

## Задачи покороче [25 баллов]

### 1. Стражи Галактики

Время ночного караула в легионах Древнего Рима делилось на 4 стражи («вигилии»). Две вигилии — от заката до полуночи, ещё две — от полуночи до восхода. Будем считать, что вигилии равны по длине для заданных суток.

- Во сколько раз отличаются продолжительности вигилий в течение года для широты Рима ( $41^\circ 54'$  с.ш.)?
- В какой день длительность вигилий составляет  $3/4$  от максимальной?

### 2. В пятом доме

31 января астероид покрыл звезду  $\delta$  Сnc ( $\alpha_0 = 8^h 45^m$ ,  $\delta_0 = 18^\circ 05'$ ). Будем считать, что он находится на круговой орбите радиуса 3.00 а.е., лежащей в плоскости эклиптики. Оцените геоцентрические экваториальные координаты этого астероида через 666 дней.

### 3. Гладкое многообразие

Одна из спиральных галактик в скоплении галактик имеет видимую звёздную величину  $+16.0^m$  и максимальную скорость вращения в диске 210 км/с. Эллиптическая галактика того же скопления имеет видимую звёздную величину  $+15.5^m$  и дисперсию скоростей 230 км/с. Максимальная скорость вращения диска Млечного Пути составляет 240 км/с, абсолютная звездная величина —  $-21^m$ . Оцените светимость эллиптической галактики с дисперсией скоростей 172 км/с.

### 4. Летучая звезда

Сегодня звезда R имеет галактические координаты  $b_1 = -46^\circ 01'$ ,  $l_1 = 37^\circ 36'$ , а через 18 тысяч лет они станут равны  $b_2 = -47^\circ 51'$ ,  $l_2 = 36^\circ 29'$ .

- Вычислите среднее собственное движение этой звезды за указанный промежуток времени.
- Когда и на каком минимальном угловом расстоянии звезда R находилась (или будет находиться) от точки с координатами  $b_0 = -48.00^\circ$ ,  $l_0 = 35.00^\circ$ ?

### 5. Раз эллипс, два эллипс

Предположим, что некоторый космический аппарат находится у планеты-сироты с земными параметрами на круговой орбите радиусом 7.00 тыс. км. Этот КА нужно перевести на круговую орбиту радиусом 100.00 тыс. км.

Насколько энергетически выгодней осуществить переход по гомановскому эллипсу, чем по биэллиптической траектории с радиусом промежуточной орбиты 80.00 тыс. км?

### 6. По непрерывности

В некотором городе Солнце взошло на  $\Delta t = +59.4^s$  позже, чем накануне, причём азимут восхода изменился на  $\Delta A = -15' 58.4''$ , а склонение Солнца за эти сутки возросло на  $\Delta \delta = +21' 27.1''$ .

Пренебрегая атмосферной рефракцией, понижением горизонта, суточным параллаксом и видимыми угловыми размерами Солнца, определите местное время восхода, дату и широту места наблюдения.

### 7. Глаз Змеи

Отважному разведчику Васе поручено ответственное задание: выяснить, на какой частоте работает наземная антенна, используемая рептилоидами для связи со своей космической станцией. К сожалению, Вася не смог раздобыть техническую документацию к антенне, но узнал, что с помощью этой антенны рептилоиды случайно зафиксировали вспышку далекого космического радиоисточника со следующими параметрами:

расстояние до Земли 5.0 кпк;  
 радиус источника 0.1 а.е.;  
 яркостная температура  $1.1 \times 10^{14}$  К;  
 плотность потока на рабочей частоте 50 Ян.

- Помогите Васе выполнить миссию и по имеющимся данным рассчитать рабочую частоту антенны рептилоидов.
- Оцените разрешающую способность антенны, если известно, что её диаметр составляет 30 м, а также минимально возможную продолжительность вспышки такого радиоисточника.

### 8. Космопаровоз

Космический паровоз «ИС-2к» обращается вокруг космического вокзала массой  $0.1 M_\odot$  по эллиптической орбите. Известно, что вокзалоцентрическое расстояние паровоза превышает 0.3 а.е. в течение 75% орбитального периода, а отношение пери- и аповокзальной скоростей равно 9.

Каков период обращения космопаровоза?

### 9. Люминя кусок

Оцените амплитуду колебаний температуры абсолютно чёрного спутника Земли, обращающегося по низкой экваториальной орбите. Принять массу спутника равной 1000 кг, характерный размер — 1 м, среднюю удельную теплоёмкость — 880 Дж/(кг · К).

Подсказка:  $\int \frac{dt}{a-bt^4} = \frac{\ln(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{bt}) - \ln(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{bt}) + 2 \arctan \frac{\sqrt[4]{bt}}{\sqrt[4]{a}}}{4a^{3/4} \sqrt[4]{b}} + \text{const} \quad (a, b > 0)$ .

**А. Яркий спутник**

Время от времени одна из антенн спутника связи группировки «Иридиум» отражает солнечные лучи на поверхность Земли, создавая блик диаметром около 10 км, движущийся по поверхности планеты. Для земного наблюдателя это выглядит как плавное появление и последующее плавное исчезновение ярчайшей звезды. Явление продолжается менее минуты. Некоторые вспышки «Иридиумов» достигают  $-9.5^m$  и могут наблюдаться даже днём.

Оцените размер антенны спутника и максимально возможную продолжительность вспышки, если известно, что орбиты группировки полярные с наклоном  $86.4^\circ$  и высотой около 780 км.

**В. Полный распад**

Найдите ограничения на энергию антинейтрино, возникающего в процессе распада свободного нейтрона.

**С. Црвена звезда**

Рассмотрим звезду массой  $2M_\odot$  на космологическом смещении  $z = 1.5$ .

1. Оцените её видимый показатель цвета ( $B - V$ ).
2. Определите диапазон  $z$ , соответствующих возможным эпохам рождения указанной звезды.

Излучение звезды считать чернотельным, поглощением пренебречь.

**Задачи подлиннее [50 баллов]****D. Большой магнит**

Двойная система состоит из звезды главной последовательности и белого карлика массами  $M_* = 5M_\odot$  и  $M = 1.3M_\odot$  соответственно, движущихся по круговым орбитам с периодом обращения  $P = 24.0$  сут.

Звезда главной последовательности изотропно испускает звёздный ветер с темпом  $\dot{M}_* = 5 \times 10^7$  г/с. Его можно считать потоком частиц, движущихся прямолинейно и равномерно со скоростью  $v_w = 200$  км/с.

Индукция дипольного магнитного поля белого карлика в сферических координатах описывается следующим образом:

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = \frac{2\mu \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta,$$

где  $r$  — расстояние от центра белого карлика,  $\theta$  и  $\varphi$  — полярный и азимутальный углы,  $\vec{e}_r$  и  $\vec{e}_\theta$  — единичные орты вдоль соответствующих координатных осей,  $\mu \equiv BR^3/2$  — величина дипольного магнитного момента белого карлика. В последнем выражении  $B = 10$  Тл — индукция магнитного поля на полюсе,  $R = 6000$  км — радиус белого карлика.

1. Найдите радиус захвата газа белым карликом  $R_G$  в предположении, что всё вещество внутри этого радиуса свободно падает на него.
2. Вычислите темп аккреции на белый карлик  $\dot{M}$ .
3. Определите форму магнитопаузы — поверхности, на которой сравниваются магнитное давление  $p_m = B^2/(2\mu_0)$  и давление набегающего потока плазмы  $p_r = \rho v^2/2$ . Схематично изобразите меридиональный срез магнитопаузы.
4. Оцените температуру полярной шапки белого карлика  $T$ , считая, что полюса светятся за счёт чернотельного излучения вследствие полного преобразования кинетической энергии падающего на них вещества; плазма движется к полюсам по силовым линиям магнитного поля.

*Указание.* Магнитное поле оказывает давление в направлении, перпендикулярном вектору индукции. Давлением излучения в рамках данной задачи разрешается пренебречь.

**Е. Общая теория безотносительности**

В 1980 году Богданом Пачинским и Полом Виита было предложено простое выражение, аппроксимирующее потенциал гравитационного поля невращающейся незаряженной чёрной дыры заданной массы  $M$ :

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{r - r_g},$$

где  $r_g$  — радиус Шварцшильда. В рамках такой модели вполне сносно описываются некоторые феномены ОТО. С чёрными дырами шутки плохи!

*Часть 1*

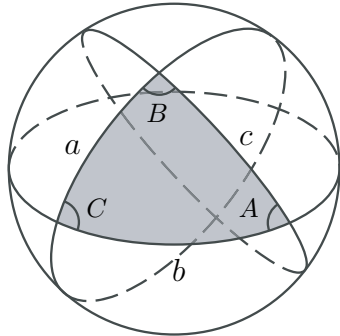
1. Запишите выражение для полной удельной энергии  $E$  материальной точки, движущейся в потенциале  $\varphi(r)$ . Ответ выразите через  $M$ ,  $r$ ,  $r_g$ , лучевую  $v_r$  и угловую  $\omega$  скорости точки относительно центра тяготения.
2. Понижьте размерность задачи, выразив  $\omega$  через удельный момент импульса  $L$  и подставив в полученное ранее выражение для  $E$ .
3. Не зависящую от скорости компоненту  $E$  можно трактовать как эффективную удельную потенциальную энергию  $\psi(r)$  в одномерной задаче. Постройте качественный график зависимости  $\psi(r)$  при  $r_g \rightarrow 0$ .
4. Установите условия, при которых круговая орбита может существовать и быть стабильной в потенциале  $\psi(r)$ , и определите минимальный возможный радиус  $r_{\min}$  стабильной круговой орбиты.
5. Какое покраснение испытает фотон, излучаемый объектом, обращающимся по орбите радиуса  $r_{\min}$ ?

*Часть 2*

6. Найдите выражение для скорости  $v_1$  движения по орбите радиуса  $r$  и период  $T$  обращения по такой орбите, а также скорость убегания  $v_2$  с такого расстояния.
7. Найдите первые поправки (при  $r_g/r \rightarrow 0$ ) к  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $T$  в сравнении с кулоновским потенциалом  $\varphi_0 = -GM/r$ .
8. Какое покраснение испытает фотон, излучаемый объектом, обращающимся по орбите радиуса  $r_{\min}$ ?

## Справочные данные

Скорость света в вакууме	$c$	$= 2.998 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$
Гравитационная постоянная	$G$	$= 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
Постоянная Планка	$h$	$= 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Элементарный электрический заряд	$e$	$= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Постоянная Больцмана	$k_B$	$= 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	$= 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$
Магнитная постоянная	$\mu_0$	$= 12.566 \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}$
Постоянная тонкой структуры	$\alpha$	$= 7.297 \cdot 10^{-3} \simeq 1/137$
Атомная единица массы (дальтон)	1 Да	$= 1.661 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Электрон-вольт	1 эВ	$= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$
Боровский радиус	$r_B$	$= 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Постоянная Авогадро	$N_A$	$= 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	$\mathfrak{R}$	$= 8.314 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$
Стандартная атмосфера	1 атм	$= 101\,325 \text{ Па}$
Градус Цельсия	[°C]	$= [\text{K}] - 273.15$
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma$	$= 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$
Постоянная Вина	$b$	$= 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Астрономическая единица длины	1 а. е.	$= 149.6 \cdot 10^6 \text{ км} = 499 \text{ с} \cdot c$
Радиус Земли экваториальный	$R_{\oplus}^e$	$= 6\,378 \text{ км}$
Радиус Земли полярный	$R_{\oplus}^p$	$= 6\,357 \text{ км}$
Радиус Земли средний	$R_{\oplus}$	$= 6\,371 \text{ км}$
Наклон экватора Земли к эклиптике	$\epsilon$	$= 23.44^\circ$
Световой год	1 ly	$= 9.46 \cdot 10^{15} \text{ м}$
Парсек	1 пк	$= 206\,265 \text{ а. е.} = 3.26 \text{ ly}$
Постоянная Хаббла	$H_0$	$= 68 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$



Сферическая теорема синусов

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C};$$

Сферическая теорема косинусов

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A;$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Расстояние до центра Галактики	$r_{\odot}$	$= 8 \text{ кпк}$
Светимость Солнца	$L_{\odot}$	$= 3.88 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
Видимая звёздная величина Солнца	$m_{\odot}$	$= -26.7^m$
Абсолютная звёздная величина Солнца	$M_{\odot}$	$= +4.7^m$
Показатель цвета Солнца	$(B - V)_{\odot}$	$= +0.67^m$
Эффективная температура Солнца	$T_{\odot}$	$= 5800 \text{ К}$
Солнечная постоянная	$E_{\odot}$	$= 1360 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2}$
Эксцентриситет орбиты Луны	$e_{\zeta}$	$= 0.055$
Наклонение орбиты Луны	$i_{\zeta}$	$= 5.15^\circ$
Проницающая способность глаза		$= 6^m$
Разрешающая способность глаза		$= 1'$
Диаметр зрачка глаза в темноте		$= 6 \text{ мм}$

Название	Энергия покоя		Заряд	Спин	
Фотон	0		0	1	
Электрон $e$	0.51	МэВ	-1	1/2	
Электронное нейтрино $\nu_e$	< 2.2	эВ	0	1/2	
Протон $p$	[uud]	938.2	МэВ	+1	1/2
Нейтрон $n$	[udd]	939.5	МэВ	0	1/2

	Большая полуось, а. е.	Эксцентриситет	Наклонение к эклиптике	Период обращения
♿ Меркурий	0.3871	0.2056	7.004°	87.97 сут.
♀ Венера	0.7233	0.0068	3.394°	224.70 сут.
⊕ Земля	1.0000	0.0167	0.000°	365.26 сут.
♂ Марс	1.5237	0.0934	1.850°	686.98 сут.
♃ Юпитер	5.2028	0.0483	1.308°	11.862 лет
♄ Сатурн	9.5388	0.0560	2.488°	29.458 лет
♅ Уран	19.1914	0.0461	0.774°	84.01 лет
♆ Нептун	30.0611	0.0097	1.774°	164.79 лет