

D1 Апокалипсис не сегодня

Для определения относительного положения орбиты сближающегося с Землёй астероида и орбиты Земли вводится такое понятие как «зацепление орбиты». Две эллиптические орбиты считаются зацепленными, если их можно представить как соединенные звенья цепи.

В файле **ast_cat.dat** приведены параметры выборки астероидов: полное название, номер, утверждённое IAU имя, орбитальный эксцентриситет, большая полуось, наклон, долгота восходящего узла, аргумент перигея:

Полное название	№	Имя	e	a , а.е.	i , °	Ω , °	ω , °
"433 Eros (A898 PA)"	433	Eros	0.2227	1.458	10.83	304.27	178.92
"719 Albert (A911 TB)"	719	Albert	0.5467	2.636	11.57	183.86	156.20
"887 Alinda (A918 AA)"	887	Alinda	0.5712	2.473	9.40	110.41	350.52

Пусть O — система отсчёта с центром O в Солнце, в которой опорной плоскостью Oxy является плоскость эклиптики. Ось x направлена от Солнца в точку весны, ось z направлена в Северный полюс эклиптики, а $Oxyz$ — правая прямоугольная декартова система координат.

Пусть O' — орбитальная система отсчёта с центром O в Солнце. В данном случае опорной является плоскость орбиты $Ox'y'$. Ось x' направлена в перигей орбиты, ось y' «смотрит» в полуплоскость, в которой происходит движение после прохождения перигея, а ось z' дополняет систему до правой тройки.

- Запишите выражение для матрицы поворота, преобразующей координаты радиус-вектора из O' в O .
- Считая орбиту Земли круговой с радиусом в точности 1 а.е., определите количество астероидов выборки, чья орбита зацеплена с земной.
- Постройте двумерную диаграмму распределения (рассеяния) точек пересечения орбитами «зацепленных» астероидов части плоскости эклиптики внутри земной орбиты.

D2 Звёздно-полевые тропы

Часть 1. Качественный анализ

Политропной моделью звезды, или, проще говоря, политропой называется звезда, находящаяся в механическом равновесии и такая, что в каждой её точке выполнено следующее соотношение между давлением P и плотностью ρ , называемое *уравнением состояния*:

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad (1)$$

где K и $n > 0$ — некоторые постоянные. Величина n называется *индексом* политропы.

- а) Пользуясь методом размерностей, установите связь между параметром K и физическими характеристиками звезды: массой $\mathcal{M}$ и радиусом R .

Полезный факт. Безразмерный численный коэффициент в получившемся соотношении между массой и радиусом звезды зависит только от n .

- б) При каком значении индекса политропы n для любого фиксированного K существует лишь одно значение массы звезды, дающее устойчивую конфигурацию?
- с) Запишите уравнение состояния вида (1) для класса звёзд, радиус которых не зависит от их массы. Существует ли в реальности такой класс звёзд?

Часть 2. Количественный анализ

Внутреннее строение звезды в политропной модели удобно описывать с помощью безразмерного гравитационного потенциала θ , заданного относительно поверхности звезды, и безразмерного расстояния ξ от центра звезды:

$$\xi \equiv \frac{r}{r_1}, \quad r_1 = \left(\frac{\Phi_c}{4\pi G \rho_c} \right)^{1/2}, \quad \theta(\xi) \equiv \frac{\Phi(\xi)}{\Phi_c},$$

где ρ_c и Φ_c — плотность и гравитационный потенциал в центре звезды соответственно. Функция $\theta(\xi)$ удовлетворяет уравнению Лейна — Эмдена (форма уравнения Пуассона для гравитационного потенциала ньютоновской самогравитирующей сферически-симметричной политропной жидкости):

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n. \quad (2)$$

Заметим, что по определению $\theta(0) = 1$. Также из отсутствия сингулярности в центре звезды следует, что $\theta'(0) = 0$.

- д) Преобразуйте выражение (2), чтобы получить явное (дифференциальное) уравнение для θ'' .

- е) Численно проинтегрируйте полученное выражение для разных значений индекса политропы n . Постройте соответствующие графики $\theta(\xi)$ для некоторого набора значений n .
- ф) При каких значениях n модель теряет физический смысл?
- г) Можно показать, что профиль плотности политропы задаётся выражением $\rho/\rho_c = \theta^n$. Постройте соответствующие графики $\rho(\xi)$ для разных n .

Как решать такое уравнение?

Систему дифференциальных уравнений первого порядка вида $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$ с начальным условием $\vec{y}_0 = \vec{y}(x_0)$ возможно решать классическим методом Рунге — Кутты четвёртого порядка.

Итерационная формула с шагом интегрирования h имеет вид

$$\vec{y}_{N+1} = \vec{y}_N + \frac{h}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4),$$

где последовательно вычисляются вспомогательные векторы

$$\begin{aligned}\vec{k}_1 &= \vec{f}(x_N, \vec{y}_N), \\ \vec{k}_2 &= \vec{f}\left(x_N + \frac{h}{2}, \vec{y}_N + \frac{h}{2}\vec{k}_1\right), \\ \vec{k}_3 &= \vec{f}\left(x_N + \frac{h}{2}, \vec{y}_N + \frac{h}{2}\vec{k}_2\right), \\ \vec{k}_4 &= \vec{f}(x_N + h, \vec{y}_N + h\vec{k}_3).\end{aligned}$$

Подсказка. Дифференциальное уравнение второго порядка вида $y'' = f(x, y, y')$ можно представить в виде *системы* уравнений первого порядка путём замены переменной:

$$\begin{cases} z_1 \equiv y, \\ z_2 \equiv y', \end{cases}$$

после которой исходное уравнение запишется в виде

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ z_2' = f(x, z_1, z_2). \end{cases}$$

D3 Абелева группа

Файл **abell.tsv** содержит каталожные данные для объектов скопления Abell 1882:

- Seq — порядковый номер;
- RAJ2000 и DEJ2000 — прямое восхождение и склонение на эпоху J2000;
- zspec и e_zspec — красное смещение (спектроскопическое) с погрешностью;
- EWNa и e_EWNa — эквивалентная ширина линии Na с погрешностью;
- Dn4000 и e_Dn4000 — индекс D_n4000 , определяемый как отношение потоков в двух спектральных «окнах»: $[4000; 4100] \text{ \AA}$ к $[3850; 3950] \text{ \AA}$ (Balogh et al. 1999) — а также его погрешность;
- u-r и e_u-r — показатель цвета ($u - r$) в системе AB с погрешностью;
- NUV-r и e_NUV-r — показатель цвета ($NUV - r$) в системе AB с погрешностью;
- logMgal — логарифм массы галактики (в массах Солнца).

Задание:

- Постройте диаграмму распределения объектов на небе в экваториальных координатах в масштабе осей 1 : 1. Площадь маркера должна соответствовать массе галактики. Определите экваториальные координаты барицентра скопления и отметьте его на диаграмме.
- Введём в пространстве систему координат XYZ таким образом, чтобы плоскость XY была параллельна картинной, причём вдоль оси X увеличивается прямое восхождение объектов скопления, а вдоль оси Y — склонение. По оси Z будем откладывать расстояние до объектов, вычисляемое из красного смещения. Барицентр скопления в такой системе имеет координаты $(0, 0, Z_c)$.
Вычислите Z_c . Постройте диаграммы распределения объектов скопления в координатах (X, Z) и (Y, Z) . Объясните полученный результат.
- Вычислите среднеквадратичное отклонение σ_{v_r} лучевых скоростей объектов скопления. Оцените «среднеквадратичный» радиус скопления r и среднеквадратичную скорость v_g объектов скопления, обусловленную их гравитационным взаимодействием, в предположении шарообразности скопления.
- Постройте график зависимости логарифмической плотности $\log \Sigma$ распределения массы галактик скопления в картинной плоскости от расстояния до барицентра $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Оцените характерный радиус скопления R_e .

Указание. Для получения робастного результата удобно использовать следующую модель (Baldry et al. 2006): локальная плотность массы для некоторой галактики

$$\Sigma_N = \frac{\sum_{i=1}^N \mathfrak{M}_i}{\pi d_N^2},$$

где N — некоторое число, $\mathfrak{M}_i$ — масса i -й ближайшей соседки данной галактики по картинной плоскости, а d_N — расстояние до N -й ближайшей соседки по картинной плоскости.

Для построения графика возьмите средний $\log \Sigma_N$ для $N = 4$ и $N = 5$.

е) Постройте на одном графике ядерные оценки плотности (KDE) распределений индекса D_n4000 для трёх диапазонов масс галактик:

- $\log(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot) < 9.5$;
- $\log(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot) \in [9.5; 10.5]$;
- $\log(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot) > 10.5$.

Объясните наблюдаемую картину.