочку в 8

клетку ROCKY (каменная) или GASEOUS (газовая) в бланке ответов (Summary Answersheet).

Кривая блеска транзита и потемнение к краю:

- (T12.12) Рассмотрим транзит планеты с $i = 90^\circ$ по диску звезды с пятном на экваторе, сравнимым с радиусом планеты R_p . Период вращения звезды равен $2P$. Нарисуйте схематично кривые блеска для 5-ти последовательных транзитов планеты (на специально отведенных местах на бланке ответов (Summary Answersheet)). Поток вне транзита равен 1 для каждого графика. Считайте, что планета не пересекает пятно при первом транзите и пересекает при втором. 4
- (T12.13) До этого мы считали, что поверхностная яркость диска везде одинакова. Однако диски настоящих звезд имеют потемнение к краю. Нарисуйте схематично кривую блеска в этом случае. 2