

1. Как похорошели ночи при Собянине! 20 баллов

Определите:

- 1.1. в какие дни года ночь в Москве длится дольше дня;
- 1.2. в какие дни года центр диска Солнца пересекает математический горизонт в Москве и Санкт-Петербурге одновременно.

Географические координаты столиц:

- Москва — $55^{\circ} 45'$ с. ш., $37^{\circ} 37'$ в. д.;
- Санкт-Петербург — $59^{\circ} 57'$ с. ш., $30^{\circ} 19'$ в. д.

2. Тёмная сторона Луны 20 баллов

Луна неосвещённой стороной покрыла планету Солнечной системы. Определите диапазон возможных геоцентрических лучевых скоростей в момент начала покрытия для каждой из планет. Орбиты планет считайте круговыми и лежащими в одной плоскости.

3. Теория вероятностей – 3 20 баллов

- 3.1. Оцените вероятность обнаружить Марс в созвездии Девы 30 июля некоторого года в течение ближайших 500 лет.
- 3.2. Оцените отношение плотностей вероятностей обнаружить Марс в Деве и в Стрельце 30 июля некоторого года в течение ближайших 500 лет.
- 3.3. Как изменится ответ на вопрос 3.1 при рассмотрении промежутка времени в 50 000 лет?

Орбиты планет считайте круговыми и лежащими в одной плоскости.

4. Яркий полёт 20 баллов

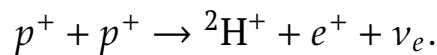
С поверхности Земли с начальной скоростью v_0 на гелиоцентрическую орбиту запущен космический аппарат. Найдите выражение для максимально возможной средней освещённости $\langle E \rangle_{\max}$ аппарата. При каких условиях это значение достигается?

5. Тёплый. Межгалактический. Твой.**20 баллов**

Скопление Волос Вероники имеет видимый угловой размер около 12° при $z = 0.023$. Гравитационная масса скопления $M_C \sim 7 \cdot 10^{14} M_\odot$. Грубо оцените тепловую энергию (в эВ) и температуру протонов межгалактического газа в скоплении.

6. Туннельный эффект**20 баллов**

Рассмотрим уравнение первой реакции протон-протонного цикла, протекающей в ядре Солнца при температуре $T_S \approx 15 \cdot 10^6$ К:



Для простоты будем считать, что для протекания реакции протонам необходимо сблизиться на расстояние $r_0 \approx 10^{-15}$ м, после чего между ними «включается» сильное взаимодействие.

- 6.1. Исходя из классических представлений о взаимодействии протонов, оцените минимальную температуру T_C , при которой возможна указанная реакция. Сравните T_C с T_S .

Слиянию протонов способствует квантовомеханический туннельный эффект. Частица может преодолеть потенциальный барьер — область, в которой потенциальная энергия $\Pi(r)$ превышает полную энергию E частицы — с вероятностью

$$P \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int \sqrt{2m [\Pi(r) - E]} dr\right).$$

- 6.2. Найдите выражение для вероятности $P(v)$ туннелирования при лобовом столкновении двух протонов, имеющих в системе центра масс скорость v .
- 6.3. Выразите P через v , c и постоянную тонкой структуры α .

Подсказка: $\int_0^a \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}} dx = \frac{\pi}{2} \sqrt{a}$.

7. Умей вертеться**20 баллов**

Зададим гравитационный потенциал модельной галактики двумя компонентами — балджем и диском:

$$\Phi_b(r) = -\frac{GM_b}{\sqrt{r^2 + c^2}}, \quad \Phi_d(R, z) = -\frac{GM_d}{\sqrt{R^2 + \left(a + \sqrt{z^2 + b^2}\right)^2}},$$

где r и R — галактоцентрическое и галактоосевое расстояния, z — высота над плоскостью симметрии; параметры модели:

$$\begin{aligned} a &= 6.5 \text{ кпк}, & M_b &= 3.9 \cdot 10^{10} M_{\odot}, \\ b &= 0.26 \text{ кпк}, & M_d &= 1.1 \cdot 10^{11} M_{\odot}, \\ c &= 0.3 \text{ кпк}. \end{aligned}$$

- 7.1. Изобразите качественно кривую вращения этой галактики — зависимость $v(R)$ круговой скорости от галактоосевого расстояния в плоскости галактики.
- 7.2. Найдите максимальное значение v_{\max} . На каком галактоосевом расстоянии R_0 оно достигается?

8. Относительность одновременности**10 баллов**

На каких широтах возможно наблюдать одновременно восход Сириуса ($\alpha_1 = 06^{\text{h}} 45^{\text{m}}$, $\delta_1 = -16^{\circ} 42'$) и заход Веги ($\alpha_2 = 18^{\text{h}} 37^{\text{m}}$, $\delta_2 = +38^{\circ} 47'$)? Рефракцией и понижением горизонта пренебрегите.

9. Подними голову!**10 баллов**

Искусственный спутник Земли обращается по круговой орбите с радиусом $r = 1.5 \cdot 10^4$ км и наклоном $i = 15^{\circ}$ относительно плоскости экватора.

- 9.1. Найдите наибольшую высоту верхней кульминации спутника при наблюдении в пункте с широтой $\varphi = 40^{\circ}$ с. ш.
- 9.2. Чему будет равна эта высота при $r \gg R_{\oplus}$?

10. Протосолнце**40 баллов**

Рассмотрим шаровое газовое облако из одноатомного идеального газа молярной массой μ при температуре T . Распределение массы в облаке описывается функцией $\mathfrak{M}(r)$, характеризующей массу, заключённую внутри сферы радиусом r , центр которой совпадает с центром облака.

- 10.1. Запишите условие механического равновесия газа, связывающее давление $p(r)$ с его градиентом $p'(r) \equiv \frac{dp}{dr}$ и распределением $\mathfrak{M}(r)$.
- 10.2. Покажите, что внутренняя энергия газа может быть вычислена по формуле

$$E_I = C_1 \int V dp(r),$$

где интегрирование производится по всей занимаемой облаком области пространства. Найдите значение коэффициента C_1 .

- 10.3. Покажите, что гравитационная потенциальная энергия облака $E_G = C_2 E_I$. Найдите значение коэффициента C_2 .
- 10.4. Как потери энергии, обусловленные тепловым излучением облака, влияют на температуру газа и характерные размеры облака?

Известно, что первая «вспышка» протозвезды происходит в момент, когда высвободившаяся гравитационная энергия становится равной энергии ионизации всей массы водорода протозвезды.

Оцените:

- 10.5. абсолютную звёздную величину протозвезды массой \mathfrak{M}_\odot во время первой «вспышки», если её эффективная температура в этот момент составляет $1/2 T_\odot$.
- 10.6. диапазон равновесных температур Юпитера за время нахождения Солнца на стадии протозвезды, предполагая его светимость постоянной и используя результаты моделирования положения планет в Солнечной системе (следующая страница).

Солнце находилось на стадии протозвезды около 600 тысяч лет.

К задаче 10. Протосолнце

