

**T1. Another One Bites the Sun**

Космический аппарат двигался вокруг Солнца по эллиптической орбите ( $a = 1.5$  а. е.,  $e = 0.4$ ). В момент прохождения афелия эллиптической орбиты  $t = 0$  аппарату стали придавать постоянное по модулю ускорение  $\mathbf{a}_n$ , направленное в плоскости орбиты тела под постоянным углом  $\varphi \neq 0$  к направлению скорости  $\mathbf{v}$ :

$$\frac{\mathbf{a}_n \times \mathbf{v}}{|\mathbf{a}_n| \cdot |\mathbf{v}|} = \text{const},$$
$$|\mathbf{a}_n| = 0.1 g_\pi = \text{const},$$

где  $g_\pi$  — величина гравитационного ускорения к Солнцу в перигеии начальной орбиты.

- Какие физические величины сохраняются при возмущённом движении аппарата, если  $|\varphi| = 90^\circ$ ?
- На какое *максимальное* гелиоцентрическое расстояние может удалиться аппарат, если в момент  $t = 0$  ускорение было направлено точно *от Солнца*?
- На какое *минимальное* гелиоцентрическое расстояние может приблизиться аппарат, если в момент  $t = 0$  ускорение было направлено точно *к Солнцу*?
- Постройте качественно *на одном графике* зависимости величины скорости аппарата от гелиоцентрического расстояния для каждого из рассмотренных случаев.

**T2. Seven Lunation Army**

Достаточно лаконично основные положения о движении Луны сформулированы в так называемых законах Кассини:

- Луна находится в спин-орбитальном резонансе 1 : 1.
  - Ось вращения Луны составляет постоянный угол с плоскостью эклиптики ( $88.5^\circ$ ).
  - Плоскость, содержащая нормаль к плоскости эклиптики и нормаль к плоскости орбиты Луны, содержит также ось вращения Луны.
- Покажите, что равномерно вращающаяся Луна сохраняет почти постоянную ориентацию относительно «пустого» фокуса своей эллиптической орбиты.
  - Оцените величины либрации по долготе и по широте.
  - Оцените, какую долю поверхности Луны можно наблюдать с Земли и сколько времени нужно, чтобы пронаблюдать всю «видимую половину» Луны.

### T3. Another Ray of Sun

Федеральная комиссия по связи США одобрила заявку калифорнийского стартапа Reflect Orbital на запуск и эксплуатацию экспериментального спутника Eärendil-1 для отражения солнечного света на ночную сторону Земли. В рамках проекта предлагается вывести на низкую околоземную полярную орбиту (высота  $h = 625$  км) спутник с тонкоплёночным отражателем размером  $18 \times 18$  метров.

- Оцените размер  $R$  солнечного «зайчика» на поверхности Земли и соответствующую плотность потока энергии отражённого солнечного света, считая плёнку идеальным плоским зеркалом.
- Какую долю орбитального периода спутник в принципе возможно наблюдать в какой-либо точке земной поверхности?

Специалисты Европейской Южной обсерватории бьют тревогу: “mirrors in space pose grave threat to the night sky”<sup>1,2</sup>. Ожидается, что отражающая поверхность будет неидеальной и часть света будет рассеиваться.

- Рассмотрим следующую модель отражателя: пусть 90 % падающей энергии отражается плёнкой как идеальным плоским зеркалом, а 10 % рассеивается по закону Ламберта. Оцените видимую звёздную величину спутника на расстоянии  $10R$  от центра «зайчика».

### T4. You Spin Star Round

Звезда в диске Млечного Пути движется по круговой орбите радиуса  $R$  со скоростью  $V$ . Расстояние до Солнца равно  $d$ , галактическая долгота звезды  $l$ . Радиус орбиты и скорость движения Солнца равны  $R_0$  и  $V_0$ . Потенциал Галактики считайте ротационно-симметричным.

- Выразите лучевую  $V_r$  и трансверсальную  $V_t$  компоненты наблюдаемой из гелиоцентра скорости звезды как функции указанных параметров.
- Для малых расстояний  $d \ll R_0$  получите зависимости

$$V_r \approx A f_1(nl) \cdot d, \quad V_t \approx (A f_2(nl) + B) \cdot d,$$

определите вид функций  $f_1$  и  $f_2$ , а также значение коэффициента  $n$ .

- Пусть вещество распределено по закону  $\rho = \rho_c \left(\frac{r_c}{r}\right)^\alpha$ ,  $\alpha < 3$ .

Выразите  $A$  и  $B$  для такого распределения массы.

- Пусть наблюдение проводится на долготе  $l = 45^\circ$ , и при этом  $V_r = -V_t$ .

Определите показатель  $\alpha$ .

<sup>1</sup><https://www.eso.org/public/news/eso2607/>

<sup>2</sup>См. также Bassa, Hainaut & Galadí-Enríquez 2022.

### T5. Bowed, Bent, Broken

С учётом основных результатов общей теории относительности движение света вблизи массивного тела можно приближённо описывать как его распространение в неоднородной оптической среде. В слабом гравитационном поле сферически-симметричной массы  $M$  метрика Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  — полярное расстояние (масса находится в начале координат);  $\Phi(r) = -GM/r$  — гравитационный потенциал,  $|\Phi/c^2| \ll 1$ .

Рассмотрим световой луч, проходящий мимо тела на прицельном расстоянии  $b$ . Ось  $z$  направим вдоль невозмущённого луча, поэтому в первом приближении  $r = \sqrt{b^2 + z^2}$ . Источник света находится в точке  $z = -z_1$ , а наблюдатель — в точке  $z = z_2$ .

*Указание.* Во всех вычислениях достаточно учитывать только величины первого порядка по  $GM/(c^2 r)$ .

- а) Покажите, что время прохождения светом малого участка пространственной длины  $dl$  можно представить в виде

$$dt = \frac{n(r)}{c} dl,$$

где  $n(r)$  играет роль эффективного показателя преломления.

Найдите  $n(r)$  и качественно изобразите его зависимость от  $r$ .

- б) Найдите задержку  $\Delta t$  во времени распространения светового сигнала, обусловленную наличием гравитирующей массы. С учётом  $z_1, z_2 \gg b$  запишите результат в форме

$$\Delta t \approx f(M) \cdot \ln g(z_1, z_2, b).$$

Полученная величина представляет собой первое приближение к задержке Шапиро. Вклад, обусловленный тем, что сам луч «изгибается» и проходит к наблюдателю по более длинной траектории, имеет более высокий порядок малости и в данной задаче не учитывается.

- с) Выразите зависимость величины задержки от углового расстояния  $\theta$  между источником света и гравитирующей массой на небе наблюдателя.
- д) Вычислите максимальную задержку Шапиро из-за гравитации Солнца, которую можно *наблюдать* на Земле, а также оцените максимальное отклонение, которое эффект Шапиро вносит в измеряемые методом радиолокации расстояния до внутренних планет Солнечной системы.

### T6. Fly Me from the Moon

Рассмотрим старт ракеты с поверхности Луны. Ракета имеет начальную массу  $m_0$  и реактивные двигатели, допускающие заданный постоянный расход топлива  $\mu$  и выбрасывающие струю газов со скоростью  $u$  относительно ракеты. Конечная масса ракеты без топлива равна  $m_1$ .

Найдите максимальную высоту  $H$ , которую сможет достичь ракета при оптимальном выборе  $\mu$ .

### T7. New Burn

Если перенос энергии внутри звезды осуществляется лучистым переносом, светимость  $L(r)$  на некотором радиусе  $r$  внутри звезды можно выразить так:

$$L(r) = -4\pi r^2 \frac{16\sigma}{3} \frac{T(r)^3}{\rho(r)\kappa(r)} \frac{dT(r)}{dr},$$

где  $\rho$  — плотность,  $T$  — температура,  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана, а непрозрачность  $\kappa$  задаётся выражением

$$\kappa(r) \propto \rho(r)T(r)^{-3.5}.$$

- Используя эти два уравнения, покажите с помощью метода подобия, что при сжатии звезды на стадии до главной последовательности её светимость меняется с температурой в соответствии с соотношением  $L \propto T_{\text{eff}}^{4/5}$ .
- Путь, который проходит сжимающаяся звезда, приближаясь к главной последовательности на диаграмме Герцшпрунга — Рассела, называется треком Хеньи. Компьютерные расчёты показывают, что зависимость  $L \propto T_{\text{eff}}^{4/5}$  является удовлетворительным приближением для треков Хеньи массивных звёзд, но становится постепенно всё более плохим приближением для звёзд с массами  $M \lesssim 2M_{\odot}$ .

Какие выводы вы можете сделать из этого утверждения?

### T8. Nothing Breaks Like a Sphere

На сфере заданы системы координат  $(\alpha_1, \delta_1)$  и  $(\alpha_2, \delta_2)$  типа экваториальных координат с северными полюсами  $P_1$  и  $P_2$ . Координаты  $P_2$  в системе  $P_1$  равны  $(60^\circ, 70^\circ)$ . Первая координата  $P_1$  в системе  $P_2$  равна  $60^\circ$ .

- Покажите, что преобразование координат между описанными системами соответствует повороту на  $180^\circ$  вокруг некоторого вектора  $\mathbf{n}$ . Что это за вектор?
- Запишите формулы преобразования в  $(\alpha_1, \delta_1)$  из координат  $(\alpha_2, \delta_2)$ .
- Что собой представляет геометрическое место точек, вдвое более близких к  $P_2$ , чем к  $P_1$ ? Является ли оно окружностью?

### T9. Heist the Colors

Ахроматический объектив состоит из двух склеенных линз: равновыпуклой линзы из крона и линзы из флинта. Воздушный зазор между линзами отсутствует.

Дисперсия стекол описывается формулой

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}.$$

Показатели преломления для линий водорода  $H_\alpha$  и  $H_\beta$  приведены в таблице справа. Фокусное расстояние объектива для обеих длин волн должно составлять  $F = 2000$  мм. Определите радиусы кривизны поверхностей линз и оптическую силу объектива в зелёной области спектра.

| Стекло | $n(\lambda_1)$ | $n(\lambda_2)$ |
|--------|----------------|----------------|
| Крон   | 1.5143         | 1.5223         |
| Флинт  | 1.6122         | 1.6321         |

### T10. Hora de la Luna

Наблюдение солнечного затмения 29 мая 1919 года позволило впервые экспериментально подтвердить общую теорию относительности. Это затмение примечательно также тем, что оказалось самым длинным за предшествующие ему 500 лет.

В этой задаче рассматривается момент наибольшего затмения, который наступил в 13:08:55 UT. В таблице представлены геоцентрические координаты центров Солнца и Луны в указанный момент. Система координат правая прямоугольная декартова. Ось  $x$  направлена в точку ( $0^\circ$  ш.,  $0^\circ$  д.), ось  $z$  — к Северному полюсу.

| Тело   | $x$ , м               | $y$ , м                | $z$ , м               |
|--------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Солнце | $1.342 \cdot 10^{11}$ | $-4.327 \cdot 10^{10}$ | $5.557 \cdot 10^{10}$ |
| Луна   | $3.185 \cdot 10^8$    | $-1.025 \cdot 10^8$    | $1.298 \cdot 10^8$    |

Всемирное звёздное время на  $0^h$  UT 1 января 1919 г. — 06:38:22.

- Вычислите геоцентрические экваториальные координаты (склонения и прямые восхождения) центров Солнца и Луны в момент наибольшего затмения.
- Найдите географические координаты точки, в которой наблюдалось наибольшее затмение.
- Определите расстояние между подсолнечной точкой в момент наибольшего затмения и точкой, в которой это наибольшее затмение наблюдалось.