

T1. Перл творения

Предположим, что ядерное звёздное скопление в центре Млечного Пути состоит из одинаковых звёзд, а распределение массы следует простому закону — так называемой модифицированной хаббловской модели с центральной плотностью ρ_0 и характерным пространственным масштабом a :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-3/2}.$$

- Определите, какому закону в рамках рассматриваемой модели подчиняется распределение объектов в проекции на картинную плоскость (поверхностная плотность распределения).
- Рассчитайте значение центральной плотности ρ_0 , если современная оценка массы скопления составляет $1.8 \cdot 10^7 M_{\odot}$, а радиус половинной массы r_{50} равен 4.2 пк.
- Как радиус r_k сферы, в которой заключены $k\%$ массы скопления, связан с параметром $k \in [0; 100)$ и величиной r_{50} ? Выразите r_k в долях r_{50} для $k \in \{60; 70; 80; 90; 95; 99\}$.
- Оцените характерную величину скорости объектов скопления.

Подсказка:

$$\int \left(1 + \frac{x^2}{b^2}\right)^{-3/2} dx = \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{b^2}}} + \text{const},$$

$$\int x \left(1 + \frac{x^2}{b^2}\right)^{-3/2} dx = -\frac{b^2}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{b^2}}} + \text{const},$$

$$\int x^2 \left(1 + \frac{x^2}{b^2}\right)^{-3/2} dx = b^3 \cdot \ln \left(\frac{x}{b} + \sqrt{\frac{x^2}{b^2} + 1} \right) - \frac{b^2 x}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{b^2}}} + \text{const},$$

$$\int x^3 \left(1 + \frac{x^2}{b^2}\right)^{-3/2} dx = b^2 \cdot \frac{2b^2 + x^2}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{b^2}}} + \text{const}.$$

Т2. Мечты о Марсе

Согласно данным Yseboodt et al. (2017) и Kahan et al. (2021), прецессия оси вращения Марса составляет $7.576 \cdot 10^3$ mas/год; марсианский тропический год при этом короче звёздного. Угол наклона оси вращения Марса к перпендикуляру к плоскости его орбиты равен $\varepsilon_{\text{♂}} = 25.18938^\circ$.

Предположим для простоты, что уже в текущем столетии колонизаторы Марса наряду с имеющимися системами небесных координат будут использовать марсианские экваториальные координаты, устроенные полностью аналогично земным, с заменой плоскости эклиптики плоскостью орбиты Марса, а земного экватора — марсианским. По состоянию на 2099 год марсианские экваториальные координаты некоторого объекта составляют ($\alpha_m = 10^{\text{h}} 37^{\text{m}} 53.6^{\text{s}}$; $\delta_m = 61^\circ 24' 26''$).

- a) Определите экваториальные координаты (α ; δ) объекта в 2499 году.
- b) Определите направление прецессионного смещения объекта, вычислив позиционный угол точки (α ; δ) относительно точки (α_m ; δ_m) (в экваториальных координатах 2099 года).

Т3. Над Землёю алеет закат

Землеподобная экзопланета радиусом 8000 км обращается вокруг звезды спектрального класса A0 по круговой орбите. «Солнечная» постоянная для этой экзопланеты равна земной.

- a) Оцените температуру абсолютно чёрного тела, максимум интенсивности излучения которого приходится на ту же длину волны, что и у заходящего «солнца» на этой планете.
- b) Оцените видимую болометрическую звёздную величину «солнца» на горизонте.

Атмосферу планеты считайте однородной и простирающейся до высоты 15 км, излучение звезды за пределами атмосферы — чернотельным. Считайте, что поглощение света в зените обусловлено в основном молекулярным рассеянием и составляет 0.5^{m} на длине волны 300 нм.

Т4. Ипподром

- а) На плоскости заданы опорная прямая L и кривая второго порядка E , являющаяся невырожденным коническим сечением. Определите геометрическое место точек X , обладающих следующим свойством: любая прямая λ , проходящая через точку $x \in X$, пересекает L и E каждую ровно в одной точке, не считая, быть может, самой точки x :

$$\begin{aligned} |(\lambda \cap L) \setminus \{x\}| &= 1, \\ |(\lambda \cap E) \setminus \{x\}| &= 1. \end{aligned}$$

- б) Рассмотрим кеплерово движение по эллипсу вокруг материальной точки Φ массой M с орбитальным периодом T . Координатные оси x и y содержат соответственно большую и малую оси эллипса и пересекаются в его центре ($x = y = 0$), ось z параллельна оси y и проходит через точку апоцентра, в которой $z = 0$.

Каждому положению A тела на орбите соответствует проекция B на ось z , как показано на рисунке ниже. Найдите зависимость $\frac{dz}{dt}(x)$ скорости проекции по оси z от абсциссы тела x .

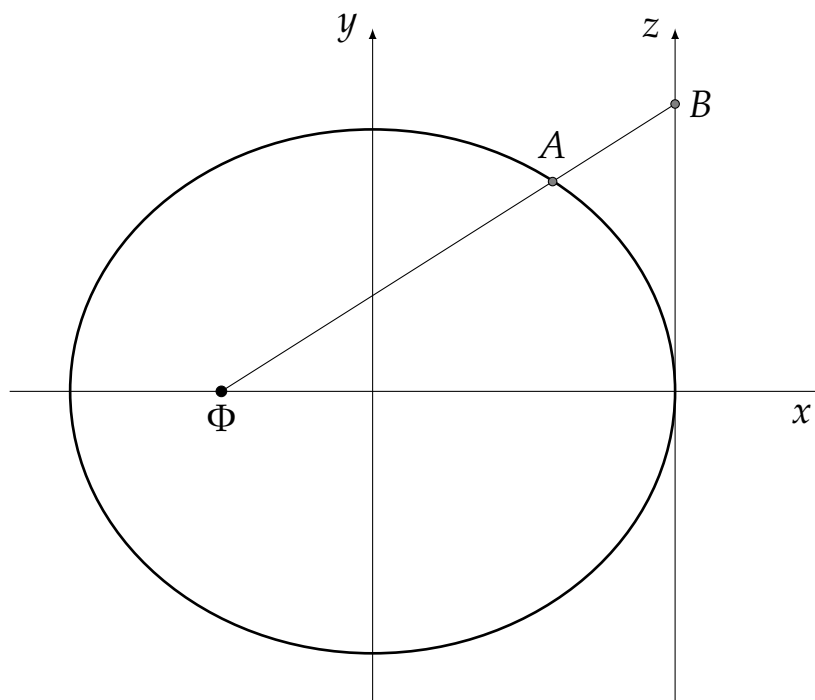


Рис. к задаче 4(б)

Т5. Дела семейные

Космический аппарат стартовал с поверхности Ганимеда, развил минимальную скорость, позволяющую покинуть окрестности Юпитера. В некоторый момент времени аппарат пересёк орбиту Каллисто, а затем достиг границы сферы действия Юпитера относительно Солнца.

- Оцените стартовую скорость космического аппарата на поверхности Ганимеда.
- На каком расстоянии от Каллисто пролетел аппарат, пересекая её орбиту, если в момент старта угол Каллисто–Ганимед–Юпитер оказался прямым?
- Оцените продолжительность полёта аппарата до границы сферы действия Юпитера.

Вращением объектов вокруг своей оси пренебречь. Все траектории считать компланарными.

Объект	Масса, кг	Радиус, км	Радиус орбиты, км
Ганимед	$1.5 \cdot 10^{23}$	$2.6 \cdot 10^3$	$1.07 \cdot 10^6$
Каллисто	$1.1 \cdot 10^{23}$	$2.4 \cdot 10^3$	$1.88 \cdot 10^6$

Т6. Его остановочка

В день космонавтики, 12 апреля космический аппарат прилунился. Оцените высоту ближайшей верхней кульминации Земли в точке прилунения, если в момент прилунения Вега заходила за лунный горизонт, а Капелла проходила возле зенита.

Звезда	Прямое восхождение	Склонение
Вега	$18^{\text{h}} 37^{\text{m}}$	$+38^{\circ} 47'$
Капелла	$05^{\text{h}} 17^{\text{m}}$	$+46^{\circ} 00'$

Т7. Сублимация

По большей части ядра комет состоят из водяного льда. Зависимость давления P насыщенного водяного пара над льдом от температуры возможно приблизить экспоненциальной зависимостью:

$$\lg \frac{P_s(T)}{1 \text{ Па}} = \frac{A}{T} + B,$$

где $A = -2.66 \cdot 10^3 \text{ К}$; $B = 12.54$ (Marti & Mauersberger, 1993).

- а) Вычислите удельную теплоту λ квазиравновесной сублимации льда.
Примечание. Если Вы не справились с этим заданием, далее считайте, что $\lambda = 1 \text{ МДж/кг}$.
- б) Оцените, какая масса льда испаряется с единицы поверхности за единицу времени при температуре $T_0 = 273 \text{ К}$, если внешнее давление $P_e \ll P_s(T_0)$.

Будем считать, что в каждый момент времени комета находится в равновесии со своей атмосферой, так что испарение ядра кометы происходит только за счёт поглощения энергии излучения Солнца. Будем также считать, что ядро имеет форму шара и сохраняет её в процессе эволюции.

- в) Найдите зависимость времени жизни t_0 кометы от её массы m_0 при заданных параметрах орбиты a и e и альбедо $\alpha \ll 1$.
- д) Получите оценку для времени жизни кометы 1P/Галлея в рамках заданной модели, если

$$a = 17.83 \text{ а. е.};$$

$$e = 0.967;$$

$$m_0 = 2.2 \cdot 10^{14} \text{ кг}.$$

T8. EHLO WRDL

- a) Перед отправкой некоторого сообщения его необходимо перевести в двоичный код. Рассмотрим, например, слово hello. Ограничиваясь алфавитом из 4 букв, возможно закодировать его следующим образом:

$$\begin{pmatrix} h \\ e \\ l \\ o \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix},$$

так что в результате получится 0001101011. Увы, такой способ кодирования неустойчив к помехам.

Предложите наиболее экономичный способ кодирования этого же алфавита, при котором замена одного бита 0 \leftrightarrow 1 в коде буквы всё ещё позволяет однозначно её декодировать. Коды букв должны иметь одинаковую длину, притом минимально возможную.

- b) Зададимся целью передать это послание миру, используя передатчик с рабочей частотой $f_0 = 20$ ГГц и шириной полосы $\Delta f = 150$ МГц. На этой частоте радиотелескоп Green Bank (GBT) имеет чувствительность $S_{\text{lim}} \sim 0.1$ мЯн. Оцените необходимую силу излучения передатчика (в Вт/ср), чтобы телескопы, подобные GBT, могли зарегистрировать передачу на расстояниях до $r_{\text{lim}} = 100$ пк.
- c) На каком предельном расстоянии возможно обнаружить нейтронную звезду ($T \sim 10^5$ К) при наблюдении на GBT на частоте f_0 ?

Т9. Финальное преломление

Определение 1. В справочниках для оптических стёкол указывается коэффициент дисперсии (число Аббе), который исторически определяется как

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C},$$

где n_D, n_F, n_C — показатели преломления стекла на длинах волн, соответствующих фраунгоферовым линиям C (656.3 нм), D (589.2 нм) и F (486.1 нм).

- а) Оцените отношение величины продольной хроматической аберрации $\Delta F := |F_C - F_F|$ к фокусному расстоянию F тонкой линзы, изготовленной из стекла с $n_D = 1.50$ и $\nu = 50$.

Определение 2. Разрешающей способностью оптического прибора называют отношение заданной длины волны λ_0 к минимальной разнице $\Delta\lambda := |\lambda_2 - \lambda_1|$ длин волн двух близких линий ($\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda_0$), надёжно разрешающихся в получаемом на данном приборе спектре:

$$R = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}.$$

Рассмотрим простейший спектральный прибор — тонкую треугольную призму с показателем преломления $n(\lambda)$, углом при вершине (между преломляющими гранями) $\alpha \ll 1$ и длиной основания w .

- б) Выразите угол отклонения луча β при прохождении призмы через $n(\lambda)$ и α .
- с) Выразите разрешающую способность призмы R через w и $\frac{dn}{d\lambda}$.
- д) Оцените R для призмы, изготовленной из того же стекла, что и тонкая линза в вопросе (а), с длиной основания $w = 5$ см.

Подсказка. Спектральное разрешение призмного спектрографа определяется дифракцией света на апертуре.