



Теоретический тест

1. Гольф на карликовой планете (15 баллов)

И. Утешев

Один бритый англичанин очень любит играть в космический гольф. Стоя на южном полюсе Цереры, он ударил по мячу так сильно, что тот улетел вертикально вверх со скоростью $v_0 = 0.48$ км/с. После разворота мяч угодил прямоком в спутник-лунку, обращающийся вокруг Цереры по круговой орбите высотой $h = 3000$ км. С каким упреждением по времени был произведён этот удар? Радиус Цереры $r = 473$ км, ускорение свободного падения на её поверхности $g = 0.28$ м/с².

2. Волк и Лев (25 баллов)

И. Утешев

α Волка тусклее Регула и Денеболы, но в России её не видно. . .

В таблице справа приведены экваториальные координаты
ярчайших звёзд двух созвездий — Волка и Льва.

Звезда	Dec	RA
α Lupi	$-47^\circ 23'$	$14^h 42^m$
α Leonis	$+12^\circ 00'$	$10^h 08^m$

- В каком диапазоне широт Φ можно *в принципе* наблюдать обе эти звезды?
- В каком диапазоне широт Ψ можно наблюдать обе эти звезды *одновременно*?
- Какова максимально возможная сумма H высот этих двух звёзд для произвольного земного наблюдателя?
- На какой широте (широтах) достигается максимум суммы из пункта (с)?
- Какие углы с горизонтом и с небесным экватором составляет большой круг, проходящий через α Lupi и α Leo, в момент достижения максимума суммы из пункта (с) на широте (широтах) из пункта (d)?

Атмосферной рефракцией и поглощением пренебречь.

3. Точка прикосновения (15 баллов)

И. Утешев

Прогулочный солнечный парус «Комфорт-11» был «припаркован» на земной орбите, опережая Землю в орбитальном движении на $\zeta = 30.3^\circ$. Через пять месяцев разница гелиоцентрических долгот Земли и паруса уменьшилась до $\varepsilon = 23.5^\circ$, и аппарат отправился к Венере, которая в это время наблюдалась с Земли в максимальной восточной элонгации.

- За какое минимальное время парус может достичь орбиты Венеры?
- На каком расстоянии от Венеры он будет находиться в этот момент?

Считать, что орбиты планет круговые и лежат в одной плоскости, и что раскрытый парус во всякий момент времени ориентирован перпендикулярно направлению на Солнце. Временем, затрачиваемым на сворачивание и раскрытие паруса, а также гравитационным взаимодействием с планетами пренебречь.

4. Сверхтонкое расщепление (20 баллов)

И. Утешев

Распределение водорода в нашей галактике было исследовано и нанесено на карту посредством наблюдений в радиолнии нейтрального водорода HI. Радиоволны хорошо проникают толщу межзвёздной пыли, поэтому карта этого распределения оказывается куда более подробной, чем, например, карта распределения звёзд, чьё излучение практически не проникает сквозь пылевые облака.

Существование линии HI обусловлено магнито-дипольным взаимодействием электрона и протона: обе эти частицы имеют *спин* — квантовомеханический аналог момента импульса — $s = \frac{1}{2}$ и заряд $\pm e$, и потому обладают магнитным моментом. Полная энергия атома зависит от взаимной ориентации спинов электрона и протона. Такое расщепление основного уровня энергии атома называют *сверхтонким*.

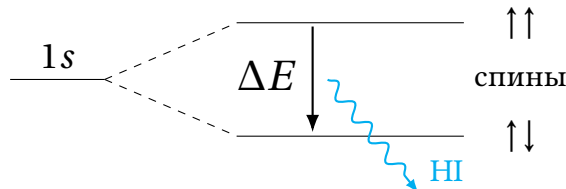


Рис. 1: Сверхтонкая структура водорода

Рассмотрим полуклассическое движение электрона вокруг протона. Как известно, орбитальный момент импульса электрона квантуется: $L = n\hbar$, где $n \geq 1$ — номер уровня. Также известно, что дипольный магнитный момент плоского витка с током $M = IS$, где I — сила тока, текущего через виток, а S — площадь витка.

- (а) Орбитальный магнитный момент атома водорода в основном состоянии μ_B называется *магнетон Бора* и является элементарным магнитным моментом. Запишите выражение для μ_B и вычислите эту величину.

Собственные (спиновые) магнитные моменты электрона и протона выражаются через магнетон Бора следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_e &= g_e s \mu_B, & g_e &= 2.00; \\ \mu_p &= g_p \frac{m_e}{m_p} \mu_B, & g_p &= 2.79. \end{aligned}$$

Поле, создаваемое магнитным диполем \vec{d} в точке с радиусом-вектором \vec{r} , и потенциальная энергия магнитного диполя $\vec{\mu}$ в магнитном поле с индукцией \vec{B} даются соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{d}) - r^2 \vec{d}}{r^5}; \\ U &= -(\vec{\mu}, \vec{B}). \end{aligned}$$

- (b) Считая, что спины частиц ориентированы нормально к плоскости орбитального движения электрона, найдите абсолютную величину ΔE_M энергии электрона в магнитном поле протона (в эВ).

Точный квантовомеханический расчёт показывает, что значение ΔE_M в действительности в $\frac{16}{3}$ раз больше.

- (c) Вычислите длину волны λ и частоту ν квантов, излучаемых при переходе между уровнями сверхтонкой структуры, с точностью до 3 значащих цифр.

Верхний из уровней сверхтонкой структуры оказывается *метастабильным*: вероятность перехода самопроизвольного перехода в единицу времени составляет $A = 2.9 \cdot 10^{-15} \text{ с}^{-1}$.

- (d) Сколько миллионов лет составляет характерное время жизни атома водорода в возбуждённом состоянии $1s_{\uparrow\uparrow}$?
- (e) Получите оценку сверху на мощность спонтанного излучения всего нейтрального водорода Млечного Пути, если его [водорода] полная масса составляет $\mathcal{M} \sim 10^{10} \mathcal{M}_\odot$.

5. Именуемая первой (25 баллов)

В. Григорьев, И. Утешев ^{доп.}

Вега — ярчайшая в созвездии Лиры и пятая по яркости среди всех звёзд ночного неба, стала первой после Солнца звездой, запечатлённой на фотографии и исследованной спектроскопически (спектральный класс A0V), а также одной из первых звёзд, расстояние до которых было определено методом параллакса: $d = 7.68$ пк.

(a) Оцените массу Веги M .

В случае вращения с постоянной угловой скоростью ω самогравитирующего жидкого тела с однородным распределением плотности ρ , оно принимает форму сфероида Маклорена. Такой сфероид образован вращением эллипса вокруг малой оси, причём для эксцентриситета e эллипса справедливо уравнение:

$$\frac{\omega^2}{\pi G \rho} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e^3} (3-2e^2) \arcsin e - \frac{6}{e^2} (1-e^2) \equiv f(e).$$

Вега очень быстро вращается вокруг своей оси. Скорость вращения на экваторе составляет $v_e = 236$ км/с. В настоящее время звезда наблюдается с Земли почти с полюса; её наблюдаемый радиус $R_e = 2.82R_\odot$.

(b) Максимальную допустимую угловую скорость сфероида Маклорена можно выразить как $\omega_{\max} = \alpha \sqrt{G\rho}$. Рассчитайте коэффициент α с точностью до 3 значащих цифр.

Подсказка. $f(e)$ имеет единственный максимум при $e \in (0, 1]$.

(c) Определите полярный радиус Веги R_p , считая применимой модель сфероида Маклорена.

В действительности температура фотосферы Веги неоднородна: максимум ($T_p = 10060$ К) достигается на полюсе звезды, минимум ($T_e = 8150$ К) — на экваторе.

(d) Оцените звёздную величину Веги для земного наблюдателя, если бы её ось вращения была расположена в картинной плоскости.

6. Через тернии к Солнцу (30 баллов)

А. Акинъщиков

Космический аппарат запускают в направлении орбитального движения Земли с третьей космической скоростью. При ближайшем пересечении орбиты Юпитера аппарат совершает гравитационный манёвр. Дата и время вылета с Земли выбраны таким образом, чтобы минимизировать скорость аппарата после манёвра.

(a) Найдите эксцентриситет орбиты и минимальное расстояние до Солнца после манёвра.

(b) Через какое время после вылета аппарат достигнет наиболее близкой к Солнцу точки?

(c) До какой максимальной температуры может нагреться аппарат в перицентре орбиты, если его можно рассматривать как абсолютно серое тело с альбедо 0.5?

(d) Вычислите продолжительность полёта аппарата от Земли к Юпитеру.

(e) Найдите ближайшую дату возможного вылета с Земли.

(f) Незадолго до вылета с Земли было принято решение использовать гравитационный манёвр для полёта не к Солнцу, а от него. Определите эксцентриситет орбиты аппарата после оптимального (максимизирующего скорость) манёвра и его скорость при вылете из Солнечной системы.

Эклиптическая долгота Юпитера в 0^h UT 04.07.2019 составила 266.0°. Орбиты планет считать круговыми.

7. Букет пионов (15 баллов)

И. Утешев

Нейтральный пион π^0 был обнаружен на три года позже своих заряженных «собратьев», поскольку сам по себе не оставляет следов в фотоэмульсии. Его время жизни составляет всего $8.5 \cdot 10^{-17}$ с, а наиболее вероятный (почти 99%) канал распада — двухфотонный:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma.$$

Для «мономатического» пучка π^0 (с некоторой энергией частиц) был исследован энергетический спектр фотонов распада; энергия зарегистрированных фотонов изменялась от $E_1 = 4.00$ МэВ до $E_2 = 1.14$ ГэВ. Определите массу m нейтрального пиона и оцените длину L пучка.

8. No more dark energy! (30 баллов)

А. Акинъщиков

Уравнение Фридмана для энергии однородной изотропной Вселенной представимо в виде:

$$H^2 = H_0^2 \cdot (\Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{c,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0}).$$

Здесь Ω_r , Ω_m , Ω_c , Ω_Λ — безразмерные плотности излучения (и релятивистской материи), нерелятивистской материи, кривизны пространства и тёмной энергии соответственно; H — постоянная Хаббла, a — масштабный фактор. Индекс “0” соответствует текущей эпохе.

По современным представлениям Вселенная — плоская; плотность тёмной энергии $\Omega_{\Lambda,0} = 0.685$; постоянная Хаббла $H_0 = 68$ (км/с)/Мпк; плотность энергии реликтовых нейтрино пропорциональна плотности энергии реликтовых фотонов: $\rho_\nu \approx 0.69\rho_\gamma$.

Будем считать, что эволюция Вселенной определяется доминирующим компонентом.

- Определите диапазоны красных смещений z , на которых доминировали излучение, нерелятивистская материя и тёмная энергия.
- Рассчитайте современные возраст Вселенной и радиус причинно-связной области.
- Определите возраст Вселенной для каждого из красных смещений, полученных в пункте (а).
- В 1929 году Хаббл получил оценку $H_0 \approx 500$ (км/с)/Мпк. Найдите возраст Вселенной и красное смещение в эпоху, когда постоянная Хаббла действительно имела такое значение.
- Вселенная достоверно является плоской лишь с некоторой точностью: $|\Omega_{c,0}| < 0.006$. Определите, на каком z относительный вклад кривизны мог быть максимальным, и какой величины он мог достигать.

Рассмотрим модель плоской Вселенной без тёмной энергии с таким же соотношением между плотностью излучения и плотностью материи, что и в нашей Вселенной.

- Вычислите текущее значение возраста Вселенной для этой модели.
- Найдите возраст Вселенной в момент, когда вклады материи и излучения были одинаковыми. Чему было равно значение постоянной Хаббла в ту эпоху?

Указание.
$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^{-2} + bx^{-1}}} = \frac{2x(bx - 2a)}{3b^2} \sqrt{ax^{-2} + bx^{-1}} + \text{const.}$$

9. Подоконник (15 баллов)*М. Ткачев, И. Утешев^{реш.}*

Спутник обращается вокруг Земли по низкой экваториальной круговой орбите с запада на восток. Наблюдатель из Аделаиды установил, что в 8:00 4 июля этот спутник находился в верхней кульминации на высоте $+20^\circ$. Во сколько венгерский астроном из Кестхея зафиксирует ближайшее пересечение спутником меридиана этого города и на какой высоте над горизонтом?

	Аделаида	Кестхей
Страна	Австралия	Венгрия
Широта	$34^\circ 56'$ ю. ш.	$46^\circ 46'$ с. ш.
Долгота	$138^\circ 35'$ в. д.	$17^\circ 16'$ в. д.
Население	1.33 млн чел.	20 тыс. чел.
Часовая зона	UT+9:30 летом +10:30	UT+1:00 летом +2:00

10. Пыль в глаза (20 баллов)*А. Акинъщиков*

Для некоторой звезды главной последовательности была определена яркостная температура в центрах полос U ($\lambda_U = 365$ нм) и R ($\lambda_R = 658$ нм): $T_U = 3000$ К и $T_R = 3500$ К соответственно. Видимая звёздная величина в полосе V ($\lambda_V = 551$ нм) составляет 18.5^m . Считая, что спектр излучения вполне чернотельный, определите эффективную температуру поверхности этой звезды, расстояние до неё и среднее поглощение в полосе B ($\lambda_B = 445$ нм) в направлении звезды (в звёздных величинах на килопарсек). Зависимость коэффициента поглощения от длины волны имеет вид $\lambda^{-4/3}$.

11. Долгий день (15 баллов)*А. Веселова*

Оцените, сколько энергии от Солнца поглотит абсолютно чёрная горизонтальная площадка площадью 1 м^2 за один световой день 21 апреля на широте 60° . Солнце считать точечным источником. Эффекты, связанные с наличием у Земли атмосферы, не учитывать.

12. Орлиный глаз (15 баллов)*И. Утешев*

4 июля19 года Альтаир (α Aql, $19^h 51^m$, $+8^\circ 52'$) взойдёт на экваторе на 5 часов раньше, чем Солнце. Для какого ближайшего будущего года это верно? Уравнением времени и собственным движением Альтаира пренебречь.

13. Формула тонкой линзы (15 баллов)*К. Васильев*

Рассмотрим популяцию линзовидных галактик без пыли с дисками, похожими по характеристикам на диск Млечного Пути: диаметр $D = 30$ кпк, толщина $h = 1$ кпк, абсолютная звёздная величина $M = -21^m$. Какая доля этой популяции в окрестности Млечного Пути радиусом $R = 200$ Мпк может быть обнаружена в обзоре всего неба с предельной поверхностной яркостью в $21.5^m/\square''$? Вкладом сферической компоненты в светимость галактик этого класса пренебречь.