

### 1. На разогрев

«Зажигательные» свойства собирающих линз известны с давних пор. Определите минимальный диаметр стеклянной линзы (показатель преломления  $n = 1.5$ , относительный фокус  $f/12$ ), при помощи которой можно плавить свинец (температура плавления  $327.5^\circ\text{C}$ ), если фокусировать линзой свет:

- Солнца;
- Луны.

Потерями света в оптической системе пренебречь.

### 2. На встречу

Две звезды на земном небе находятся на угловом расстоянии  $90^\circ$  друг от друга. В таблице справа приведены сведения об этих звёздах: лучевые скорости, собственное движение и современное расстояние до них.

№	$V_r$ , км/с	$\mu$ , мсд/г	$d$ , пк
1	8	70	30
2	7	80	40

Известно, что радиус-векторы и скорости обеих звёзд компланарны и расстояние между звёздами в настоящее время уменьшается. Определите, когда и на какое минимальное расстояние звёзды сблизятся.

### 3. На поправку

Вследствие шарообразности Земли на высоте Солнце заходит позже.

- От чего зависит величина задержки  $\Delta t$ ?
- Найдите поправку  $\Delta t$  в первом приближении по высоте  $H \ll R_\oplus$ :  $\Delta t \approx \alpha H^\beta + \dots$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые выражения, которые от  $H$  не зависят.
- С какой скоростью тень Земли «поднимается» по отвесной скале на высоте  $H$ ? Выразите скорость  $v$  в первом приближении по  $H \ll R_\oplus$ .

### 4. Равенство Андромеды

В некотором месте на Земле Альферац (RA  $0^h$ , Dec  $+29^\circ$ ) в течение звёздных суток находится к югу от первого вертикала столько же времени, сколько и над горизонтом. Найдите широту места наблюдения. Рефракцией пренебрегите.

### 5. А в каком кольце?

Очень наблюдательный наблюдатель определил, когда по местному времени в день X и через 60 дней наступили моменты верхней кульминации Солнца, и обнаружил, что *получилось одно и то же*. Во сколько Солнце кульминирует ещё через 60 дней?

## 6. Биполярочка

Биполярную систему координат на плоскости вводят так. Пусть заданы фокусы  $F_1$  и  $F_2$ . Тогда положение точки  $P$  однозначно определяется набором координат

$$\tau = \ln \frac{|F_1P|}{|F_2P|} \in (-\infty, +\infty),$$

$$\sigma = \angle F_1PF_2 \in (-\pi, \pi].$$

- Что из себя представляют кривые  $\tau = \text{const}$  и  $\sigma = \text{const}$ ?
- Рассмотрим эллипс с фокусами в точках  $F_1$  и  $F_2$ . Запишите уравнения, которые задают кривую на плоскости  $(\tau; \sigma)$ , соответствующую биполярным координатам точек эллипса с эксцентриситетом  $e$ .

*Подсказка.* Подумайте над удобной, симметричной параметризацией этой кривой.

- Изобразите качественно вышеописанную кривую. Ответ объясните.

## 7. Бес/конечная задача

Космический аппарат вывели в точку  $D$  на расстоянии 10 000 км от центра Земли, после чего двигатели были отключены и аппарат продолжил движение согласно закону всемирного тяготения. В момент отключения двигателей скорость аппарата составляла 4 км/с. Угол между вектором скорости и радиус-вектором для точки  $D$  равен  $30^\circ$ .

Определите:

- большую полуось и эксцентриситет орбиты;
- истинную аномалию точки  $D$ ;
- тип орбиты (гипербола, парабола, облётный эллипс или баллистический эллипс).

Если движение аппарата финитное,

- оцените:
  - для облётного эллипса — время движения до апогея орбиты,
  - для баллистического эллипса — время до момента падения на Землю.

## 8. Быстрое вращение

Внеземной наблюдатель находится на линии апсид орбиты звезды S-2 вокруг сверхмассивной черной дыры (СМЧД) в центре Млечного Пути; расстояние от наблюдателя до СМЧД равно 5 кпк. Известно, что период обращения звезды равен 16 годам, эксцентриситет орбиты — 0.884. Звезда принадлежит спектральному классу В.

Оцените диапазон длин волн, на которых будет наблюдаться линия He I ( $\lambda = 403$  нм) в спектре данной звезды. Относительной скоростью наблюдателя и СМЧД пренебречь.

## 9. Эпициклы, эпициклы

Звёзды галактического диска движутся по некруговым орбитам, уклоняясь от окружностей как в плоскости симметрии Галактики, так и в перпендикулярном направлении. Однако дисперсии скоростей объектов диска намного меньше скорости вращения на плато, поэтому можно ожидать, что большинство орбит *слабо* отличаются от круговых. Движение звёзд относительно местного стандарта покоя (во вращающейся системе отсчёта) называют *эпициклическим*.

Рассмотрим движение звезды  $\{r(t), \varphi(t), z(t)\}$  в стационарном осесимметричном гравитационном потенциале Галактики  $\Phi(r, z)$ .

- Запишите уравнения движения звезды в координатах  $\{r, \varphi, z\}$ , то есть выразите  $\ddot{r}$ ,  $\ddot{\varphi}$ ,  $\ddot{z}$  через координаты, функцию  $\Phi$  и их производные.
- Как изменяется удельный момент импульса  $L$  звезды и как он связан с  $r$  и  $\varphi$ ? Для кругового движения по орбите радиусом  $r_0$  выразите  $L$  через  $r_0$  и  $\Phi'_r(r_0)$ .
- Преобразуйте уравнение радиального движения звезды:
  - исключите члены, содержащие  $\dot{\varphi}$ ;
  - подставьте  $r(t) \equiv r_0 + \rho(t)$ ;
  - оставьте только члены, линейные по малому отклонению  $\rho(t)$ ;
  - преобразуйте к виду уравнения гармонических колебаний.
- Выпишите выражение для круговой частоты радиальных колебаний в форме

$$\Omega^2 = \#_1 \cdot \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r_0} + \#_2 \cdot \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right|_{r_0}.$$

- При каких условиях круговые орбиты в гравитационном потенциале  $\Phi(r, z)$  оказываются устойчивыми к малым возмущениям?

*Подсказка.* Подумайте, в какой форме удобно представить  $\Phi'_z$ , если в силу симметрии Галактики относительно плоскости диска  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$ .

- С учётом результатов пунктов (b) и (d) выразите  $\Omega$  через угловую скорость вращения Галактики  $\omega(r_0)$  и производную  $\omega'_r(r_0)$ .
- Вычислите период эпициклического движения, если принять  $\omega_0 \approx 27.5$  км/с/кпк,  $\omega'_0 \approx -4.55$  км/с/кпк<sup>2</sup> и  $r_0 = 7.5$  кпк. Сравните его с галактическим годом.
- В каком направлении происходит движение звезды по эпициклу: по направлению вращения Галактики или в противоположном направлении? Ответ обоснуйте.

## 10. Молочный лун

21 сентября 2021 года полная Луна в Мурманске (68.97° с. ш., 33.08° в. д.) взошла (центр диска пересёк альмукантарат  $h = -0.8^\circ$ ) в 19:30. Следующий восход Луны произошёл 22 сентября в 19:13. Определите дату ближайшего к тем дням солнечного затмения.