Задачи по 15 баллов

T1. Дискобол

Представим себе очень простые модели протопланетного диска (в реальности всё намного сложнее и интереснее, см. обзор Williams & Cieza, 2011, arXiv:1103.0556), симметричного как относительно оси вращения звезды, так и относительно средней плоскости:

a) внешний радиус диска равен 50 а. е., осевое сечение диска представляет собой равнобедренный треугольник с углом в звезде 4°;
b) внешний радиус диска равен 50 а. е., внутренний радиус равен 4 а. е., боковые стороны трапеции наклонены к средней плоскости под углом 2°, а высота на внешнем краю диска совпадает со значением в модели (a);
c) внешний радиус диска равен 50 а. е., внутренний радиус равен 4 а. е., высоты на краях диска совпадают со значениями в модели (b), но боковые стороны трапеции имеют экспоненциальную форму $h(r) = h_0 \exp(r/r_0)$.

Оцените *среднюю* плотность вещества диска в г/м^3 в трёх моделях, считая его имеющим массу 5 масс Юпитера.

T2. Один пояс, один путь

Вам дана детальная карта часовых поясов (рис. 2, с. 4). На карту часовых поясов наложены меридианы. Определите максимальную (по модулю) возможную на поверхности Земли разницу во времени между моментом верхней кульминации Солнца и 12 часами дня по гражданскому времени. Переходами на летнее время и существованием Антарктиды пренебречь. *Замечание-пример: разница между 23:55 и 00:05 — 10 минут.*

T3. Второй порядок

Чтобы оценить продолжительность центрального прохождения Венеры по диску Солнца, достаточно считать орбиты Земли и Венеры круговыми и лежащими в одной плоскости. Оцените, как (на сколько процентов) изменится ответ, если всё же учесть наклонение орбиты Венеры к плоскости эклиптики. Считайте, что прохождение остаётся центральным.

T4. Задача с подвохом

Рассмотрим случай вырожденной кривой блеска: в очень далёкой планетной системе планета на широкой круговой орбите проходит по диску звезды так, что в момент минимума на кривой центр диска планеты попадает на лимб диска звезды.

a) Известно, что максимальное падение блеска системы при таком событии составило 0.030^m. Найдите отношение радиусов планеты и звезды.
b) Внезапно оказалось, что отношение радиусов в 2 раза больше ответа на предыдущий пункт, просто мы ошиблись в обработке фотометрии (однако параметры звезды не изменились). Определите новое значение падения блеска, а также во сколько раз изменилась продолжительность прохождения.

Параметры звезды считать известными точно. Потемнением диска к краю и возможной переменностью звезды пренебречь.

Задачи по 20 баллов

T5. Квак по нотам

Спиральная галактика имеет галактические координаты $(b, l) = (20°; 70°)$ и видимую звёздную величину 14^{m}. Красное смещение галактики составляет $z = 0.034$. Считая отношение «масса–светимость» для галактики равным отношению для Млечного Пути, оцените отношение максимальной скорости вращения галактики к скорости на её внешних границах.

Среднее поглощение в Млечном Пути на луче зрения считать равным 2^{m}/кпк при характерной толщине газового диска 100 пк. В пределах 50 кпк от центра Галактики масса Млечного Пути составляет $4 \cdot 10^{11}\,\mathfrak{M}_{\odot}$, а максимальная скорость вращения Галактики по одной из оценок достигает 270 км/с.

T6. Солнечный мальчик

Один незадачливый путешественник в местную солнечную полночь 21 июня заметил на горизонте центральное солнечное затмение. Найдите экваториальные координаты восходящего узла орбиты Луны. Параллаксом, эксцентристетом орбиты Луны и прецессией её узлов пренебречь.

T7. Орбитальный треш

Вокруг Земли по круговой экваториальной орбите высотой 600 км движется космический аппарат с полезной нагрузкой 10 кг. На мгновение включаются двигатели, потратив всё топливо и удвоив скорость в направлении текущего движения — и аппарат переводится на гиперболическую траекторию, направляясь к лунной орбите.

При пересечении орбиты захоронения (на 200 км выше геостационарной орбиты) аппарат сталкивается с частицей «захороненного» космического мусора массой 3 кг, обращающейся в том же направлении. При столкновении частица мусора застревает, и дальше объекты движутся как единое целое. Насколько позже или раньше объект пересечёт орбиту Луны по сравнению с движением по исходной траектории?

T8. Аллергия

Космонавт лунной миссии под кодовым названием «Бурашка-4» стоит на дне кратера Луны, имеющего форму параболоида вращения с вертикальной осью. Глубина кратера составляет 2 км, а его диаметр — 12 км. Космонавт бросил апельсин и увидел, что после упругого соударения с поверхностью Луны тот отскочил вертикально вверх. Под каким углом к горизонту был брошен цитрус, если его начальная скорость составляла 15 м/с?

T9. †

На каких широтах Южный Крест может в некоторый момент располагаться горизонтально, то есть так, что звёзды Гакрукс ($\alpha_1 = 12^{\mathrm{h}}31.0^{\mathrm{m}}$; $\delta_1 = -57°07'$) и Акрукс ($\alpha_2 = 12^{\mathrm{h}}26.5^{\mathrm{m}}$; $\delta_2 = -63°06'$) находятся на одной высоте и при этом видны над горизонтом? Рефракцией пренебречь.

Задачи по 40 баллов

T10. Голос Америки

Спутники семейства «Молния» были запущены СССР на высокую эллиптическую орбиту, что позволяло обмениваться сообщениями, например, между Москвой и Владивостоком. Если апоцентр орбиты находился над территорией СССР, то всё было хорошо — можно было передать сигнал. Однако Земля не является идеальным шаром: её сплюснутость заставляет линию апсид прецессировать.

Известно, что добавка к гравитационному потенциалу Земли с учетом сжатия равна

$$\mathcal{R}(r,\theta) = \frac{GM_\oplus}{r} \times J_2 \cdot \left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2 \cdot \frac{3\cos^2\theta - 1}{2},$$

где $J_2 \ll 1$ — коэффициент, отвечающий за сплюснутость Земли, θ — полярный угол в системе координат с осью Oz вдоль оси вращения Земли и началом отсчёта O в центре Земли.

Также известно, что прецессия аргумента перицентра ω при наличии дополнительного потенциала $\mathcal{R}(r,\theta)$, помимо гравитации точечной массы, задаётся в каждый момент времени выражением

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \cdot \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \cdot \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial i}.$$

Здесь n — среднее движение: $n = \dfrac{2\pi}{T}$.

Рассмотрим спутник с кеплеровыми элементами орбиты $\{a, e, i, \omega, v\}$, причём $\omega = 90°$.

a) Найдите добавку для этого спутника при данной истинной аномалии v.

b) Выразите $d\omega/dt$ через e, i и v.

c) Используйте закон сохранения момента импульса $l = r^2(v) \cdot \dot{v}$, чтобы найти формулу для средней (за период обращения спутника) скорости прецессии перицентра.

d) Найдите наклонение i, при котором спутник в данной модели не изменяет положение перицентра. Да, это наклонение спутников-«молний».

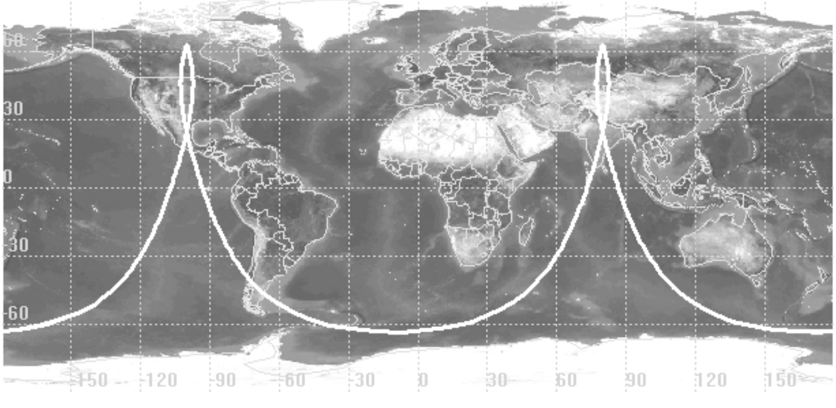

Рис. 1: К задаче 10

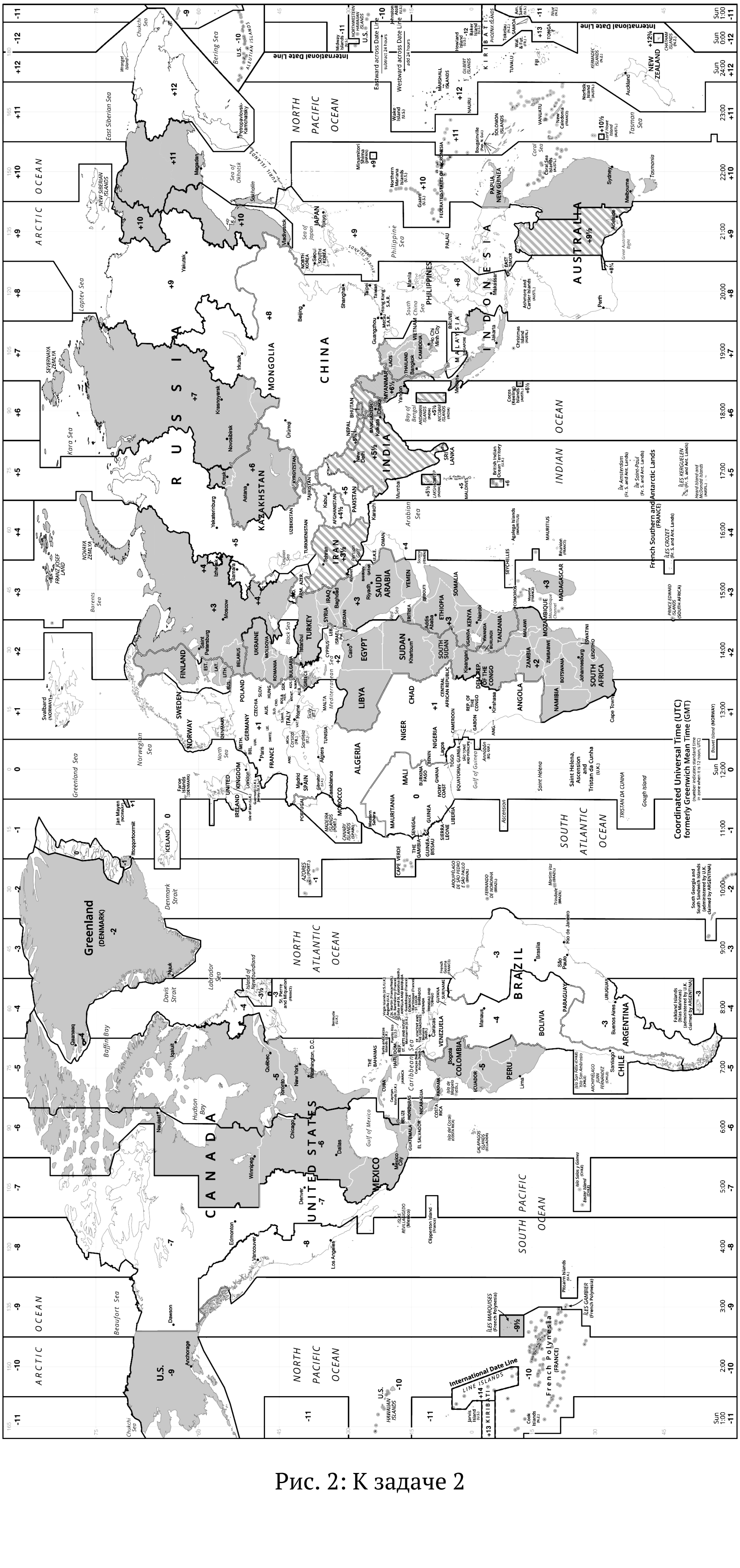

Рис. 2: К задаче 2