

Inaequalis Motus, или Эллиптический триптих

T1. Фестиваль суточных параллелей

- a) Отношение максимальной и минимальной скорости изменения азимута A некоторого экваториального ($\delta = 0$) светила

$$R(\varphi; \delta) := \left| \frac{dA}{dt} \right|_{\max} \Bigg/ \left| \frac{dA}{dt} \right|_{\min} = 4.$$

Определите широту φ_A места наблюдения.

- b) На каких широтах хотя бы для каких-то светил выполнено $R(\varphi; \delta) \leq 4$?

T2. Коники на ипподроме

Рассмотрим движение некоторого тела в центральном гравитационном поле. В системе координат, центр которой совпадает с центром тяготения, истинная аномалия ν имеет смысл полярного угла. Введём аналогичный угол ξ , характеризующий направление скорости \mathbf{v} тела.

- a) Известно, что

$$S(e) := \left| \frac{d\xi}{d\nu} \right|_{\max} \Bigg/ \left| \frac{d\xi}{d\nu} \right|_{\min} = 4.$$

Определите эксцентриситет e_A орбиты тела.

- b) Пусть $e = e_A$. При какой истинной аномалии ν_X

$$\left| \frac{d\xi}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_X} = \sqrt{\left| \frac{d\xi}{d\nu} \right|_{\max} \cdot \left| \frac{d\xi}{d\nu} \right|_{\min}} ?$$

Изобразите схематично положение таких точек на эллипсе.

T3. Идеальная аналемма

Некая внесолнечная планета земного типа движется по орбите с малым эксцентриситетом $e \ll 1$. Плоскость экватора планеты образует с плоскостью орбиты малый угол $\varepsilon \ll 1$ рад.

В первом приближении в плоскости $(X; Y)$, где X — уравнение времени, а Y — склонение местного Солнца местная аналемма описывается параметрически:

$$X(\theta) = A \sin \theta,$$

$$Y(\theta) = B \cos \theta.$$

Наблюдения показали, что максимальное горизонтальное отклонение истинного Солнца от среднего в 4 раза больше максимального вертикального:

$$U(e; \varepsilon) := \frac{X_{\max}}{Y_{\max}} = 4.$$

Площадь участка небесной сферы, ограниченного аналеммой, составляет 20 квадратных градусов. Определите эксцентриситет e и максимальную высоту верхней кульминации местного Солнца на полярном круге планеты.

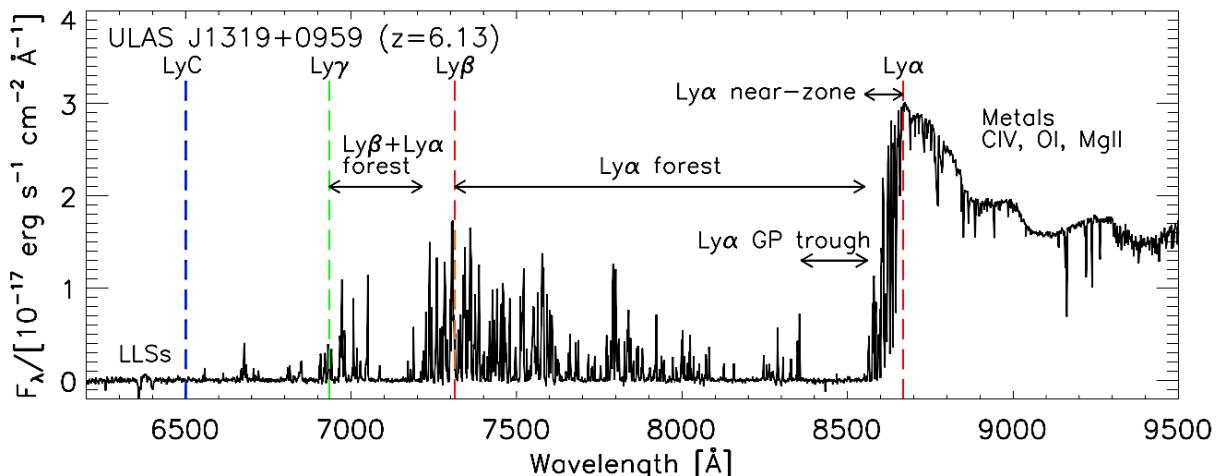
De Profundis Lymanicis, или Тёмный лес

В ранней Вселенной водород после рекомбинации был в основном нейтральным. Первые источники излучения начали ионизовать межгалактическую среду; этот процесс называется реионизацией.

Межд нами и далёкими квазарами встречаются участки нейтрального водорода, которые резонансно, со значительным сечением взаимодействия σ_α (на порядки большим, например, томсоновского сечения), поглощают фотоны с энергией, соответствующей линии Лайман- α (длина волны λ_α). Если в собственной системе отсчёта облако нейтрального водорода поглощает фотоны с $\lambda_{\text{abs}} = \lambda_\alpha$, наблюдатель на Земле видит узкую линию поглощения на длине волны

$$\lambda_{\text{obs}}(z) = \lambda_\alpha(1 + z),$$

где z — красное смещение облака. Это приводит к возникновению множества линий поглощения от множества облаков на разных z — так называемому лесу Лайман- α (Ly α forest). При достаточно больших z лес стягивается, чему способствует и увеличение концентрации нейтрального водорода (при взгляде в прошлое), и превращается в почти сплошной провал в спектре (эффект Ганна — Питерсона, GP trough).



T4. Белогривые лошадки

Наблюдается квазар с красным смещением $z_Q = 4.0$. В его спектре видны две узкие линии поглощения на длинах волн 486.4 нм и 510.7 нм.

- a) Считая, что обе линии обусловлены резонансным поглощением Ly α , вычислите красные смещения z_1 и z_2 соответствующих облаков H I.

Будем работать в модели плоской Вселенной с доминированием холодной материи (модель Эйнштейна – де Ситтера: $\Omega_m = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$, $p = 0$). Дифференциал пути фотона в такой модели имеет вид

$$dl = \frac{c}{H_0} (1+z)^\nu dz.$$

- b) Определите значение показателя степени ν .
- c) Оцените собственное (proper) расстояние между двумя облаками в момент, когда свет проходил через них. Считайте, что $\Delta z = z_2 - z_1 \ll 1$.

T5. Что вы мчитесь без оглядки?

Теперь будем рассматривать не отдельные облака, а их «популяцию» на луче зрения. Обозначим за n_0 среднюю концентрацию (количество атомов на единицу сопутствующего объёма¹) нейтрального водорода во Вселенной, сконцентрированного в межгалактических областях H I.

- a) Вклад «слоя» межгалактической среды в оптическую толщу в линии Ly α можно записать как $d\tau(z) = n(z) \sigma_\alpha dl(z)$. Покажите, что в модели Эйнштейна – де Ситтера и в предположении $n_0 = \text{const}$ для квазара с красным смещением z_Q совокупная оптическая толщина в линии Ly α

$$\tau(z_Q) \propto (1+z_Q)^{3/2} - 1.$$

Эта величина характеризует вероятность того, что испущенный квазаром лайман-альфовский фотон будет поглощён каким-либо атомом водорода на луче зрения.

- b) Наблюдения показывают, что для квазаров с $z_Q \approx 3$ доля дошедших до земных наблюдателей лайман-альфовских фотонов составляет в среднем $\langle F/F_0 \rangle \approx 0.65$. Вычислите оптическую толщину $\tau(3)$.
- c) Оцените, при каком красном смещении $z_{GP,\text{est}}$ соответствующая доля $\langle F/F_0 \rangle \sim 0.1$.

В действительности эффект Ганна – Питерсона (почти полная непрозрачность межгалактической среды в Ly α) наблюдается уже при $z_{GP,\text{obs}} \approx 6$, что заметно отличается от оценки $z_{GP,\text{est}}$. Следовательно, доля H I в межгалактической среде при $z \gtrsim 6$ была выше, чем предполагалось в нашей «наивной» модели с $n_0 = \text{const}$. \Rightarrow

¹Напоминание: концепция сопутствующего (comoving) расстояния «выносит за скобки» расширение Вселенной; такое расстояние не изменяется из-за расширения пространства.

- d) Оцените, во сколько раз должна быть выше эффективная концентрация нейтрального водорода при $z \approx 6$ по сравнению с «наивной» моделью, если за репер взять одинаковое наблюдаемое значение $\langle F/F_0 \rangle \approx 0.1$ при $z_{GP, obs}$ и при модельном $z_{GP, est}$.

Оптикус Прайм

T6. Вечер в большом городе

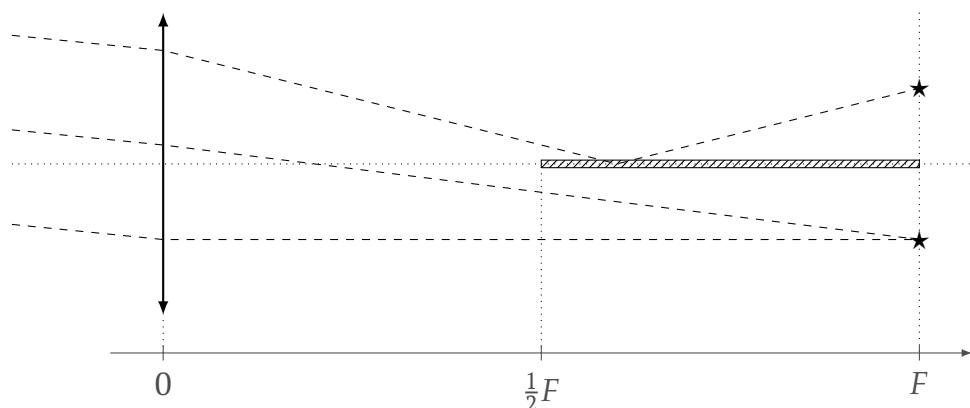
Вечером над большим городом наблюдался яркий болид длительностью $\Delta t \approx 4$ с. Скорость входа метеорного тела в атмосферу составила $v \approx 40$ км/с. Будем считать, что оно летело практически горизонтально на высоте $h = 70$ км и светило достаточно равномерно.

За болидом следят три наземных наблюдателя. Для наблюдателя 1 болид пролетел через зенит строго в плоскости запад-восток. Наблюдатели 2 и 3 находятся соответственно в $l_2 = 150$ км и в $l_3 = 1000$ км к югу от первого.

Оцените отношения освещённостей (средних по времени пролёта), созданных болидом для наблюдателей 2 и 3, к освещённости для наблюдателя 1. Иными словами, оцените $\langle E_2 \rangle / \langle E_1 \rangle$ и $\langle E_3 \rangle / \langle E_1 \rangle$.

T7. Фантомы мешают спать

Объектив телескопа представляет собой тонкую стеклянную ($n = 1.5$) плоско-выпуклую линзу диаметром D . Радиус кривизны преломляющей поверхности линзы $r_{kp} = 2.5D$. В плоскости симметрии системы установлено тонкое двухстороннее плоское зеркало, как показано на схеме. Из-за этого зеркала в фокальной плоскости линзы для точечного источника может возникнуть пара изображений.



- a) Найдите вид зависимости разности звёздных величин Δm изображений точечного источника от его углового удаления ρ от центра поля зрения телескопа. Постройте качественный график $\Delta m(\rho)$.
- b) Как расстояние l между изображениями в фокальной плоскости зависит от ρ ?

Кому лететь, кому светить

T8. Звёздный бильярд

Двойная система состоит из двух звёзд массами \mathfrak{M}_\odot , обращающихся вокруг общего центра масс C по круговой орбите радиусом a со скоростью $v_\oplus = 29.8$ км/с. На систему налетает третья звезда массой $2\mathfrak{M}_\odot$, скорость которой на большом удалении от системы составляла $v_\infty = v_\oplus/2$ относительно точки C и была направлена в эту точку. В результате взаимодействия одна из звёзд массой \mathfrak{M}_\odot покинула систему с минимально возможной скоростью (в той же системе отсчёта). Определите орбитальный период вновь образованной двойной системы.

T9. Больше ста тысяч не собираться

Рассмотрим модельное скопление, состоящее из $N = 10^5$ звёзд. Предположим, что функция масс этих звёзд представляется законом Солпитера:

$$f(\mathfrak{M}) d\mathfrak{M} = k \mathfrak{M}^{-2.35} d\mathfrak{M}.$$

Известно также, что массы звёзд скопления находятся в пределах от $0.1\mathfrak{M}_\odot$ до $20\mathfrak{M}_\odot$.

- a) Определите значение коэффициента k для данного скопления.
- b) Какую долю от общего количества составляют звёзды с массой не более $1\mathfrak{M}_\odot$?
- c) Какую долю от общего количества составляют звёзды с массой не менее $8\mathfrak{M}_\odot$?
- d) Какова полная масса скопления?
- e) Определите отношение масса–светимость $\Upsilon = \frac{\mathfrak{M} [\mathfrak{M}_\odot]}{L [L_\odot]}$ для данного скопления.

Зависимость светимости от массы для отдельных звёзд примем следующей:

$$L/L_\odot = \begin{cases} 0.23 \cdot (\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot)^{2.3}, & \mathfrak{M} < 0.43\mathfrak{M}_\odot; \\ (\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot)^{3.9}, & 0.43\mathfrak{M}_\odot \leq \mathfrak{M} < 2\mathfrak{M}_\odot; \\ 1.5 \cdot (\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot)^{3.5}, & 2\mathfrak{M}_\odot \leq \mathfrak{M} < 20\mathfrak{M}_\odot; \\ 32000 \cdot \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot, & 20\mathfrak{M}_\odot \leq \mathfrak{M}. \end{cases}$$

- f) Оцените физичность полученного значения Υ .