МОСКОВСКАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2015–2016 уч. г.
ОЧНЫЙ ЭТАП
8-9 классы

Критерии оценивания

Задание 1

Условие. Согласно данным, полученным аппаратом «Галилео», который исследовал юпитерианскую систему с 1995 по 2003 год, на Европе под поверхностным слоем льда есть огромный глубокий водный океан. Глубина этого океана вместе со слоем поверхностного льда в среднем составляет 100 километров. Где больше воды: на Европе или на Земле?

Решение. Сравним объёмы воды на Земле и Европе. Пренебрежём различием плотности воды и поверхностного льда и приблизительно оценим объём воды. Пусть R_1 – расстояние от центра Европы до дна океана, а R = 1560 км – её радиус. Тогда объём, занимаемый океаном, составляет

$$V_E = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - R_1^3\right) = \frac{4}{3}\pi\left(3R^2h - 3Rh^2 + h^3\right) \approx 4\pi R^2 h \approx 3\cdot 10^9 \text{ км}^3.$$

Для приближённой оценки объёма воды на Земле пренебрежём полярными льдами (запас которых на 2 порядка меньше) и будем считать, что океаны занимают 70 % земной поверхности при средней глубине 3,5 км:

$$V_З \approx 0{,}7\cdot 4\pi R_З^2 h_З \approx 1{,}2\cdot 10^9 \text{ км}^3.$$

Таким образом, воды на Европе примерно вдвое больше, чем на Земле.
Можно пойти немного иным путём. Если всю воду Европы перенести на Землю, то она заполнит океан глубиной

$$h_З' = \frac{V_E}{0{,}7\cdot 4\pi R_З^2} \approx 8{,}4 \text{ км}.$$

Это очень большие глубины, которые встречаются лишь в отдельных океанах. Отсюда можно сделать вывод, что запасы воды на Европе больше.
Не следует забывать, что эти оценки сделаны очень приближённо.

Рекомендации для жюри. Правильный подход к вычислению объёмов оценивается в 1 балл. Вычисление запасов воды на Земле и Европе оценивается по одному баллу. Правильный вывод о соотношении количества воды оценивается ещё в 1 балл. Следует заметить, что оценка средней глубины океана учащимися может быть различной, и если она не совпадает с данной, но правдоподобна, оценку снижать не следует. Максимум за задачу – 4 балла.

Задание 2

Условие. Когда световой день в Москве был (или будет) длиннее: 23 сентября 2015 года или 23 сентября 2016 года? Ответ обоснуйте.

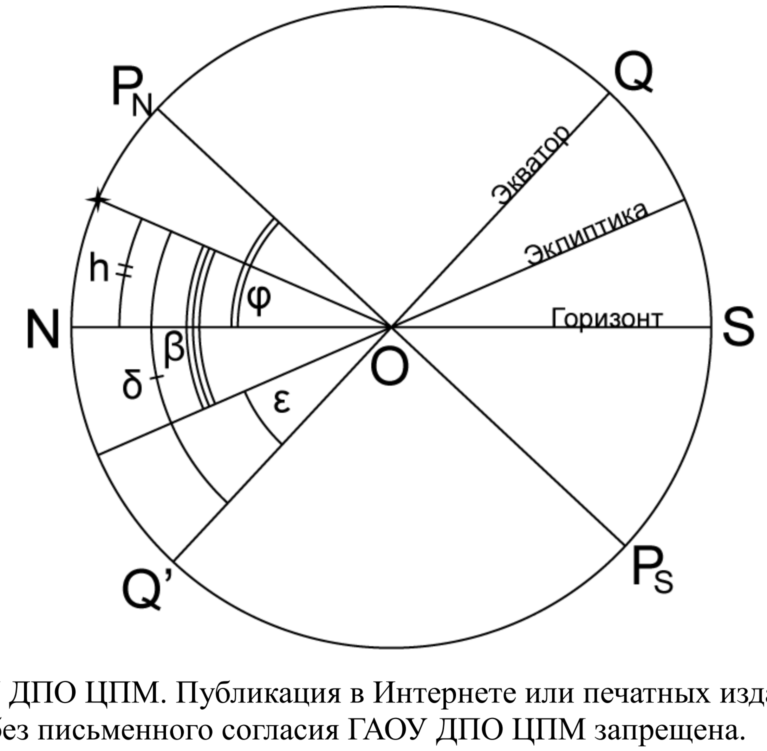
Решение. Обычный календарный год примерно на четверть суток короче, чем тропический. Поэтому за календарный год Солнце чуть-чуть не успевает завершить круг своего годичного перемещения по небесной сфере. Но 2016 год – високосный. Он на сутки длиннее обычного года и на $\frac{3}{4}$ суток длиннее тропического. Значит, спустя високосный год Солнце пройдёт полный круг по небу и ещё немного. В сентябре склонение Солнца непрерывно уменьшается. Из-за этого оно каждый день восходит несколько позже, а заходит – раньше, чем накануне. Спустя високосный (т. е. более длинный) год Солнце окажется немного южнее, чем это было 23.09.2015, а значит, продолжительность светового дня окажется немного меньше.

Рекомендации для жюри. Правильный ответ без объяснений оценивается в 2 балла. Полное решение задачи оценивается в 8 баллов.

Задание 3

Условие. В 18^h звездного времени звезда с координатами β=47° эклиптической широты, λ=90° эклиптической долготы находилась на высоте 23,5°. Определите географическую широту места наблюдения. Обязательно дополните решение чертежом.

Решение. Звёздное время равно часовому углу точки весеннего равноденствия. Часовой угол отсчитывается вдоль небесного экватора от точки его верхней кульминации в сторону запада, а значит, точка весеннего равноденствия находится на горизонте в точке востока.



Эклиптическая долгота отсчитывается от точки весеннего равноденствия вдоль эклиптики в сторону годичного движения Солнца. Значит звезда, в этот момент, должна находиться на небесном меридиане в нижней кульминации.

Склонение этой звезды составит $\delta = \beta + \varepsilon = 70{,}5°$. Из этого делаем вывод, что звезда может быть незаходящей, т. е. иметь положительную высоту в моменты нижней кульминации, только для наблюдателей в северном полушарии. Известно, что высота светила в нижней кульминации вычисляется по формуле

$$h = \varphi + \delta - 90°,$$

откуда широта

$$\varphi = 90° + h - \delta = 90° + h - \beta - \varepsilon = 43°.$$

Рекомендации для жюри. Правильное представление положения звезды на небесной сфере в момент наблюдения оценивается в 2 балла. Если не выполнен чертёж, то вместо двух выставляется один балл. Переход от эклиптической широты к склонению оценивается в 3 балла. Вычисление широты – ещё в 3 балла. При этом школьник может как пользоваться формулой для нижней кульминации, так и вывести формулу для широты непосредственно из чертежа. В любом случае вычислительная часть оценивается в 6 баллов. Максимум за задачу – 8 баллов.

Задание 4

Условие. Сидерический период некоторого астероида равен ровно 1,5 года. При каком эксцентриситете орбита астероида касается орбиты Земли? Может ли произойти столкновение этого астероида с Землёй, если в некоторых противостояниях он оказывается в афелии своей орбиты? Все орбиты лежат в одной плоскости. Влиянием других планет пренебречь. Орбиту Земли считать круговой.

Решение. Сидерический период этого астероида больше земного года. Поэтому большая полуось орбиты астероида a больше 1 а. е. Для того чтобы орбита астероида касалась земной орбиты, необходимо, чтобы перигелийное расстояние астероида p было равно 1 а. е. Тогда

$$e = 1 - \frac{p}{a}.$$

Величину большой полуоси можно получить из 3-го закона Кеплера. Выражая период T в годах, а большую полуось в а. е., получаем $a = T^{2/3} \approx 1{,}3$ и эксцентриситет

$$e = 1 - \frac{p}{T^{2/3}} = 1 - \frac{1}{1{,}5^{2/3}} \approx 0{,}24.$$

Чтобы выяснить, возможно ли столкновение, обратим внимание на то, что астероид вращается в резонансе 3:2 с Землёй. Возьмём какое либо положение Земли и астероида на своих орбитах. Через один год Земля вернётся в исходное положение, но астероид сделает только $\frac{2}{3}$ оборота. Спустя ещё год астероид пройдёт $\frac{4}{3}$ своей орбиты. Наконец, спустя ещё год астероид завершит второй виток и вернётся в исходное положение. Таким образом, для любого положения Земли существует только три возможных положения астероида. Значит, если этот астероид много лет летает по своей орбите, он давно должен был столкнуться с Землёй, если бы мог. Но раз столкновение не произошло, то оно и не произойдёт, пока орбита астероида не изменится.

Но, возможно, астероид только занял свою орбиту из-за взаимодействия, например, с Марсом. Если он находится в противостоянии в афелии своей орбиты, то через полгода, когда Земля окажется в точке касания орбит, астероид сделает лишь треть своего оборота, а в нужную точку придёт лишь спустя ещё $\frac{1}{6}$ часть своего периода. Нетрудно сделать вывод, что два других его положения в моменты прохождения Землёй точки их возможной встречи, с этой точкой не совпадают.

Рекомендации для жюри. Правильный выбор перицентра орбиты астероида в качестве точки касания орбит оценивается в 1 балл. Определение большой полуоси оценивается в 2 балла, ещё в 2 балла оценивается вычисление эксцентриситета. Правильные рассуждения о невозможности столкновения оцениваются в 3 балла. Максимум за задачу – 8 баллов.

Задание 5

Условие. Во время центрального кольцеобразного солнечного затмения звёздная величина Солнца уменьшилась на 5 звёздных величин. На каком расстоянии от наблюдателя находилась Луна, если видимый угловой размер Солнца составлял 32′? Потемнением Солнца к краю пренебречь.

Решение. Известно, что разность в 5 звёздных величин соответствует отношению создаваемых освещённостей в 100 раз. Во время кольцеобразного солнечного затмения угловой размер Луны несколько меньше углового размера Солнца. Поэтому Луна не может полностью закрыть Солнце и между краями дисков Солнца и Луны остаётся яркий солнечный ободок. Пусть $S_С$ и $S_Л$ – видимые площади Солнца и Луны соответственно, а $\rho_С$ и $\rho_Л$ – их угловые радиусы. Тогда площадь незакрытой части Солнца во время затмения равна

$$s = S_C - S_Л = \pi\left(\rho_C^2 - \rho_Л^2\right).$$

Нам известно, что эта величина в сто раз меньше площади Солнца:

$$\frac{S}{s} = \frac{\rho_C^2}{\rho_C^2 - \rho_Л^2} = 100.$$

Отсюда

$$\rho_Л = \frac{\sqrt{99}}{10}\rho_C = 0{,}995\rho_C = 15{,}92'.$$

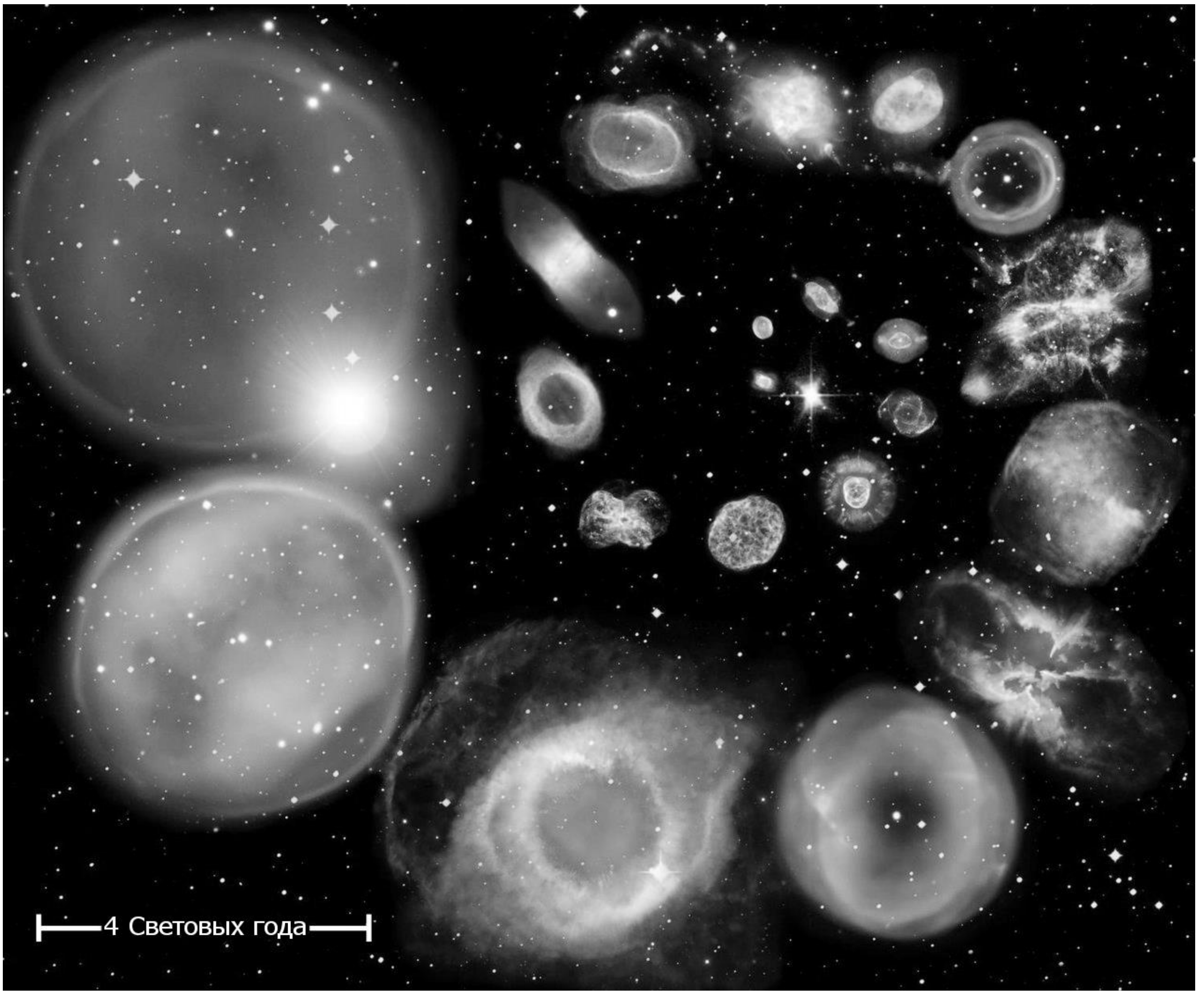
Зная радиус Луны, получаем расстояние до неё:

$$D = \frac{R_Л}{tg(15{,}92')} \approx 375\,000 \text{ км.}$$

Рекомендации для жюри. Для решения задачи ученик должен сделать вывод, что освещённость, создаваемая Солнцем, пропорциональна его видимой, т. е. не закрытой Луной, площади (2 балла).
Вывод, что во время затмения видимая площадь Солнца в 100 раз меньше, чем вне затмения, оценивается одним баллом. Вычисление углового размера Луны – 2 балла. Определение расстояния до Луны – 3 балла. Максимум за задачу – 8 баллов.

Задание 6

Условие. На рисунке показаны различные планетарные туманности так, как они выглядели бы при наблюдении с одного и того же расстояния. Считая, что скорость расширения всех туманностей постоянна и составляет 30 ± 15 км/с, определите возраст каждой из них. Определите также погрешность измерения.



Решение. Для начала определим общую схему решения поставленной задачи. Возраст туманности t соответствует времени расширения этой туманности с постоянной скоростью, т. е.

$$t = \frac{R}{v},$$

где R – радиус туманности в км, а v – скорость расширения. По рисунку мы определяем видимый радиус туманности r. Вычислив также масштаб рисунка m, мы можем перейти от r к R: $t = \frac{mr}{v}$.

Относительная погрешность этой величины является суммой относительных погрешностей каждого из множителей: $\varepsilon_t = \varepsilon_m + \varepsilon_r + \varepsilon_v$.

В таком случае абсолютная погрешность составляет $\Delta t = t\varepsilon_t$.

Хуже всего нам известна скорость: $\varepsilon_v = 0{,}5$. Края полосы, обозначающие 4 световых года, на фотографии имеют толщину около 1 мм. Значит, четыре световых года соответствуют расстоянию 63±1 мм на фотографии, а ошибка определения масштаба $\varepsilon_v = \frac{1}{63} \approx 0{,}016$, что гораздо меньше ε_v. Поэтому неточность знания масштаба практически никак не влияет на погрешность конечной величины и мы не будем её учитывать.

Немного сложнее оценить погрешность измерения диаметров (радиусов) туманностей. Формально точность измерения линейкой составляет 0,5 мм. Для крупных изображений это даёт очень низкую относительную погрешность, которую также можно не принимать во внимание в окончательном подсчёте. Но для самых маленьких изображений относительная ошибка вырастет до 0,1. Если подойти к вопросу более ответственно, то следует обратить внимание на то, что границы туманностей достаточно размыты. Это понижает точность измерений до 1÷2 мм.

Кроме того, даже самые симметричные на глаз туманности при измерении оказываются не совсем симметричными. У иных поперечные размеры отличаются вдвое. Поскольку мы берем некую среднюю скорость расширения, разумно для оценки возраста брать средний размер туманности.

Ниже в таблице показаны результаты измерений. Туманности пронумерованы от самой большой.

№	***t*, тыс. лет**	**№**	***t*, тыс. лет**	**№**	***t*, тыс. лет**
1	27±14	9	5±3	17	3±2
2	23±12	10	8±4	18	3±2
3	28±15	11	8±4	19	3±2
4	15±8	12	8±4	20	1,4±1,0
5	14±7	13	6±3	21	1,9±1,3

6	12±6	14	5±3	22	2,2±1,4
7	12±6	15	5±3		
8	7±4	16	5±3		

Рекомендации для жюри. Правильное понимание метода оценки возраста туманности оценивается в 2 балла, измерение радиусов или диаметров туманностей в линейных единицах (километрах, световых годах и т.д.) оценивается в 3 балла. Если измерения выполнены неточно, жюри может уменьшить эту оценку. Определение возрастов туманностей оценивается ещё в три балла. Если при этом учащийся путает радиус и диаметр (возрасты туманностей получаются в 2 раза больше), оценка снижается на 2 балла. Учащиеся не обязаны записывать промежуточные значения размеров туманностей. Если они сразу определяют возрасты, оценка ставится из расчёта 6 баллов. Если для определения погрешности используется только погрешность линейки, выставляется 1 балл. Учёт только того, что скорости расширения нам известны с точностью 50%, оценивается в 2 балла. Наконец, правильный учет обоих источников погрешности оценивается в 4 балла. Максимум за задачу – 12 баллов.

Максимальное количество баллов за выполнение всех заданий – 48.