

С праздником Весны и Труда!

1. Козочка у реки

20 баллов

В таблице приведены некоторые характеристики Ахернара (α Eridani) и Капеллы (α Aurigae): прямое восхождение, склонение, видимая звёздная величина, лучевая скорость, собственное движение по прямому восхождению и по склонению, годичный параллакс.

Звезда	RA	Dec	m_V	v_r , км/с	μ_α , $\frac{\text{mas}}{\text{год}}$	μ_δ , $\frac{\text{mas}}{\text{год}}$	ϖ , mas
α Eri	01 ^h 37 ^m	−57° 14′	0.45	+16	+159	−38	23.4
α Aur	05 ^h 17 ^m	+46° 00′	0.08	+30	+109	−427	77

Найдите величины пространственных скоростей этих звёзд и их относительной пространственной скорости. Также вычислите видимые звёздные величины Солнца и Ахернара при наблюдении из окрестностей Капеллы, Солнца и Капеллы — из окрестностей Ахернара.

2. Арктический трилистник

20 баллов

В декабре 2020 года министр обороны России сообщил о завершении обустройства военной базы «Арктический трилистник» на архипелаге Земля Франца–Иосифа. Основная задача базы — обеспечение противовоздушной обороны. Давайте пофантазируем и предположим, что с базы необходимо запустить баллистическую ракету. Цель находится на широте φ . Для простоты будем считать, что база располагается на Северном полюсе. Поддержите обороноспособность страны!

Определите, с какой минимальной скоростью и под каким углом к горизонту необходимо запустить ракету, чтобы она попала в цель. Выполните расчёты для следующих значений φ : 39° с. ш. и 34° ю. ш. Соппротивлением воздуха пренебрегите. После запуска ракета движется по инерции.

3. Антананариву**20 баллов**

В некоторый день Солнце взошло в Антананариву ($47^\circ 31.5'$ в. д., UT+3) в 05:36, а в Москве ($55^\circ 45'$ с. ш., $37^\circ 37'$ в. д., UT+3) — в 06:23.

Из этих данных определите возможные даты наблюдений и широту Антананариву. Уравнением времени и понижением горизонта пренебрегите.

4. Дважды полдень**20 баллов**

Звёздные сутки короче солнечных, поэтому в промежутке от 0^h до 24^h административного времени в любой день года звёздные часы могут показать некоторое значение LST дважды. Гринвичское звёздное время на 0^h 1 января 2021 года составляло $GST_0 = 6^h 43^h 28^s$.

Определите, в какой день 2021 года наблюдатели на нулевом меридиане дважды зафиксировали или зафиксируют звёздный полдень ($LST = 12^h$). Во сколько по всемирному времени произошли или будут происходить эти моменты?

5. Орбитальная диета**20 баллов**

Как взвешивать космонавтов в невесомости? Можно использовать пружинные весы! Предположим, что на космическом корабле есть закреплённое на невесомой пружине кресло, которое может колебаться в продольном направлении. Жёсткость пружины $k = 1000$ Н/м.

Период колебаний кресла на Земле 0.88858 с. При измерении массы космонавта на орбите период колебаний кресла с космонавтом составил 1.85730 с, а без космонавта — 0.88563 с. В ходе измерений космический корабль не вращался.

Вычислите массу космонавта.

6. Олимпиада по географии?**20 баллов**

Определите максимальное и минимальное расстояние (в км) города Токио (широта $+36^\circ$) от плоскости эклиптики¹.

7. Радио «Водород FM»**20 баллов**

«В межзвёздной среде при низкой плотности в процессе рекомбинации заряженных частиц — электронов и ионов — с определённой вероятностью возможно образование атомов с высоким уровнем возбуждения. При последующих каскадных переходах на уровни с меньшей энергией в силу малой разницы энергий между высоковозбуждёнными уровнями происходит испускание фотонов радиодиапазона, соответствующих разным рекомбинационным радиолиниям. <...>

Принято следующее обозначение рекомбинационных радиолиний: наименование элемента по таблице Менделеева, номер уровня, на который происходит переход, порядок линии греческой буквой. Например, обозначение $H114_\beta$ соответствует линии водорода, обусловленной переходами между 116-м и 114-м уровнями»².

Пусть $\Delta E_{\mu\nu}^{(n)}$ — разница энергий двух фотонов, соответствующих рекомбинационным радиолиниям Hn_μ и Hn_ν .

Найдите отношение $\frac{\Delta E_{\alpha\beta}^{(n)}}{\Delta E_{\beta\gamma}^{(n)}}$, получите численный результат.

¹Примечание для младших участников: плоскость эклиптики — это плоскость орбиты обращения вокруг Солнца барицентра системы Земля – Луна.

²По материалам глоссария astronet.ru; Р. Л. Сороченко, «Физика Космоса», 1986.

8. Экспоненциальная галактика**30 баллов**

Галактика имеет экспоненциальный профиль поверхностной яркости:

$$J(\alpha) = J_0 \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{\alpha_0}\right),$$

где J_0 — поверхностная яркость в центре изображения галактики, соответствующая $20.4^m/\square''$, α — угловое удаление от центра.

Определите видимый угловой размер галактики, если обрезка производится по изофоте $25^m/\square''$, а угловое расстояние между изофотами $22^m/\square''$ и $24^m/\square''$ составляет $29''$. Оцените линейный размер галактики при красном смещении $z = 0.01$ и минимальную апертуру телескопа, в который можно было бы наблюдать эту галактику невооружённым глазом.

9. Долгое падение**30 баллов**

Сферический абсолютно чёрный шар с идеальной теплопроводностью размером 1 см и плотностью 2 г/см^3 обращается вокруг Солнца. В начальный момент радиус орбиты шара составил 5 а. е.

Оцените, за какое время шар упадёт на Солнце. Взаимодействием с веществом (газом, пылью) и телами Солнечной системы (за исключением Солнца) пренебрегите.

10. Лунный этюд**30 баллов**

В некоторый день Луна вошла в $13^h 43.3^m$ по местному солнечному времени. На следующий день лунный восход произошёл в $13^h 39.4^m$.

Определите разность азимутов восхода Луны в эти дни. Оцените возможный диапазон дат наблюдения. На каких широтах возможно такое наблюдение? Рефракцией, понижением горизонта, угловыми размерами Луны и горизонтальным параллаксом пренебрегите.

11. Фотонная ракета**40 баллов**

При рассмотрении релятивистского движения бывает удобно ввести параметр «быстрота» (ϑ), который связан со скоростью v материальной точки соотношением

$$v = c \cdot \tanh \vartheta,$$

где \tanh — гиперболический тангенс. Заметим, что при любых быстротах $\vartheta \in \mathbb{R} \equiv (-\infty; +\infty)$ скорость $v \in (-c; +c)$, что физически обоснованно.

11.1. Покажите, что закон сложения быстрот имеет линейный вид («быстрота аддитивна»):

$$\vartheta_{13} = \vartheta_{12} + \vartheta_{23}.$$

11.2. Выразите импульс p материальной точки через её массу m и быстроту ϑ .

Рассмотрим реактивное движение ракеты. В собственной системе отсчёта ракета выбрасывает топливо с постоянными темпом $\mu \equiv -\frac{dm}{dt_0}$ (t_0 — собственное время ракеты) и относительной скоростью \vec{u} .

11.3. Запишите уравнение, связывающее скорость изменения импульса ракеты $\frac{dp}{dt_0}$ в мгновенно сопутствующей системе отсчёта с величинами, характеризующими тягу двигателя (μ и u).

11.4. Получите дифференциальное уравнение, связывающее изменение быстроты ракеты $d\vartheta$ с изменением её массы dm .

Подсказка. $\sinh x \approx x$ при $|x| \ll 1$.

11.5. Получите релятивистскую формулу Циолковского, исходя из предположения, что исходная скорость ракеты $v_0 = 0$, а движение ракеты одномерное.

11.6. Упростите результат в предположении $u = c$ (фотонная ракета). Итоговое выражение должно содержать только конечное количество арифметических операций.

Подсказка. $\sinh x \equiv \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh x \equiv \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

12. Тёмная тема**40 баллов**

Рассмотрим модельную шаровую галактику, состоящую из звёзд (массой которых можно пренебречь), межзвёздного газа и тёмной материи. Кривая вращения этой галактики имеет вид

$$v_{\text{rot}}(r) = \begin{cases} v_0 \cdot \frac{r}{r_0}, & r \leq r_0, \\ v_0, & r > r_0, \end{cases}$$

где r — расстояние до центра галактики.

12.1. Запишите выражение для гравитационной массы $M(r)$, заключённой внутри сферы радиуса r .

Состояние газа в приближении его идеальности описывается двумя параметрами: плотностью $\rho(r)$ и температурой $T(r)$.

12.2. Выразите градиент³ давления газа $\nabla P(\vec{r})$ через $M(r)$, $\rho(r)$ и \vec{r} .

12.3. Теперь найдите выражение для $M(r)$, если известны $\rho(r)$ и $T(r)$.

Предположим, что межзвёздный газ изотермический: $T(r) \equiv T_0 = \text{const}$, а распределение его плотности имеет вид

$$\rho(r) = \rho_1 \cdot \frac{r_1^3}{(r + r_1)^2 \cdot r},$$

где ρ_1 и r_1 — некоторые константы соответствующих размерностей.

12.4. Найдите распределение плотности тёмной материи в рассматриваемой галактике.

³Примечание для младших участников: градиентом $\nabla\varphi$ называется вектор, указывающий по направлению наибольшего возрастания скалярной физической величины φ , равный по модулю скорости роста этой величины в этом направлении $d\varphi/ds$.