T1. Всё в мире относительно

Рассмотрим движение двух лёгких тел в центральном гравитационном поле. Орбиты тел расположены в одной плоскости и имеют равные большие полуоси a, причём орбита тела A представляет собой окружность, а тела B— эллипс с эксцентриситетом $e \ll 1$. Известно, что тела движутся в одном направлении. Минимальное расстояние, на которое они сближаются, равно $r_{\min} = ae$.

a) Оцените максимальное расстояние $r_{\max}$ между телами.

b) Введём прямоугольную декартову систему координат: ось x направим вдоль большой оси орбиты тела B, ось y — перпендикулярно. Постройте график относительной траектории тела B относительно тела A в координатах $(\Delta x; \Delta y)$.

Подсказка 1. $f(x + \delta x) \approx f(x) + f'(x)\delta x$ при малых δx.

Подсказка 2. Для построения графика не всегда нужно выражать ординату через абсциссу. Например, неявная функция $(\cos(t); \sin(t))$ описывает окружность. Подумайте, какую параметризацию удобно использовать в данной задаче.

T2. Марсианский солярий

Угол между плоскостями экватора Марса и его орбиты составляет $\varepsilon_{\mathord{\male}} = 25.19°$.

a) Какая доля длины северного полярного круга Марса освещена Солнцем, если ареоцентрическая «эклиптическая» долгота Солнца $\lambda_\odot = 30.0°$?

b) Сколько солнечной энергии в то же время на той же широте собирает размещённый горизонтально элемент солнечной панели площадью $S = 1$ м^2 за марсианские сутки?

Рефракцией, рельефом поверхности планеты и угловым размером Солнца пренебречь.

T3. Новый альбом популярной группы

Рассмотрим изотермический аккреционный диск, сформировавшийся при компактном сверхмассивном объекте.

a) Покажите, что отношение характерной толщины h_e такого диска к радиусу r (расстоянию до центра) имеет порядок отношения скорости звука c_s к круговой скорости $v_0(r)$.

b) Введём параметр $x \equiv r/R_s$, где R_s — гравитационный радиус (Шварцшильда) центрального тела. Как выглядит зависимость $h_e(x)$? Зарисуйте качественно. Оцените $h_e(10)$ для 50-километровой чёрной дыры при $T \sim 10^7$ К.

c) Почему гравитационный радиус Земли известен с куда более низкой относительной погрешностью, чем её масса?

Подсказка. Скорость звука $c_s^2 = \dfrac{dP}{d\rho}$, где P — давление, ρ — плотность среды.

T4. Два шага до Юпитера

Космический аппарат стартует с круговой гелиоцентрической орбиты Земли (1.00 а. е.) и движется в плоскости эклиптики. В некоторый момент аппарату сонаправленно с текущей скоростью придают добавку скорости.

a) За какое время будет осуществлён перелёт до орбиты Юпитера при добавке скорости $\Delta V_1 = 11.0$ км/с?

b) Оцените, какую добавку ΔV_2 нужно придать, чтобы долететь до орбиты Юпитера ровно за 100 суток.

c) Какую добавку скорости ΔV_3 нужно придать в условиях предыдущего пункта при достижении орбиты Юпитера, чтобы выйти на нее?

d) Представим, что на исходной гелиоцентрической орбите добавка скорости придаётся за короткое время тягой реактивного двигателя. Оцените отношение начальной и конечной массы аппарата в условиях пункта (b), если разгон осуществляется двумя ступенями равной массы, в каждой ступени масса топлива составляет 90 % массы всей ступени, а скорость истечения газа составляет 3.5 км/с.

T5. Секхулярное уравнение

Рассмотрим самогравитирующий звёздный диск галактики. Его вертикальный профиль плотности задается зависимостью

$$\rho(z) = \rho_0 \cdot \operatorname{sech}^2 \frac{z}{z_0}, \quad \operatorname{sech} x \equiv \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

a) Определите асимптотику данной зависимости при $z \to 0$ и $z \to \infty$. До какого расстояния от плоскости симметрии полученная в нуле асимптотика даёт погрешность определения плотности менее 10 %?

b) Выразите поверхностную плотность диска через ρ_0, считая z неограниченным.

c) Пусть в радиальном направлении плотность спадает экспоненциально:

$$\rho(R, z) = \rho_0 \cdot \operatorname{sech}^2 \frac{z}{z_0} \cdot \exp\left(-\frac{R}{R_e}\right).$$

Выразите центральную плотность через полную массу системы и масштабы z_0, R_e.

d) При каком отношении R_e и z_0 вдали от центра галактики одинаковое смещение по R и по z приводит к одинаковому изменению плотности? Соответствует ли такое отношение реальному отношению у галактик?

Т6. Краб в мультиволновке

После наблюдательного теста астрошкольники решили запустить космическую обсерваторию нового поколения «Чучундра», инструменты которой позволяют проводить обзор всего неба во всех диапазонах электромагнитного излучения. Особенностью обсерватории будет использование инновационных единиц измерения.

Так, спектральная плотность потока F_ν рентгеновского излучения будет измеряться в янских, а плотность потока (суб)миллиметрового излучения — в фотонах за секунду.

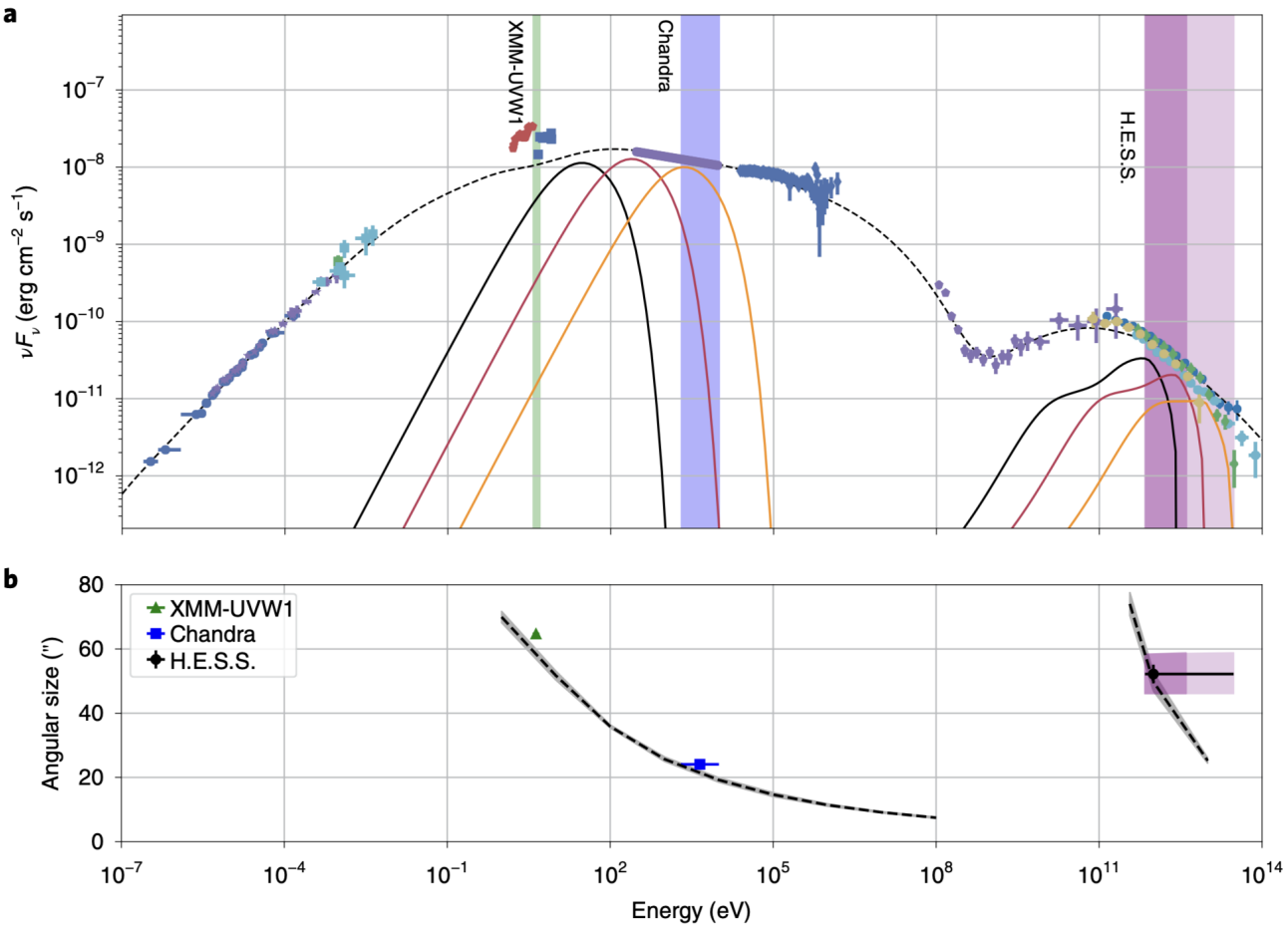


Рис. 1: Спектр излучения Крабовидной туманности (*штриховая линия*)

Источник: H.E.S.S. Collaboration. Resolving the Crab pulsar wind nebula at teraelectronvolt energies. Nat Astron 4, 167–173 (2020). https://doi.org/10.1038/s41550-019-0910-0

a) Определите соответствующие характеристики (см. выше) излучения Крабовидной туманности на длине волны 1 нм и в диапазоне от 0.32 до 3.6 мм при наблюдении на «Чучундре».

b) Оцените видимые визуальную и болометрическую звёздные величины Крабовидной туманности.

c) Две тройки непрерывных кривых на рис. 1 соответствуют спектру синхротронного излучения (слева) и фотонам, претерпевшим обратное комптоновское рассеяние (справа). Оцените энергию электронов, при рассеянии на которых получаются такие высокоэнергетичные фотоны.

T7. Картоха

Космический жук высаживается на поверхности очень прочной малой планеты, имеющей форму эллипсоида вращения с отношением полярного и экваториального радиусов 0.7. Атмосферой такая малая планета, разумеется, не обладает.

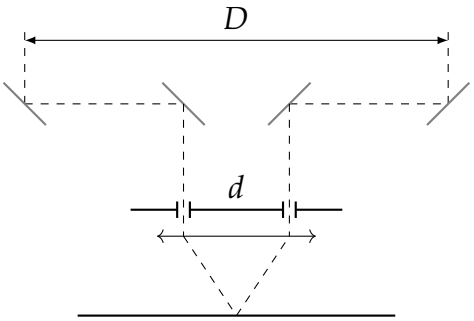
a) На какой планетоцентрической широте за сутки можно пронаблюдать 70 % небесной сферы?

b) На сколько градусов отличаются планетоцентрическая и «геодезическая» широты на этой параллели?

c) Пусть наклон экватора к плоскости орбиты малой планеты составляет $\varepsilon = 15°$. Определите отношение длины полярного круга к длине тропика.

T8. T-helper

На рисунке показана схема звёздного интерферометра Майкельсона. Лучи от звезды (штриховая линия) попадают на первую пару разнесённых на расстояние D зеркал, после чего переотражаются и попадают на экран с двумя щелями. После прохождения щелей лучи собираются в фокальную плоскость линзы, где наблюдается интерференционная картина.



Интерференционная картина

Схема была предложена Альбертом Майкельсоном в 1890 году и впервые была реализована в обсерватории Маунт-Вилсон на базе телескопа-рефлектора с диаметром зеркала 250 см. Отверстия в диафрагме находились на расстоянии $d = 114$ см, а максимальное расстояние между внешними зеркалами составляло 6.1 м. При наблюдении Бетельгейзе было обнаружено, что при увеличении расстояния между зеркалами интерференционная картина впервые пропала при $D = 3.065$ м. Оцените угловой размер Бетельгейзе.

T9. Планетарная теплоизоляция

Рассмотрим простую модель парникового эффекта, в которой тело Земли и атмосфера излучают как абсолютно чёрные тела, а поглощают в соответствии с приведёнными ниже характеристиками:

	Поверхность Земли	Атмосфера
Далёкий ИК-диапазон	Полностью поглощает	Поглощает $\tau_A = 0.80$
Оптический диапазон (с ближним УФ и ИК)	Отражает $\rho_E = 0.10 \uparrow$	Отражает $\rho_A = 0.25 \updownarrow$

a) Вычислите альбедо Земли в целом в такой модели для видимого излучения.

b) Оцените равновесные температуры поверхности Земли и атмосферы.