

## *Inaequalis Motus*, или *Эллиптический триптих*

### T1. Фестиваль суточных параллелей

- а) Отношение максимальной и минимальной скорости изменения азимута  $A$  некоторого экваториального ( $\delta = 0$ ) светила

$$R(\varphi; \delta) := \left| \frac{dA}{dt} \right|_{\max} / \left| \frac{dA}{dt} \right|_{\min} = 4.$$

Определите широту  $\varphi_A$  места наблюдения.

- б) На каких широтах хотя бы для каких-то светил выполнено  $R(\varphi; \delta) \leq 4$ ?

### T2. Коники на ипподроме

Рассмотрим движение некоторого тела в центральном гравитационном поле. В системе координат, центр которой совпадает с центром тяготения, истинная аномалия  $\nu$  имеет смысл полярного угла. Введём аналогичный угол  $\xi$ , характеризующий направление скорости  $\mathbf{v}$  тела.

- а) Известно, что

$$S(e) := \left| \frac{d\xi}{d\nu} \right|_{\max} / \left| \frac{d\xi}{d\nu} \right|_{\min} = 4.$$

Определите эксцентриситет  $e_A$  орбиты тела.

- б) Пусть  $e = e_A$ . При какой истинной аномалии  $\nu_X$

$$\left| \frac{d\xi}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_X} = \sqrt{\left| \frac{d\xi}{d\nu} \right|_{\max} \cdot \left| \frac{d\xi}{d\nu} \right|_{\min}} ?$$

Изобразите схематично положение таких точек на эллипсе.

### T3. Идеальная аналемма

Некая внесолнечная планета земного типа движется по орбите с малым эксцентриситетом  $e \ll 1$ . Плоскость экватора планеты образует с плоскостью орбиты малый угол  $\varepsilon \ll 1$  рад.

В первом приближении в плоскости  $(X; Y)$ , где  $X$  — уравнение времени, а  $Y$  — склонение местного Солнца местная аналемма описывается параметрически:

$$X(\theta) = A \sin \theta,$$

$$Y(\theta) = B \cos \theta.$$

Наблюдения показали, что максимальное горизонтальное отклонение истинного Солнца от среднего в 4 раза больше максимального вертикального:

$$U(e; \varepsilon) := \frac{X_{\max}}{Y_{\max}} = 4.$$

Площадь участка небесной сферы, ограниченного аналеммой, составляет 20 квадратных градусов. Определите эксцентриситет  $e$  и максимальную высоту верхней кульминации местного Солнца на полярном круге планеты.

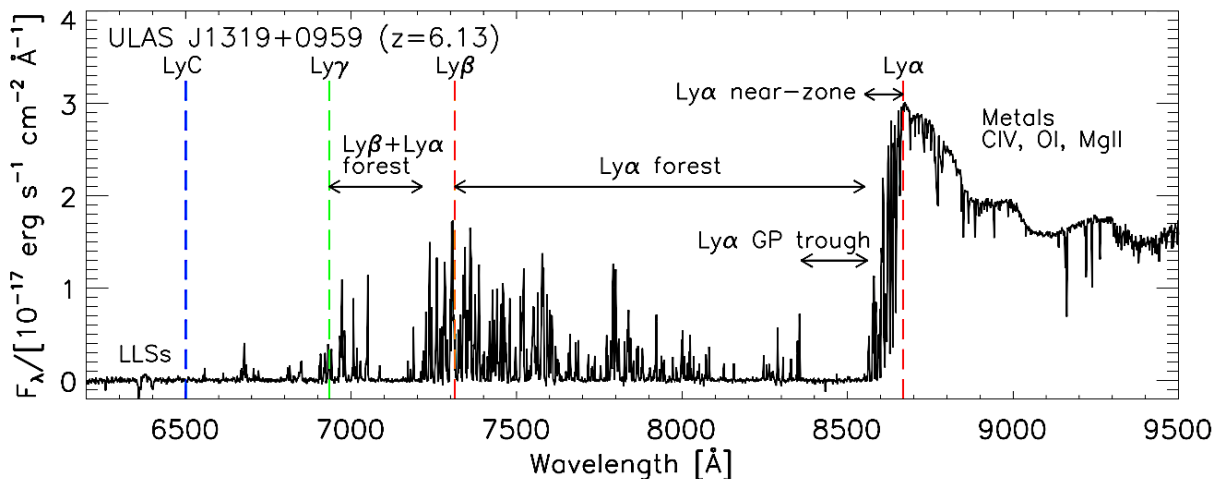
### *De Profundis Lymanicis, или Тёмный лес*

В ранней Вселенной водород после рекомбинации был в основном нейтральным. Первые источники излучения начали ионизовать межгалактическую среду; этот процесс называется реионизацией.

Между нами и далёкими квазарами встречаются участки нейтрального водорода, которые резонансно, со значительным сечением взаимодействия  $\sigma_\alpha$  (на порядки большим, например, томсоновского сечения), поглощают фотоны с энергией, соответствующей линии Лайман- $\alpha$  (длина волны  $\lambda_\alpha$ ). Если в собственной системе отсчёта облако нейтрального водорода поглощает фотоны с  $\lambda_{\text{abs}} = \lambda_\alpha$ , наблюдатель на Земле видит узкую линию поглощения на длине волны

$$\lambda_{\text{obs}}(z) = \lambda_\alpha(1 + z),$$

где  $z$  — красное смещение облака. Это приводит к возникновению множества линий поглощения от множества облаков на разных  $z$  — так называемому лесу Лайман- $\alpha$  (Ly $\alpha$  forest). При достаточно больших  $z$  лес сгущается, чему способствует и увеличение концентрации нейтрального водорода (при взгляде в прошлое), и превращается в почти сплошной провал в спектре (эффект Ганна — Питерсона, GP trough).



**Т4. Белогривые лошадки**

Наблюдается квазар с красным смещением  $z_Q = 4.0$ . В его спектре видны две узкие линии поглощения на длинах волн 486.4 нм и 510.7 нм.

- а) Считая, что обе линии обусловлены резонансным поглощением  $\text{Ly}\alpha$ , вычислите красные смещения  $z_1$  и  $z_2$  соответствующих облаков H I.

Будем работать в модели плоской Вселенной с доминированием холодной материи (модель Эйнштейна — де Ситтера:  $\Omega_m = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$ ,  $p = 0$ ). Дифференциал пути фотона в такой модели имеет вид

$$dl = \frac{c}{H_0}(1+z)^x dz.$$

- б) Определите значение показателя степени  $x$ .
- с) Оцените собственное (proper) расстояние между двумя облаками в момент, когда свет проходил через них. Считайте, что  $\Delta z = z_2 - z_1 \ll 1$ .

**Т5. Что вы мчитесь без оглядки?**

Теперь будем рассматривать не отдельные облака, а их «популяцию» на луче зрения. Обозначим за  $n_0$  среднюю концентрацию (количество атомов на единицу сопутствующего объёма<sup>1</sup>) нейтрального водорода во Вселенной, сконцентрированного в межгалактических областях H I.

- а) Вклад «слоя» межгалактической среды в оптическую толщину в линии  $\text{Ly}\alpha$  можно записать как  $d\tau(z) = n(z) \sigma_\alpha dl(z)$ . Покажите, что в модели Эйнштейна — де Ситтера и в предположении  $n_0 = \text{const}$  для квазара с красным смещением  $z_Q$  совокупная оптическая толщина в линии  $\text{Ly}\alpha$

$$\tau(z_Q) \propto (1+z_Q)^{3/2} - 1.$$

Эта величина характеризует вероятность того, что испущенный квазаром лайман-альфовский фотон будет поглощён каким-либо атомом водорода на луче зрения.

- б) Наблюдения показывают, что для квазаров с  $z_Q \approx 3$  доля дошедших до земных наблюдателей лайман-альфовских фотонов составляет в среднем  $\langle F/F_0 \rangle \approx 0.65$ . Вычислите оптическую толщину  $\tau(3)$ .
- с) Оцените, при каком красном смещении  $z_{\text{GP,est}}$  соответствующая доля  $\langle F/F_0 \rangle \sim 0.1$ .

В действительности эффект Ганна — Питерсона (почти полная непрозрачность межгалактической среды в  $\text{Ly}\alpha$ ) наблюдается уже при  $z_{\text{GP,obs}} \approx 6$ , что заметно отличается от оценки  $z_{\text{GP,est}}$ . Следовательно, доля H I в межгалактической среде при  $z \gtrsim 6$  была выше, чем предполагалось в нашей «наивной» модели с  $n_0 = \text{const}$ .  $\Rightarrow$

<sup>1</sup>Напоминание: концепция сопутствующего (comoving) расстояния «выносит за скобки» расширение Вселенной; такое расстояние не изменяется из-за расширения пространства.

- d) Оцените, во сколько раз должна быть выше эффективная концентрация нейтрального водорода при  $z \approx 6$  по сравнению с «наивной» моделью, если за репер взять одинаковое наблюдаемое значение  $\langle F/F_0 \rangle \approx 0.1$  при  $z_{\text{GP, obs}}$  и при модельном  $z_{\text{GP, est}}$ .

## Оптикус Прайм

### Т6. Вечер в большом городе

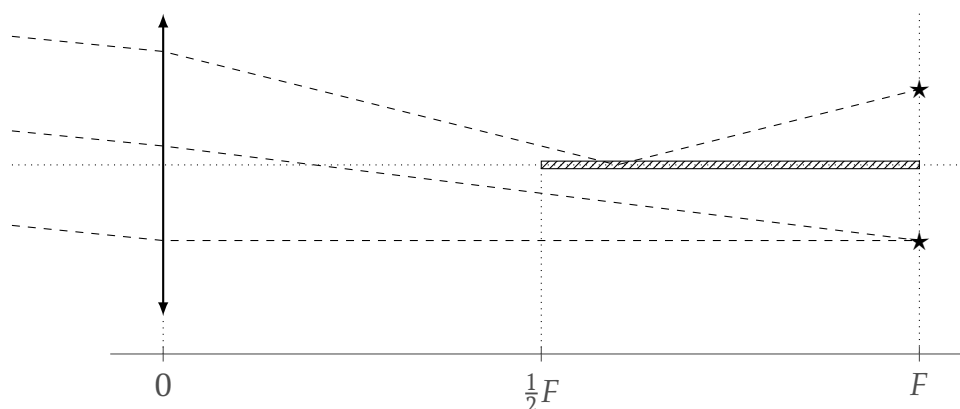
Вечером над большим городом наблюдался яркий болид длительностью  $\Delta t \approx 4$  с. Скорость входа метеорного тела в атмосферу составила  $v \approx 40$  км/с. Будем считать, что оно летело практически горизонтально на высоте  $h = 70$  км и светило достаточно равномерно.

За болидом следят три наземных наблюдателя. Для наблюдателя 1 болид пролетел через зенит строго в плоскости запад-восток. Наблюдатели 2 и 3 находятся соответственно в  $l_2 = 150$  км и в  $l_3 = 1000$  км к югу от первого.

Оцените отношения освещённостей (средних по времени пролёта), созданных болидом для наблюдателей 2 и 3, к освещённости для наблюдателя 1. Иными словами, оцените  $\langle E_2 \rangle / \langle E_1 \rangle$  и  $\langle E_3 \rangle / \langle E_1 \rangle$ .

### Т7. Фантомы мешают спать

Объектив телескопа представляет собой тонкую стеклянную ( $n = 1.5$ ) плоско-выпуклую линзу диаметром  $D$ . Радиус кривизны преломляющей поверхности линзы  $r_{\text{кр}} = 2.5D$ . В плоскости симметрии системы установлено тонкое двухстороннее плоское зеркало, как показано на схеме. Из-за этого зеркала в фокальной плоскости линзы для точечного источника может возникнуть пара изображений.



- a) Найдите вид зависимости разности звёздных величин  $\Delta m$  изображений точечного источника от его углового удаления  $\rho$  от центра поля зрения телескопа. Постройте качественный график  $\Delta m(\rho)$ .
- b) Как расстояние  $l$  между изображениями в фокальной плоскости зависит от  $\rho$ ?

## *Кому лететь, кому светить*

### **Т8. Звёздный бильярд**

Двойная система состоит из двух звёзд массами  $M_\odot$ , обращающихся вокруг общего центра масс  $C$  по круговой орбите радиусом  $a$  со скоростью  $v_\oplus = 29.8$  км/с. На систему налетает третья звезда массой  $2M_\odot$ , скорость которой на большом удалении от системы составляла  $v_\infty = v_\oplus/2$  относительно точки  $C$  и была направлена в эту точку. В результате взаимодействия одна из звёзд массой  $M_\odot$  покинула систему с минимально возможной скоростью (в той же системе отсчёта). Определите орбитальный период вновь образованной двойной системы.

### **Т9. Больше ста тысяч не собираться**

Рассмотрим модельное скопление, состоящее из  $N = 10^5$  звёзд. Предположим, что функция масс этих звёзд представляется законом Солпитера:

$$f(M) dM = k M^{-2.35} dM.$$

Известно также, что массы звёзд скопления находятся в пределах от  $0.1 M_\odot$  до  $20 M_\odot$ .

- a) Определите значение коэффициента  $k$  для данного скопления.
- b) Какую долю от общего количества составляют звёзды с массой не более  $1 M_\odot$ ?
- c) Какую долю от общего количества составляют звёзды с массой не менее  $8 M_\odot$ ?
- d) Какова полная масса скопления?
- e) Определите отношение масса–светимость  $\Upsilon = \frac{M [M_\odot]}{L [L_\odot]}$  для данного скопления.

Зависимость светимости от массы для отдельных звёзд примем следующей:

$$L/L_\odot = \begin{cases} 0.23 \cdot (M/M_\odot)^{2.3}, & M < 0.43 M_\odot; \\ (M/M_\odot)^{3.9}, & 0.43 M_\odot \leq M < 2 M_\odot; \\ 1.5 \cdot (M/M_\odot)^{3.5}, & 2 M_\odot \leq M < 20 M_\odot; \\ 32000 \cdot M/M_\odot, & 20 M_\odot \leq M. \end{cases}$$

- f) Оцените физичность полученного значения  $\Upsilon$ .