



# Практический тур

## Инструкция

1. Практический тур длится 150 баллов и оценивается в 4 часа.
2. Для конечных ответов предназначены **бланки итоговых ответов**.  
Ответы следует записывать в соответствующие поля бланков. На каждом таком бланке необходимо подписать код участника (RUS – цифра).
3. Для решения задач потребуются **листы для графиков**.  
На каждом листе подпишите:
  - код участника (RUS – цифра);
  - номер задачи;
  - номер графика и общее число графиков.
4. Для записи решений и черновиков используйте **бланки для решений**.  
На каждом бланке укажите:
  - код участника (RUS – цифра);
  - номер задачи;
  - номер страницы и общее число страниц.
5. Каждую задачу начинайте с нового бланка для решений. Пишите решения только на лицевой стороне бланка. Не пишите на обратной стороне бланка!  
Если вы хотите, чтобы часть написанного вами не оценивалась, зачеркните её крест-накрест.
6. Используйте в решении достаточное количество математических выражений, чтобы сделать их возможно более понятными для членов жюри. Член жюри едва ли знает ваш родной язык. Если необходимо пояснить что-либо словами, используйте короткие фразы (желательно — на английском языке).
7. Запрещается покидать рабочее место без разрешения. Если вам необходима помощь (сломался калькулятор, нужно выйти в туалет, нужны ещё бланки. . . ), привлечите внимание дежурного при помощи сигнальной карточки.
8. Начало и конец тура ознаменуются длинными звуковыми сигналами. Дополнительно будет дан гудок за 15 минут до конца тура.
9. По завершении тура вы должны немедленно прекратить работу. Разложите бланки позадачно в две стопки (D1 и D2). Выносить бумагу запрещено.
10. Оставайтесь за своим столом, пока ваш конверт не заберут. Гид проводит вас.

## Задача 1. Калибровка шкалы расстояний до БМО [75 баллов]

Точной калибровки тригонометрического параллакса галактических цефеид очень трудно добиться на практике, несмотря на долгие исследования. Все известные (в Галактике) классические цефеиды находятся на расстоянии более 250 пк; поэтому, чтобы погрешность определения расстояния не превышала 10%, точность измерения параллакса должна составлять до  $\pm 0.2$  mas (миллисекунд дуги), что требует космических наблюдений. Благодаря спутнику Hipparcos стали известны параллаксы двух сотен ближайших цефеид, но даже лучшие его измерения имеют высокую погрешность. Прорыв последних лет связан с использованием сенсора Fine Guidance на космическом телескопе Хаббла (HST); были получены значения параллаксов (во многих случаях) точнее, чем  $\pm 10\%$  для 10 цефеид, охватывающих диапазон периодов от 3.7 до 35.6 суток, расстояний — от около 300 до 560 пк.

Измеренные значения периода  $P$  и средних звёздных величин в полосах  $V$ ,  $K$  и  $I$  указаны в **Таблице 1**; также указаны  $A_V$  и  $A_K$  — величины поглощения в полосах  $V$  и  $K$  соответственно. Также в таблицу включены результаты измерения параллакса с погрешностью (в миллисекундах дуги). Погрешности измерения видимых звёздных величин пренебрежимо малы.

**Таблица 1**

	$P$ , сут	$\langle V \rangle$ , $m$	$\langle K \rangle$ , $m$	$A_V$ , $m$	$A_K$ , $m$	$\langle I \rangle$ , $m$	$\pi$ , mas	$\Delta\pi$ , mas
RT Aur	3.728	5.464	3.925	0.20	0.02	4.778	2.40	0.19
FF Aql	4.471	5.372	3.465	0.64	0.08	4.510	2.81	0.18
X Sgr	7.013	4.556	2.557	0.58	0.07	3.661	3.00	0.18
$\zeta$ Gem	10.151	3.911	2.097	0.06	0.01	3.085	2.78	0.18
l Car	35.551	3.732	1.071	0.52	0.06	2.557	2.01	0.20

**D1.1 [36.5 баллов]** Между периодом и светимостью цефеид существует соотношение  $L \propto P^\beta$ . Обычно его выражают через период и абсолютную звёздную величину (вместо светимости) цефеид. Здесь и далее для соотношения «период — абсолютная звездная величина» мы будем использовать сокращение «PL».

Используя данные Таблицы 1, постройте линеаризованный график, чтобы исследовать PL-зависимость для полос  $V$  и  $K$ . Каждый график необходимо строить на отдельном листе миллиметровки. Определите коэффициент наклона прямой, лучше всего описывающей эту линейную зависимость. (Может быть, вы найдёте полезной формулу  $\Delta(\lg x) \approx \frac{\Delta x}{x \ln 10}$ .)

Видимые различия между PL-зависимостями в разных полосах связаны с различиями в цвете, т. е. фактически это PLC-зависимость («период — светимость — цвет»), что

объясняется эффектом межзвёздного покраснения, который обусловлен зависимостью коэффициента поглощения от длины волны света, который может существенно различаться у разных цефеид из-за их разной металличности, межзвёздной среды и пыли на луче зрения.

Звёздную величину, исправленную на покраснение (или соответствующую расчётную полосу) называют *Wesenheit*. Чтобы внести необходимую поправку, вместо информации о поглощении используют сведения о цвете самой звезды, например, расчёт величины  $W_{VI}$  использует фотометрию в полосах  $V$  и  $I$ :

$$W_{VI} = V - \left[ \frac{A_V}{E(V-I)} \right] (V - I) = V - R_V(V - I),$$

где  $R_V$  зависит от вида закона поглощения. В нашем случае положим  $R_V = 2.45$ .

**D1.2 [14.5 баллов]** По данным Таблицы 1 постройте график и получите исправленное на поглощение соотношение PL, используя величину  $W_{VI}$ . Оцените коэффициент наклона графика и его погрешность.

**D1.3 [24.0 балла]** Теперь с помощью исправленной PL-зависимости, полученной в предыдущем пункте, можно оценить расстояние до Большого Магелланова Облака. В Таблице 2 представлены периоды, исправленные на поглощение средние видимые звёздные величины  $\langle V_{\text{corr}} \rangle$  и соответствующие *Wesenheit*  $W_{VI}$  для классических цефеид в БМО.

Оцените модуль расстояния  $\mu$  для каждой из звёзд и определите расстояние до БМО (в парсеках) и его стандартное отклонение для обеих полос. Определите, являются ли полученные расстояния для этих двух полос статистически различными (YES/NO). Различны ли стандартные отклонения этих расстояний (YES/NO)? Основываясь на полученных данных, укажите, какая из полос ( $V$  или *Wesenheit*) позволила точнее определить расстояние до БМО?

Таблица 2

	$P$ , сут	$\langle V_{\text{corr}} \rangle$ , $m$	$\langle W_{VI} \rangle$ , $m$
HV12199	2.63	16.08	14.56
HV12203	2.95	15.93	14.40
HV12816	9.10	14.30	12.80
HV899	30.90	13.07	10.97
HV2257	39.36	12.86	10.54

 - **(D1) Калибровка шкалы расстояний до БМО [75 баллов]**

(D1.1) Рассчитайте необходимые величины (запишите их названия во второй строке таблицы внизу) для каждой из звёзд, чтобы построить и исследовать PL-соотношение, используя **листы для графиков**.

	Ось X	Ось Y (V band)	$\Delta Y$ (V band)	Ось Y (K band)	$\Delta Y$ (K band)	Промежут. величина (если есть)	Промежут. величина (если есть)
<b>Величина</b>							
RT Aur							
FF Aql							
X Sgr							
$\zeta$ Gem							
l Car							

Постройте графики на отдельных листах для графиков.

Коэффициент наклона и погрешность, полоса V ..... +/- .....

Коэффициент наклона и погрешность, полоса K ..... +/- .....

(D1.2) Рассчитайте необходимые величины (запишите их названия во второй строке таблицы внизу) для каждой из звёзд, чтобы построить и исследовать PL-соотношение, используя **листы для графиков**.

	$W_{VI}$	Y-Axis	$\Delta Y$	Промежут. величина (если есть)	Промежут. величина (если есть)
<b>Величина</b>	$W_{VI}$				
RT Aur					
FF Aql					
X Sgr					
$\zeta$ Gem					
l Car					

Постройте график на отдельном листе для графика.

Коэффициент наклона и погрешность, полоса **Wesenheit** ..... +/- .....

 - 

(D1.3)

Звезда	$\mu_V$	$\mu_{WVI}$	V расстояние, пк	$W_{VI}$ расстояние, пк
HV12199				
HV12203				
HV12816				
HV899				
HV2257				
Среднее				
Стандартное отклонение				

Являются ли полученные расстояния для полос V и Wesenheit статистически различными (YES/NO)?

.....

Различны ли стандартные отклонения этих расстояний (YES/NO)?

.....

Какая из полос позволила точнее определить расстояние до БМО (V or  $W_{VI}$ )?

.....

## Задача 2. В поисках тёмной материи

[75 баллов]

Галактики низкой поверхностной яркости — Low Surface Brightness (LSB) — диффузные галактики с поверхностной яркостью, которая при земных наблюдениях по крайней мере на  $1^m$  слабее фоновой яркости ночного неба.

Некоторая доля их материи относится к барионному типу, это, например, нейтральный водород и звёзды. Однако, большая часть вещества невидима и называется «тёмной материей». В этой задаче вы исследуете массу тёмной материи в галактике, её влияние на кривую вращения и распределение по галактике.

В таблице ниже представлены данные, касающиеся LSB-галактики UGC4325. Предположим, что галактика наблюдается с ребра. Для каждого из указанных расстояний от центра галактики измерены:

1.  $\lambda_{\text{obs}}$  — наблюдаемая длина волны эмиссионной линии  $\text{H}\alpha$ . Поправка на хаббловское расширение Вселенной уже осуществлена.
2.  $V_{\text{gas}}$  — вклад газовой компоненты во вращение галактики, обусловленный массой газа  $M_{\text{gas}}$ , определяемой по поверхностной плотности  $\text{HI}$ .
3.  $V_*$  — вклад звёздной компоненты во вращение галактики, обусловленный массой звёзд  $M_*$ , определяемой по фотометрии в полосе  $R$ .

Скорости вращения пробной частицы под влиянием газовой ( $V_{\text{gas}}$ ) и звёздной ( $V_*$ ) компонент определяются как скорости в плоскости галактики, которые обеспечили бы заданной компонентой в отсутствие внешних возмущений. Эти скорости получены из наблюдаемого распределения барионной материи.

$r$ , кпк	$\lambda_{\text{obs}}$ , нм	$V_{\text{gas}}$ , км/с	$V_*$ , км/с
0.70	656.371	2.87	20.97
1.40	656.431	6.75	32.22
2.09	656.464	14.14	40.91
2.79	656.475	20.18	46.75
3.49	656.478	24.08	50.10
4.89	656.484	28.08	47.94
6.25	656.481	29.25	45.47
7.10	656.481	27.03	47.78
9.03	656.482	25.90	45.32
12.05	656.482	21.03	42.30



# Практический тур

Стр. 2 из 3

Масса тёмной материи  $M_{\text{DM}}(r)$  в объёме радиуса  $r$  может быть выражена через вклад этой компоненты в скорость вращения галактики  $V_{\text{DM}}$ , радиус  $r$  и гравитационную постоянную  $G$ ,

$$M_{\text{DM}}(r) = \frac{rV_{\text{DM}}^2}{G}. \quad (1)$$

Для лучшей оценки наблюдаемая скорость вращения  $V_{\text{obs}}$  представляется как

$$V_{\text{obs}}^2 = V_{\text{gas}}^2 + V_*^2 + V_{\text{DM}}^2 \quad (2)$$

и зависит от массы  $M(r)$ , заключённой в объёме радиуса  $r$ , измеряемого от центра галактики.

Плотность тёмной материи  $\rho_{\text{DM}}$  в этом объёме может быть представлена в виде профиля плотности

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \frac{\rho_0}{1 + \left(\frac{r}{r_C}\right)^2}, \quad (3)$$

где  $\rho_0$  и  $r_C$  — центральная плотность и радиус ядра галактики соответственно. Согласно этой модели, масса  $M_{\text{DM}}$  в пределах рассмотренного объёма есть

$$M_{\text{DM}}(r) = 4\pi\rho_0r_C^2 \left( r - r_C \arctan \frac{r}{r_C} \right). \quad (4)$$

## Масса тёмной материи и кривые вращения галактики

**D2.1 [21 балл]** В земных лабораториях  $\text{H}_\alpha$  имеет длину волны  $\lambda_{\text{emit}} = 656.281$  нм. Вычислите наблюдаемую скорость вращения галактики  $V_{\text{obs}}$  и компоненту скорость вращения, вызванную наличием тёмной материи,  $V_{\text{DM}}$  на расстоянии  $r$  в км/с.

Для различных значений  $r$ , приведённых в таблице, рассчитайте динамическую массу  $M(r)$  и массу тёмной материи  $M_{\text{DM}}(r)$  в солнечных массах.

**D2.2 [16 баллов]** Получите кривые вращения галактики на листах для графиков, построив графики зависимостей  $V_{\text{obs}}$ ,  $V_{\text{DM}}$ ,  $V_{\text{gas}}$ ,  $V_*$  от радиуса  $r$  и проведя гладкие кривые через отмеченные точки (поставьте свой график как D2.2).

Расположите вклады различных компонент в наблюдаемую скорость  $V_{\text{obs}}$  в порядке убывания.

## Распределение тёмной материи

**D2.3 [7 баллов]** Оцените  $\rho_0$  и  $r_C$ , взяв точки при малых и при больших  $r$ . Обратите внимание, что если  $x$  велико, то  $\arctan x \approx \pi/2$ , а если мало, то  $\arctan x \approx x - x^3/3$ .



## Практический тур

Стр. 3 из 3

**D2.4 [19 баллов]** При сравнении уравнения (4) с линейной функцией становится понятно, что центральная плотность  $\rho_0$  может также быть найдена методом линейной аппроксимации. Нарисуйте соответствующий график так, чтобы проведённая прямая могла быть использована для нахождения значения  $\rho_0$ . Выразите  $\rho_0$  в  $M_\odot/\text{кпк}^3$  (пометьте свой график как D2.4). Если вы не можете найти  $r_C$  из предыдущей части, используйте  $r_C = 3.2$  кпк в качестве оценочного значения.

**D2.5 [12 баллов]** Рассчитайте логарифм плотности тёмной материи,  $\ln[\rho_{\text{DM}}(r)]$ , и постройте график распределения тёмной материи в галактике как функцию радиуса  $r$  на листе для графиков (пометьте свой график как D2.5).





--	--	--	--	--

**(D2) В поисках тёмной материи [75 баллов]**

(D2.1)	$r$ (кpc)	$V_{\text{obs}}$ (km/s)	$V_{\text{DM}}$ (km/s)	$M(r)$ ( $M_{\odot}$ )	$M_{\text{DM}}(r)$ ( $M_{\odot}$ )																					
	0.70																									
	1.40																									
	2.09																									
	2.79																									
	3.49																									
	4.89																									
	6.25																									
	7.10																									
	9.03																									
	12.05																									
(D2.2) Порядок вкладов	.....>.....>.....																									
(D2.3) Радиус ядра $r_C$	.....:																									
Центральная плотность $\rho_0$	.....:																									
(D2.4)	<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center; padding: 5px;"><math>x =</math> .....</td> <td style="width: 50%; text-align: center; padding: 5px;"><math>y =</math> .....</td> </tr> <tr><td style="height: 15px;"></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 15px;"></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 15px;"></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 15px;"></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 15px;"></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 15px;"></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 15px;"></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 15px;"></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 15px;"></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 15px;"></td><td></td></tr> </table>				$x =$ .....	$y =$ .....																				
$x =$ .....	$y =$ .....																									
Коэффициент наклона	.....:																									
Центральная плотность $\rho_0$	.....:																									



<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	-	<input type="text"/>
----------------------	----------------------	----------------------	---	----------------------

(D2.5)

$r$ (кпк)	$\ln[\rho_{DM}(r)]$
0.70	
1.40	
2.09	
2.79	
3.49	
4.89	
6.25	
7.10	
9.03	
12.05	