

Т1. Железная воля

В кернах земного льда площадью 100 см^2 обнаружено $2 \cdot 10^5$ атомов радиоактивного изотопа железа-60, высаженных за достаточно короткий промежуток времени. На Земле этот изотоп не образуется, и практически единственным его источником считаются взрывы сверхновых. Период полураспада ^{60}Fe составляет 2.62 млн лет.

Предположим, что сверхновая, синтезировавшая этот изотоп, взорвалась 40 млн лет назад и выбросила в космос массу ^{60}Fe , равную 0.01 массы Солнца. Эффективность выживания пыли (доля выброшенного железа, долетевшего до Земли в твёрдых частицах) равна 10 %.

Оцените расстояние до сверхновой.

Т2. Спирализация

Широко известно, что тесные двойные системы излучают гравитационные волны. Из общей теории относительности средний темп потери энергии системой через гравитационные волны при малом эксцентриситете орбит тел описывается выражением

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{1}{5} L_{\text{PI}} \cdot \eta^2 \cdot \left(\frac{r_g}{a} \right)^5,$$

где

- L_{PI} — планковская светимость,
- $\eta = \mu/M$ — отношение приведённой массы к суммарной массе системы,
- r_g — гравитационный (шварцшильдовский) радиус системы (суммарной массы),
- a — большая полуось относительной орбиты.

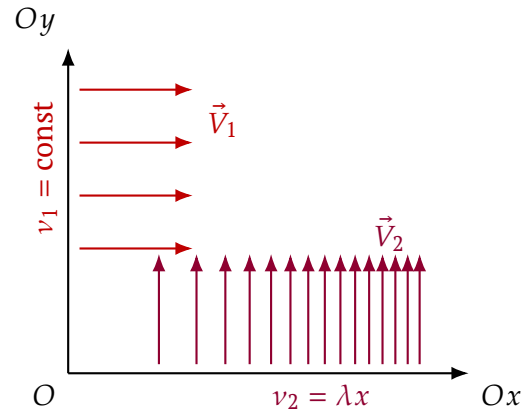
Рассмотрим пару нейтронных звёзд массами по $2M_{\odot}$ каждая, обращающихся по круговой орбите вокруг общего центра масс.

- a) Найдите наименьшую большую полуось системы a_0 , при которой время до слияния звёзд за счёт гравитационно-волновых потерь превышает возраст Вселенной. Объясните физический смысл этого масштаба.
- b) Для начальной большой полуоси $a_1 = a_0/1000$ оцените:
 - время до слияния τ ,
 - число оборотов N , которое система совершит до слияния.
- c) Обсудите, насколько оправдано использование ньютоновского приближения в данной задаче.

Т3. Центроид, ответьте

Центроидом системы будем называть точку, движущуюся со средней скоростью для данного элементарного объёма (в 3D) или площади (в 2D). Рассмотрим следующую двумерную задачу.

Пусть ось Oy выступает источником потока одинаковых невзаимодействующих частиц линейной плотности $v_1 = \text{const}$, движущихся со скоростью $\vec{V}_1 \uparrow\uparrow Ox$, ось Ox выступает источником потока таких же частиц со скоростью $\vec{V}_2 \uparrow\uparrow Oy$ и плотностью $v_2 = \lambda x$.



- Получите выражение для компонент скорости центраида в зависимости от координаты $x > 0$. Чему в пределе равна скорость центраида при $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow +\infty$?
- Получите уравнение для траектории центраида, то есть такой линии, которая в каждой точке касается вектора скорости центраида.
- Представим теперь, что $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2|$, но линейные плотности имеют вид $v_1 = \alpha y$, $v_2 = -\beta x$, где $\alpha, \beta > 0$.
 - Каков естественный физический смысл отрицательной линейной плотности частиц?
 - Каково в данном случае уравнение траектории центраида?

Т4. Вакуумная линза

В межзвёздной плазме с концентрацией частиц 10^4 см^{-3} за счёт давления излучения и звёздного ветра образовалась сферическая вакуумная полость радиусом 1 пк. На оси симметрии шара находится далёкий квазар. Наблюдения проводятся в радиодиапазоне на длине волны 10 метров; наблюдатель находится на той же оси на расстоянии 980 пк от центра каверны.

- Каким будет вид изображения квазара, которое зафиксирует телескоп?
- Во сколько раз ярче или тусклее окажется радиоизображение квазара из-за наличия вакуумной полости?

Подсказка. Показатель преломления плазмы определяется формулой

$$n = \sqrt{1 - \frac{e^2 N_e}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e v^2}}$$

где N_e — концентрация электронов, v — частота наблюдения.

T5. Они заряжают пушку!

На детекторе космических лучей *High Resolution Fly's Eye* («Глаз мухи»), расположенном в штате Юта, 15 октября 1991 года была зарегистрирована частица космических лучей с энергией $E \approx 50$ Дж. За столь невероятно огромную для элементарной частицы энергию она получила название *Oh-My-God* (OMG, «О боже мой!»).

Помечтаем, что человечество изобрело OMG-пушку, позволяющую направлять в заданном направлении OMG-частицы — протоны с энергией E .

- С какой скоростью должен лететь теннисный мяч, чтобы иметь такую же кинетическую энергию? Масса теннисного мяча составляет около 58 г. Ответ выразите в км/ч.
- На какое расстояние OMG-частица отстала бы от фотона за время путешествия от Земли:
 - до Альфы Центавра;
 - до галактики Андромеды?
- Вычислите продолжительность полёта OMG-частицы от Земли до квазара 3C 273 ($z = 0.158$) в собственной системе отсчёта частицы.

T6. Нужно сделать правильные выводы

При выводе геостационарного спутника на орбиту была допущена техническая ошибка, и наклонение орбиты увеличилось до $i = 10.0^\circ$ (большая полуось и эксцентриситет при этом остались корректными). В 12^h 00^m по всемирному времени спутник находился в восходящем узле орбиты над городом Понтианак в Индонезии ($\varphi_0 = 0^\circ 0'$ ш., $\lambda_0 = 109^\circ 20'$ в. д.).

- Опишите качественно и количественно траекторию подспутниковой точки на поверхности Земли.
- Пусть спутник наблюдается из Петропавловска-Камчатского ($\varphi_1 = 53^\circ 01'$ с. ш., $\lambda_1 = 158^\circ 39'$ в. д.). Определите с точностью до нескольких минут гражданское время, когда спутник достигнет максимальной высоты. Какова эта высота?
Петропавловск-Камчатский находится в часовой зоне МСК+9.

T7. $\Lambda = \text{CDM}$

С течением времени Вселенная изотропно и однородно расширяется, в результате чего её плотность изменяется, причём по-разному для каждой из компонент: материи m (включая холодную тёмную материю), излучения r и тёмной энергии Λ .

Оцените, как давно плотности материи и тёмной энергии в нашей Вселенной были равны. Плотности компонент относительно критической плотности составляют в настоящее время $\Omega_{0,m} = 0.31$, $\Omega_{0,r} = 9 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_{0,\Lambda} = 0.69$.

Вселенную считайте плоской ($\Omega_0 = 1$).

T8. Тот же диск, только в профиль

Распределение плотности массы ρ в дисках галактик может описываться следующей моделью в цилиндрических координатах:

$$\rho(R, z) = \frac{\rho_0 \cdot e^{-R/h}}{\cosh^2 \frac{z}{z_0}},$$

где h и z_0 — радиальный и вертикальный масштаб соответственно, ρ_0 — центральная плотность, $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ — гиперболический косинус.

Астрономы наблюдают линзовидную галактику «с ребра», то есть в плоскости диска. Расстояние до галактики составляет 20 Мпк. Считайте, что галактика целиком представляет собой диск из звёзд, а пыли в ней нет. Отношение массы к светимости в фильтре V постоянно и равно $\gamma = 3M_{\odot}/L_{\odot,V}$. В этом фильтре абсолютная звёздная величина Солнца составляет $V_{\odot} = +4.8^m$.

Поверхностная яркость в фильтре V , наблюдаемая в центре галактики, составляет $\mu_0 = 20.0 \text{ mag}/\square''$. Изофота $\mu = 25.0 \text{ mag}/\square''$ в фильтре V имеет размер $10'$ в направлении плоскости диска и $2'$ в вертикальном направлении.

- Определите, какой функцией описывается распределение поверхностной яркости галактики в картинной плоскости.
- Найдите полную массу и светимость галактики.
- Очень далёкая цивилизация наблюдает эту же галактику «плашмя», находясь в 20 Мпк от неё. Какую центральную поверхностную яркость и диаметр 25-й изофоты в фильтре V они увидят у этой же галактики?

Подсказка. Можно использовать тождество

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{h}\right) dy = 2|x| \cdot K_1\left(\frac{|x|}{h}\right),$$

где K_1 — модифицированная функция Бесселя второго рода.

В таблице представлены значения $uK_1(u)$ для некоторых значений u :

u	$uK_1(u)$	u	$uK_1(u)$
4.0	0.0499	6.0	0.0081
4.5	0.0318	6.5	0.0051
5.0	0.0202	7.0	0.0032
5.5	0.0127	7.5	0.0020

Т9. Пять колец

Каменная экзопланета имеет радиус $R_p = 1.3R_\oplus$, обладает изотермической азотной атмосферой с температурой $T_p = 320$ К, и ускорением свободного падения у поверхности $g_p = 10$ м/с². Родительская звезда является красным карликом с радиусом $R_\star = 0.20R_\odot$.

- а) При наблюдении транзита в некоторой молекулярной полосе атмосфера планеты становится непрозрачной для света звезды примерно до высоты $5H$, где H — характерная высота атмосферы.

Оцените соответствующее изменение $\Delta\delta$ транзитной глубины δ (относительного изменения потока излучения звезды) относительно окрестного континуума, обусловленное наличием атмосферного поглощения в указанной полосе.

- б) При однократном наблюдении транзита транзитная глубина измеряется с неопределённостью 20 ppm на уровне 1σ .

Сколько одинаковых транзитов необходимо пронаблюдать для обнаружения молекулярной полосы поглощения атмосферы на уровне 5σ ?

Подсказка: $1 \text{ ppm} = 10^{-6}$.

Т10. Сириус вновь воссияет над нами

Оцените вероятность увидеть Сириус ($\alpha = 06^{\text{h}}45^{\text{m}}$, $\delta = -16^\circ 42'$) из Москвы ($55^\circ 45'$ с. ш.) в произвольный момент на достаточно большом промежутке времени. Собственным движением и лучевой скоростью Сириуса, а также звёздной эволюцией можно пренебречь. Наклон плоскости земного экватора к эклиптике считайте постоянным.