МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО АСТРОНОМИИ. 2018–2019 уч. г.
ОЧНЫЙ ЭТАП. 10–11 КЛАССЫ

Задача 1

Две соседние на небе звезды при наблюдении невооружённым глазом имеют одинаковый блеск 6^m, а при наблюдении в крупный бинокль первая звезда выглядит ярче второй. Какая из звёзд имеет большую температуру? Межзвёздным и атмосферным поглощением света пренебречь.

Решение

Звёзды шестой звёздной величины видны на пределе возможностей человеческого зрения на очень тёмном небе. В такие моменты у людей работает ночное (палочковое) зрение, наиболее чувствительное на длине волны около 500 нм. При наблюдении в бинокль звёзды становятся более яркими и в глазу включается дневное (колбочковое) зрение. Оно более чувствительно к красным лучам и имеет максимум на длине волны около 550 нм. Таким образом, при наблюдении в бинокль наши глаза становятся более чувствительны к красным лучам. Значит, первая звезда более красная, следовательно, имеет меньшую температуру. А значит, большую температуру имеет вторая звезда.

Рекомендации для жюри

Указание на различие в наиболее чувствительной длине волны для ночного и дневного времени оценивается в **1 балл**. Если сделан правильный вывод, что колбочковое зрение чувствительнее к более красным лучам, ещё в **1 балл**. Правильно обоснованное утверждение, что первая звезда краснее, а вторая звезда синее, оценивается ещё в **1 балл**. Последний **1 балл** выставляется за правильное определение того, что вторая звезда более горячая.

Максимальная оценка – **4 балла.**

(О. С. Угольников)

Задача 2

Иногда в сувенирных магазинах можно найти необычный подарок – банку с законсервированным воздухом, например, какого-нибудь города. Оцените, во сколько раз масса нетто (т. е. без упаковки) такой банки объёмом V = 0,3 л с обычным воздухом будет больше массы такой же банки с газом, взятым из фотосферы Солнца (T = 6000 K, p = 0,1 атм, хим. состав: H 75%, He 25%). Считать, что вещество фотосферы не ионизовано. Плотность воздуха ρ_0 равна 1,225 кг/м³.

Решение

В соответствии с законом Дальтона давление в фотосфере Солнца является суммой парциального давления водорода и гелия. Выделим в фотосфере некоторый объем *V*. Температура обоих газов в этом объёме одинакова. Используя уравнение Менделеева – Клапейрона, получим

$$p = p_H + p_{He},$$

$$\frac{m}{\mu} R \frac{T}{V} = \frac{m_H}{\mu_H} R \frac{T}{V} + \frac{m_{He}}{\mu_{He}} R \frac{T}{V},$$

$$\mu = \frac{m}{\frac{m_H}{\mu_H} + \frac{m_{He}}{\mu_{He}}} = \frac{1}{\frac{m_H}{m}\frac{1}{\mu_H} + \frac{m_{He}}{m}\frac{1}{\mu_{He}}} = \frac{10^{-3}}{\frac{0{,}75}{1} + \frac{0{,}25}{4}} = 1{,}23 \cdot 10^{-3}.$$

Найдём плотность вещества фотосферы, воспользовавшись уравнением состояния идеального газа:

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} = \frac{10^4 \cdot 1{,}23 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 6000} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\,\text{кг/м}^3.$$

Здесь мы учли, что 0.1 атм ≈ 10^4 Па. Искомое соотношение масс:

$$\frac{m_o}{m} = \frac{\rho_0 V}{\rho V} = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{1{,}225}{2{,}510^{-4}} \approx 5000\,\text{раз}.$$

Оказывается, банки с воздухом не такие уж и пустые, по сравнению с сувенирами с Солнца.

Рекомендации для жюри

За определение молярной массы вещества фотосферы выставляется **1 балл**. Определение плотности вещества фотосферы – **2 балла**. Итоговый ответ оценивается в **1 балл**.

Если в работе указано, что водород в фотосфере Солнца находится в виде молекул (H_2), то оценка за работу не превышает **1 балла**.

Максимальная оценка – **4 балла.**

(М. И. Волобуева)

Задача 3

Две галактики расположены на расстоянии 20° друг от друга на небе и имеют красные смещения 0.001 и 0.002 соответственно. Оцените звёздную величину и красное смещение одной галактики при наблюдении с другой, считая, что это типичные спиральные галактики, подобные Млечному Пути. Постоянную Хаббла считать равной 70 км/с/Мпк.

Решение

Вначале найдём расстояния до этих галактик. Так как красные смещения малы, зависимостью расстояний от космологической модели мы пренебрегаем и воспользуемся линейным законом Хаббла-Леметра:

$$cz = Hr$$

$$r = \frac{cz}{H}$$

Подставляя данные в формулу, получаем r_1 = 4,3 Мпк, r_2 = 8,6 Мпк.

Далее воспользуемся теоремой косинусов и определим расстояния между галактиками:

$$R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(20°)} \approx 4.8\,\text{Мпк.}$$

Вычисляем относительное красное смещение, которое тоже оказывается малым:

$$z = \frac{HR}{c} \approx 0.0011\,.$$

Для вычисления видимой звёздной величины нам потребуется абсолютная звёздная величина галактики, подобной Млечному Пути. В нашей галактике несколько сотен миллиардов звёзд. Большинство из них – это красные карлики, которые светят гораздо слабее Солнца. Если предположить, что галактика светит как 10^{11} солнц, то её абсолютная звёздная величина будет равна

$$M_{MW} = 5^m - 2{,}5 \lg 10^{11} = -22{,}5^m\,.$$

Здесь мы приняли абсолютную звёздную величину Солнца за 5^m. Для оценочных расчётов большая точность не нужна. Наша оценка получилась несколько завышенной. Известно, что крупные спиральные галактики, а Млечный Путь – крупная галактика, обладают абсолютной звёздной величиной около -21^m.

Используя формулу для абсолютной звёздной величины, получаем

$$m = M_{MW} - 5 + 5 \lg(R)\,.$$

Здесь R выражено в парсеках. Для M_{MW} = -22,5 искомое значение получается равным $5{,}9^m$, для -21^m – m = $7{,}4^m$. Поглощение же в межгалактической среде несущественно, и им можно пренебречь.

Рекомендации для жюри

Определение расстояний до каждой галактики оценивается **по 1 баллу** за вычисление каждого расстояния. Определение расстояния между галактиками – **2 балла**. Определение относительного красного смещения – **2 балла**. **1 балл** за оценку абсолютной звёздной величины. Число может быть взято из памяти, а может быть проведена оценка из различных соображений. Искомая величина должна оказаться в диапазоне от -20^m до -24^m. Вычисление видимой звёздной величины оценивается **1 баллом**. Этот балл выставляется даже при неправильной абсолютной звёздной величине при условии физической корректности ответа. Если ответ дан с чрезмерной точностью, то оценка за задачу не может быть больше **7 баллов**.

Максимальная оценка – **8 балла.**

(С. Г. Желтоухов)

Задача 4

В 2019 году уже произошли или произойдут следующие события:

- 21 января полное лунное затмение, во время которого Луна пересекла северную часть земной тени вскоре после прохождения узла своей орбиты;
- 5 февраля покрытие Меркурия Луной;
- 11 апреля Меркурий окажется в максимальной западной элонгации на угловом расстоянии 27°43′;
- 11 ноября – прохождение Меркурия по диску Солнца.

Исходя из этих данных определите:

1) Вблизи какой конфигурации находился Меркурий 5 февраля?
2) Как он будет располагаться 11 апреля относительно небесного экватора, севернее или южнее?
3) Севернее или южнее эклиптики он окажется 11 апреля?

Большая полуось орбиты Меркурия равна 0,387 а.е., эксцентриситет – 0,2. Наклонение орбиты – 7°.

Решение

Заметим, что покрытие Луной Меркурия произошло спустя 15 суток после лунного затмения. При этом половина драконического месяца (драконический месяц – это интервал времени между двумя прохождениями Луны через один и тот же узел орбиты) чуть короче сидерического месяца и составляет 13,6 суток. Раз во время затмения Луна находилась немного севернее эклиптики, то спустя 15 суток она, совершив более половины оборота по орбите, окажется уже значительно южнее эклиптики. А вместе с ней и Меркурий. При этом события происходили вскоре после новолуния, т. е. Меркурий должен в это время быть вблизи соединения.

Из 3-го закона Кеплера сидерический период Меркурия:

$$T = 0{,}387^{1{,}5} \approx 0{,}241 \text{ года} \approx 88 \text{ дней.}$$

Синодический период Меркурия составляет

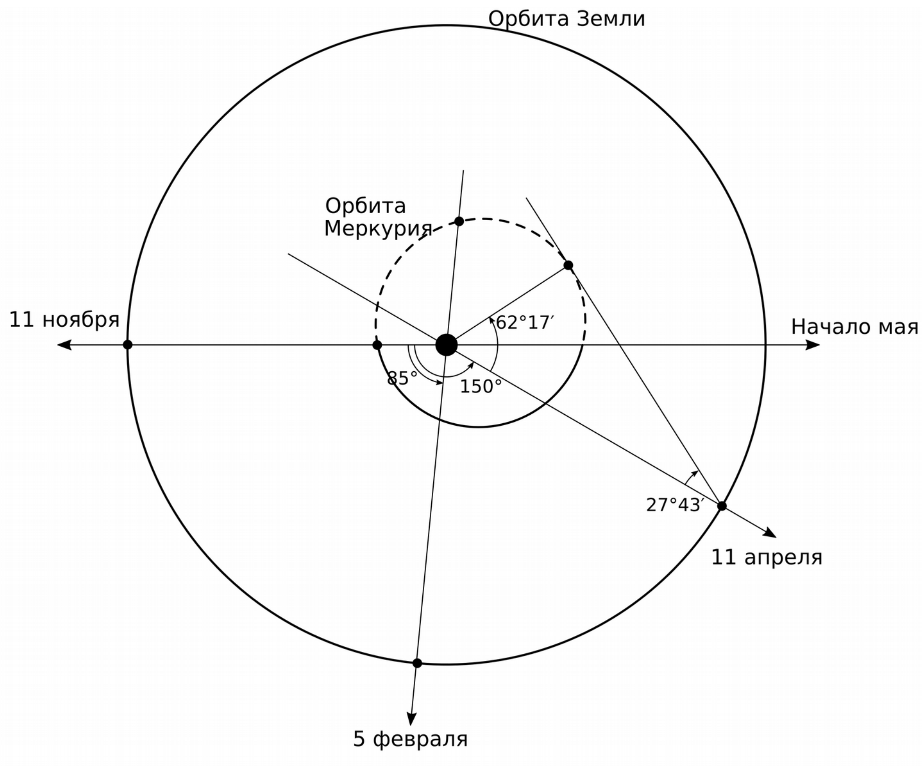
$$S = 0{,}241 / (1 - 0{,}241) \approx 0{,}318 \text{ года} \approx 116 \text{ дней.}$$

От нижнего соединения до западной элонгации Меркурия должно пройти существенно меньше четверти синодического периода, в то время как между 5 февраля и 11 апреля должно пройти 65 дней. Это чуть больше половины синодического периода, а значит, Меркурий мог располагаться только вблизи верхнего соединения.

Тут может возникнуть вопрос, почему за половину синодического периода Меркурий успевает не только дойти от верхнего соединения до нижнего, но и оказывается в западной элонгации. Можно заметить, что 11 апреля угловое расстояние Меркурия от Солнца близко к максимально возможному ($\arcsin[0{,}387(1+0{,}2)] \approx 27{,}67° = 27°40'$, здесь не учтён эксцентриситет земной орбиты), т. е. Меркурий находится в афелии. Значит, на пути от верхнего соединения к нижнему Меркурий двигался со скоростью выше средней и затратил менее половины синодического периода. Кроме того, Луна уже прошла соединение с Солнцем, а значит, Меркурий прошёл верхнее соединение.

Рассмотрим, как меняется взаимное положение Земли и Меркурия в течение 2019 года (см. рисунок). 11 ноября 2019 года во время прохождения Земля, Меркурий и Солнце выстраиваются в одну линию, а Меркурий проходит узел своей орбиты. Из условия не ясно, восходящий это узел или нисходящий. Значит, прямая, соединяющая планеты и Солнце, – это линия узлов, разбивающая орбиту Меркурия на две части, одна из которых севернее эклиптики, а другая южнее. Значит, 11 ноября 2018 года ± 1 день Земля также проходила через линию узлов орбиты Меркурия. Между 11 ноября 2018 года и 5 февраля 2019 года прошло 86 дней. Скорость движения Земли по орбите составляет 360° / 365,26 дней = 0,986°/день. Значит, за 86 дней Земля проходит примерно 85° по орбите. Изобразив на рисунке положение Земли и Меркурия, мы определяем, что ниже (южнее) эклиптики будет дальняя в этот момент от Земли часть меркурианской орбиты.

От 11 ноября 2018 до 11 апреля 2019 151 день. Это соответствует дуге Земной орбиты 149°. Меркурий, который находится в элонгации, должен пройти дополнительно угол 90° – 27°43′ = 62°17′. Отметив положение Земли и Меркурия на рисунке, мы можем заметить, что Меркурий вновь оказывается южнее эклиптики.



Теперь ответим на второй вопрос задачи. Эклиптика пересекает небесный экватор в двух точках – точках весеннего и осеннего равноденствия. Через точку весеннего равноденствия Солнце проходит в день весеннего равноденствия, т. е. 20 марта. Таким образом, элонгация Меркурия произойдёт через 22 дня после равноденствия. За это время Солнце успеет сдвинуться вдоль эклиптики на угол 21,7°. Меркурий будет находиться к западу от Солнца, то есть отставать от него в рамках годичного движения. Экватор и эклиптика пересекаются под углом 23,5°. Поскольку Меркурий располагается южнее эклиптики, то он даже за счёт наклона орбиты не может оказаться севернее экватора.

Рекомендации для жюри

Вывод о том, что 5 февраля Меркурий находился вблизи соединения оценивается в **1 балл**. Уточнение, что это было верхнее соединение награждается ещё **одним баллом**.

Определение того, что 11 апреля Меркурий находился южнее эклиптики оценивается в **3 балла**. Если этот вывод не был сделан или был сделан неправильно, то как составные части решения могут быть оценены **1 баллом** при разумном применении определение положения линии узлов, определение, какая часть орбиты Меркурия находится выше, а какая ниже эклиптики, и т. п.

Вывод о том, что Меркурий 11 апреля должен быть южнее экватора оценивается в **2 балла**. Ещё **1 балл** выставляется за обоснование того, что Меркурий не может находиться севернее экватора даже если он не находится на эклиптике. Это получается почти автоматически, если определено его положение относительно эклиптики, или требуются некоторые рассуждения на основе анализа наклона орбиты Меркурия.

Ответы без обоснований или с ошибочными обоснованиями оцениваются в **0 баллов**.

Максимальная оценка – **8 баллов.**

(Е. Н. Фадеев)

Задача 5

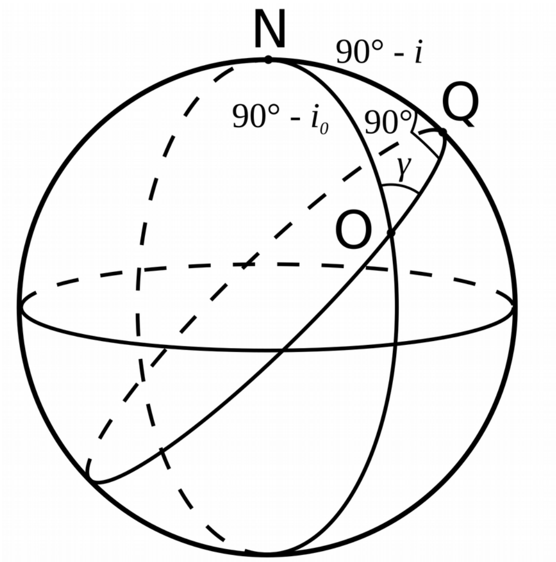
Международная космическая станция (МКС) движется по круговой орбите высотой $H = 415$ км, плоскость которой наклонена к плоскости земного экватора на угол $i_0 = 51°$. В тот момент, когда МКС достигла самой северной точки орбиты, ей был сообщён импульс, изменивший её орбиту так, что станцию стало возможным наблюдать из любой точки Земли. Определите величину и направление минимального импульса (относительно предыдущего направления скорости), если орбита осталась круговой. Масса МКС $m = 4{,}2 \cdot 10^5$ кг.

Решение

Очевидно, что МКС доступна для наблюдателей на экваторе. Определим, доступна ли она наблюдателям на полюсах. Найдём минимальный угол наклона орбиты, при котором МКС будет видно с полюса:

$$i = \arcsin\frac{R}{R+H} \approx 70°.$$

Здесь R – радиус Земли. Значит, для того, чтобы МКС можно было увидеть с полюса необходимо увеличить наклонение её орбиты. Определим, в какую сторону должен быть направлен вектор скорости МКС в самой северной точке старой орбиты, чтобы она оказалась на новой орбите. Построим сферический треугольник NOQ, где N – северный полюс, O – северная точка старой орбиты, Q – северная точка новой орбиты. С помощью теоремы синусов для сферического треугольника определим позиционный угол вектора конечной скорости.

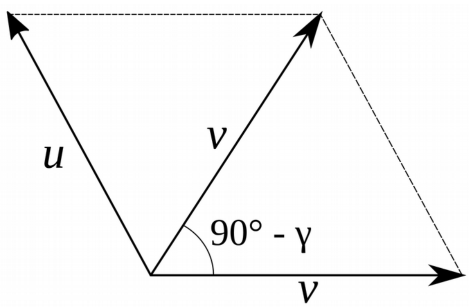


$$\frac{\sin(90° - i)}{\sin\gamma} = \frac{\sin(90° - i_0)}{\sin 90°}.$$

Отсюда

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{\cos i}{\cos i_0}\right) \approx 33°.$$

Так как новая орбита остаётся круговой с той же высотой, то и модуль скорости МКС должен остаться неизменным. Тогда модуль добавочной скорости равен



$$u = \sqrt{v^2 + v^2 - 2vv\cos(90° - \gamma)} = \sqrt{2}\,v\sqrt{1 - \sin\gamma}.$$

Здесь $v = \sqrt{GM/(R+H)} = 7{,}7$ км/с – орбитальная скорость МКС. Отсюда добавочный импульс равен

$$p = mu \approx 3{,}1 \cdot 10^9 \text{ кг м / с}.$$

Теперь найдём направление относительно начальной скорости:

$$\alpha = 90° - \frac{1}{2}(90° + \gamma) = 118{,}5°.$$

Рекомендации для жюри

За определение наклонения итоговой орбиты выставляется **1 балл**. Вычисление позиционного угла вектора конечной скорости оценивается в **2 балла**. Определение орбитальной скорости МКС – **1 балл**, модуля вектора добавочной скорости – **1 балл** (формула). Запись формулы для импульса – **1 балл** и правильное его значение – ещё **1 балл**. Наконец, определение искомого угла α – **1 балл**.

Максимальная оценка – **8 баллов.**

(Д. А. Долгов)

Задача 6

Звезда с видимой звёздной величиной $m = 14^m$ находится в точке с галактическими координатами $l = 180°$, $b = 0°$. Её абсолютная звёздная величина $H = 3.4^m$. Сколько оборотов вокруг центра Галактики она совершила за всю свою жизнь? Считать, что в её недрах водорода осталось уже очень мало. Расстояние от центра Галактики до Солнца принять равным R_0 = 8.2 кпк. Массу Галактики внутри такого радиуса принять порядка 10^{11} $M_{\odot}$.

Решение

По формуле для модуля расстояния с учётом поглощения определим расстояние от Солнца до звезды:

$$H = m + 5 - 5\lg D[\text{Пк}] - aD[\text{Пк}],$$

где $a = 0{,}002^m$/Пк, а H – абсолютная звёздная величина звезды.

Данное уравнение относительно D трансцендентное. Точное значение D получить не удастся, но можно найти его приближённое значение с любой необходимой точностью. Это можно сделать графически, подбором, итерацией и т. д.

При решении методом простой итерации разумно в качестве начального приближения для расстояния до звезды D_0 выбрать оценку расстояния без учёта поглощения:

$$H = m + 5 - 5\lg D[\text{пк}].$$
$$D = 10^{0{,}2(m-H)+1} \approx 1320\,\text{пк}.$$

Намного проще решить задачу графическим методом, рассмотрев две функции: $f_1(D) = m - H + 5 - aD$ и $f_2(D) = 5\lg D$. Чтобы найти расстояние до звезды, нужно решить уравнение $f_1(D) = f_2(D)$. Его решением является абсцисса точки пересечения графиков двух функций. Из рисунка видно, что расстояние до звезды $D \approx 700$ пк (более точное значение $D \approx 695$ пк).

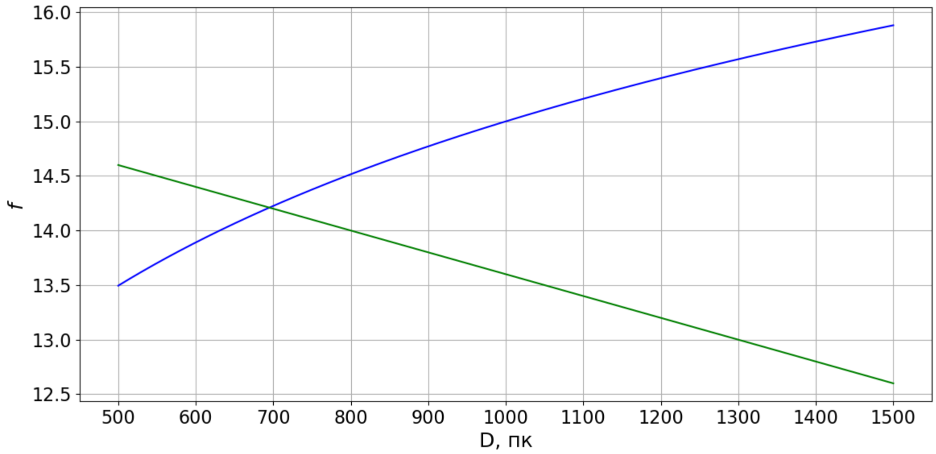


Рис. 1. Нахождение расстояния до звезды графическим методом

Галактические координаты звезды $l = 180°$, $b = 0°$. Значит, она находится в плоскости диска в направлении, противоположном направлению на центр Галактики. Отсюда получаем, что расстояние от центра Галактики до звезды:

$$r = R_0 + D,$$

$$r \approx 8{,}2 \cdot 10^3 + 0{,}7 \cdot 10^3 = 8{,}9 \cdot 10^3 \text{ пк} = 8{,}9 \text{ кпк}.$$

Можно с хорошей точностью считать, что на таких расстояниях до центра Галактики основной вклад в гравитацию вносит тёмное гало – сфероидальный структурный компонент Галактики, состоящий из тёмной материи, а его, с некоторой точностью, можно считать сферически симметричным. Поэтому звезда будет двигаться вокруг центра Галактики примерно так же, как вокруг точечного тела массы $M = 10^{11} M_{\odot}$. Пусть звезда движется по круговой орбите. Тогда период обращения с помощью III закона Кеплера можно оценить, как

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}},$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(8{,}9 \cdot 10^3 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}\right)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}} \approx 7{,}85 \cdot 10^{15}\, c \approx 2{,}49 \cdot 10^8 \text{ лет.}$$

Также можно вспомнить, что кривая вращения (график зависимости скорости вращения звёзд в диске Галактики) на таких расстояниях плоская, и скорость вращения всюду, начиная с $r \approx 6$ кпк составляет примерно $V_{\text{вр}} \approx 220$ км/с. Из этих данных период обращения звезды по орбите:

$$T = \frac{2\pi r}{V_{\text{вр}}},$$

$$T = \frac{2\pi \cdot 8{,}9 \cdot 10^3 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}}{220 \cdot 10^3} \approx 7{,}84 \cdot 10^{15} \text{ с} \approx 2{,}49 \cdot 10^8 \text{ лет.}$$

Видно, что оценки периода, полученные двумя способами, практически не отличаются друг от друга.

Всю свою жизнь до наших лет звезда провела на главной последовательности, поскольку в её недрах водород почти израсходовался – звезда сейчас заканчивает стадию главной последовательности. Оценим время пребывания звезды на этой стадии.

Как известно, в ходе термоядерных реакций энергия выделяется за счёт того, что некоторая часть энергии покоя четырёх протонов переходит в выделяющуюся энергию – масса образовавшейся альфа-частицы меньше суммарной массы реагентов. Также за всё время пребывания на главной последовательности в термоядерных реакциях участвует не вся масса звезды. Получается, что за всю эту эволюционную стадию высвечивается некоторая доля энергии покоя звезды: $E=\beta\cdot M_s c^2$, где M_s – масса звезды. Характерное время пребывания звезды на главной последовательности:

$$\tau \propto \frac{E}{L}=\frac{\beta\cdot M_s c^2}{L}.$$

Для звёзд главной последовательности с примерно солнечной светимостью наблюдениями была обнаружена взаимосвязь массы и светимости:

$$L \propto M_s^4$$

Считая, что доля β для звёзд разных светимостей одна и та же, получим, что для звезды любой массы:

$$\tau \propto \frac{M_s}{L} \propto \frac{L^{1/4}}{L}=L^{-3/4}$$

Сравним время пребывания данной звезды на ГП с таковым временем для Солнца:

$$\frac{\tau}{\tau_\odot}=\left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{-3/4}=\left(10^{0,4(H_\odot-H)}\right)^{-3/4}=10^{0,3(H-H_\odot)}$$

Тогда

$$\tau=\tau_\odot\cdot 10^{0,3(H-H_\odot)}\approx 10\cdot 10^9\cdot 10^{0,3(3,4-4,72)}\approx 4,02\cdot 10^9 \text{ лет.}$$

Искомое число оборотов:

$$N=\frac{\tau}{T}=\frac{4,02\cdot 10^9}{2,49\cdot 10^8}\approx 16.$$

Ответ*:* примерно 16 оборотов вокруг центра Галактики совершила звезда за свою жизнь.

Рекомендации для жюри

Расчёт расстояния до звезды *с учётом* межзвёздного поглощения с правильным численным значением оценивается в **4 балла**.

Если получен ответ, не сильно отличающийся от правильного (например, 600 пк или 800 пк), то за этот этап выставляется **3 балла**.

Если расстояние до звезды было получено без учёта межзвёздного поглощения, то за данный расчёт участник получает **2 балла**.

Правильное определение периода обращения звезды по орбите оценивается в **1 балл**.

3 балла ставятся за верный расчёт времени пребывания звезды на главной последовательности (использование зависимости «масса-светимости» для главной последовательности, знание времени пребывания на главной последовательности звезды солнечного типа). Если участник использовал значение для времени пребывания Солнца на главной последовательности, отличающееся от 10 млрд лет более, чем на порядок, то данная часть решения оценивается не более, чем **1 баллом**.

Максимальная оценка – **8 баллов.**

(Н. Д. Уткин)

Задача 7

Находясь в Кавказской горной обсерватории МГУ (43°44′10″ с.ш., 42°40′03″ в.д., высота над уровнем моря h = 2061 м), астроном сделал фотографию Эльбруса с длительной экспозицией. На полученной фотографии он смог отождествить треки наиболее ярких звёзд созвездия Эридан:

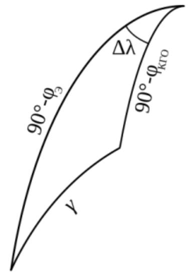
1) Тхеемин (υ^2 Eri): $\alpha = 4^h\,35^m\,18^s$, $\delta = -30°31'31''$

2) Тимим (Беемин II, υ^3 Eri): $\alpha = 4^h\,24^m\,46^s$, $\delta = -33°58'27''$

3) Беемин I (υ^4 Eri): $\alpha = 4^h\,18^m\,38^s$, $\delta = -33°45'12''$

Считая, что нижняя сторона фотографии соответствует положению математического горизонта, оцените высоту западной вершины г. Эльбрус над уровнем моря. Географические координаты западной вершины: 43°20′45″ с.ш., 42°26′55″ в.д. В решении обязательно необходимо указать, какая именно из вершин является западной.

Решение



Определим взаимное положение Кавказской горной обсерватории (КГО) и Эльбруса. КГО находится на $\Delta\varphi = 23'25''$ севернее и на $\Delta\lambda = 13'08''$ восточнее, чем западная вершина Эльбруса. Поскольку на Эльбрус астроном смотрит с севера, то западная вершина видна справа. Расстояние до вершины можно найти с помощью сферического треугольника:

$$\gamma = \arccos\left(\sin\varphi_{\text{КГО}}\sin\varphi_{\text{Э}} + \cos\varphi_{\text{КГО}}\cos\varphi_{\text{Э}}\cos\Delta\lambda\right) = 25'17''.$$

Ту же самую величину можно найти приближённо, воспользовавшись тем, что расстояние между горой и обсерваторией невелико и можно пренебречь отличием координатной сетки от прямоугольной. Здесь надо учесть, что градус долготы на широте φ короче в cos φ раз:

$$\gamma' = \sqrt{\Delta\varphi^2 + \left(\Delta\lambda\cos\varphi\right)^2} = 25'17''.$$

Если забыть про косинус широты, то ответ получается $26'51''$, что приводит к завышению расстояния на 6%.

Средний радиус Земли R равен 6371 км, откуда расстояние до вершины l получается равным примерно 46,8 км.

Для того чтобы определить масштаб на фотографии (число градусов на сантиметр), необходимо измерить в сантиметрах какой либо известный угловой масштаб. Для этой цели хорошо подходит разность склонений двух звёзд. Разность склонений между υ^2 Eri и υ^3 Eri составляет 3,45°, а между υ^2 Eri и υ^4 Eri – 3,23°. Чтобы уменьшить погрешность, измерения надо провести несколько раз. Отсюда видимый угловой размер вершины составляет 4,13°.

Если мы просто пересчитаем видимый угловой размер Эльбруса в линейный, воспользовавшись известным расстоянием l, то получим в ответе чуть более 3 км, что мало для высочайшей вершины России. Однако надо учесть следующие два обстоятельства. Во-первых, фотограф расположен на высоте более 2 км над уровнем моря. Во-вторых, Эльбрус находится достаточно далеко, чтобы сказывалось понижение горизонта. Таким образом, математический горизонт «обрезает» Эльбрус на высоте

$$h' = \frac{l^2}{2R} + h = 2{,}23\ \text{км}.$$

Значит, высота горы составляет

$$H = l\,\mathrm{tg}\,\alpha + h' = 3380 + 2230 = 5610\ м.$$

Здесь α – угловой размер вершины на фотографии.

Реальная высота западной вершины составляет 5642 м.

Рекомендации для жюри

Определение того, какая вершина на фотографии западная, – **1 балл**. Вычисление расстояния до горы в градусах оценивается в **3 балла**. Если ответ был получен без учёта того, что расстояние вдоль параллелей в косинус широты раз короче, чем на экваторе, то за этот этап выставляется **1 балл**. Ещё **1 балл** выставляется за определение линейного расстояния до горы.

Определение масштаба фотографии оценивается в **2 балла,** углового размера Эльбруса – **1 балл**. За учёт высоты съёмки выставляется **2 балла**, понижения горизонта – **1 балл**. Вычисление высоты вершины – **1 балл**. Последняя оценка не выставляется, если не была учтена высота съёмки, но выставляется при наличии правильного подсчёта, если упущено понижение горизонта, которое вносит существенно меньший вклад.

Максимальная оценка – **12 баллов.**

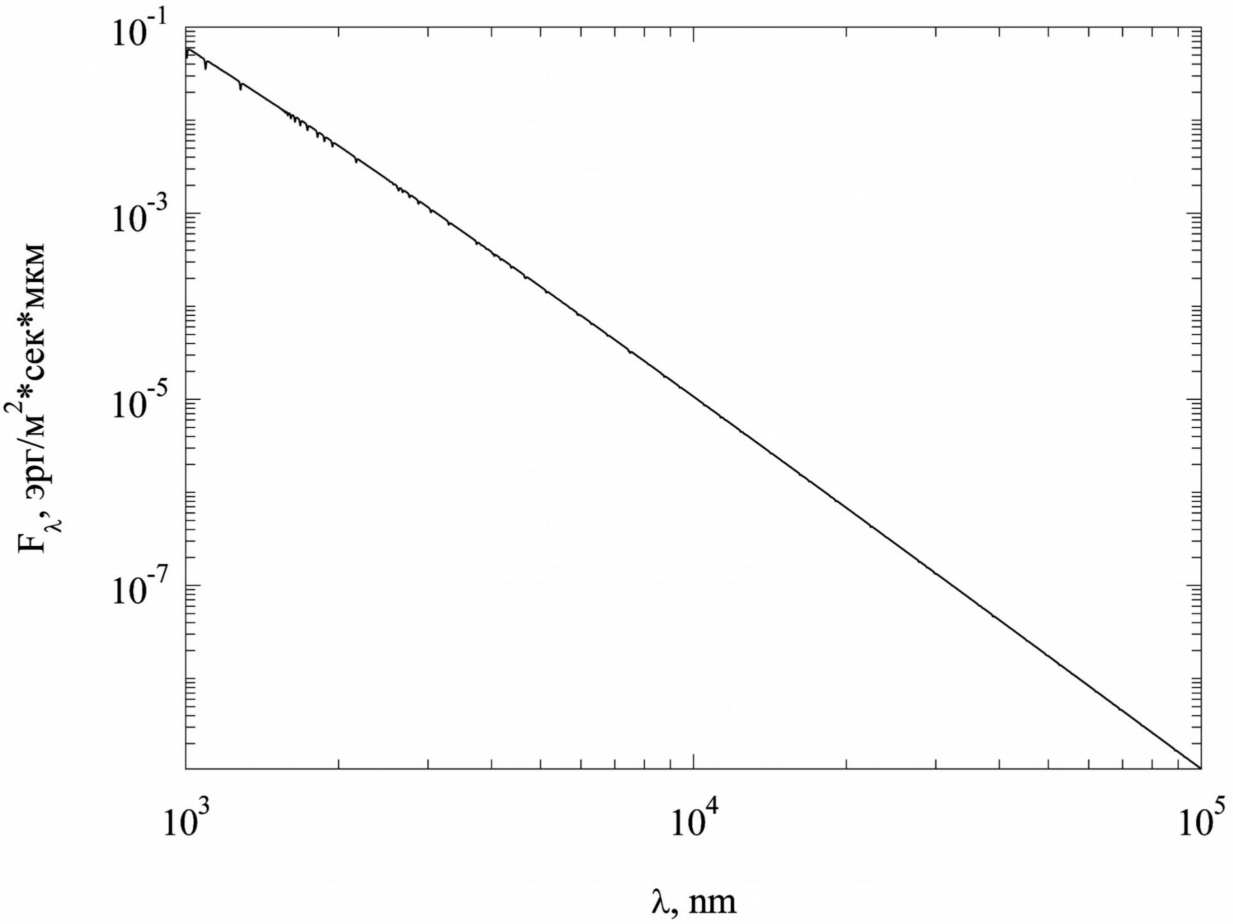
(С. В. Воротынцев)

Задача 8

Вот как Уильям Хаггинс в заметке 1878 г. (отрывок из неё на языке оригинала для справки приведён ниже) описывает первые в истории наблюдения звёзд в инфракрасном диапазоне, проведённые с помощью болометра: «количество тепла, полученное от Арктура, наблюдавшегося на высоте 25 градусов, оказалось таким же, как наблюдается с расстояния 360 м от заполненного кипящей водой [зачернённого] металлического куба с ребром 76 мм». Подтвердите или опровергните это высказывание расчётами, если известно, что звёздная величина Арктура в инфракрасном диапазоне -3^m. На рисунках дано распределение энергии в спектре Веги за пределами атмосферы Земли и кривая пропускания атмосферы Земли в ИК-диапазоне.

The Government astronomer at the Cape of Good Hope, Mr. Stone, then first assistant at Greenwich, also successfully observed the heat of some stars, and further gave a rough estimate of the heating power of Arcturus and *α* Lyræ, in a communication to the Royal Society in January, 1870. He makes the amount of heat received from Arcturus, at an altitude of 25°, to be about equal to that of a three-inch cube containing boiling water at a distance of 400 yards; the heat from *α* Lyræ, at an altitude of 60°, to that of a similar cube at about 600 yards.

Upper Tulse Hill, S.W.: Your obedient servant,
Oct. 29. WILLIAM HUGGINS.



Решение

Как известно, болометр обладает примерно одинаковой чувствительностью почти во всех диапазонах шкалы электромагнитного излучения. При этом болометр реагирует на поток излучения (вернее, на нагрев им вызванный), а не на поток квантов. Максимум излучения Арктура (красного гиганта) приходится на ближний ИК-диапазон (на длину волны чуть менее 1 мкм), а максимум излучения нагретого до 100° С куба – на длину волны

$$\lambda = \frac{2900}{T} = \frac{2900}{100+273} \approx 8\,\text{мкм}.$$

Таким образом, мы можем вычислить освещённость, создаваемую нагретым кубом на расстоянии 360 м. При этом будем считать, что излучение распространяется во все стороны изотропно (при этом, по сути, заменяем куб шаром такой же площади поверхности):

$$E=\frac{S\sigma T^4}{4\pi R^2}=\frac{6\cdot 0{,}076^2\cdot 5.67\cdot 10^{-8}\cdot 373^4}{4\pi\cdot 360^2}=\frac{38}{1{,}63\cdot 10^6}=2{,}33\cdot 10^{-5}\,\text{Вт}/\text{м}^2.$$

Чтобы оценить отношение потоков, нам необходимо оценить освещённость, создаваемую Арктуром, при наблюдении его на высоте 25°.

Вычислим полный поток излучения, приходящий от Арктура в ИК-диапазоне на границу атмосферы Земли. Глядя на рисунок с кривой распределения энергии в спектре Веги, можно увидеть, что в логарифмических осях график представляет собой прямую. Это означает, что зависимость освещённости от длины волны степенная. Вспомнив, что на ИК-диапазон приходится Рэллей-Джинсовский хвост функции Планка АЧТ с температурой 10 000 К (температура Веги), можно сделать вывод, что зависимость должна $F(\lambda)\sim\lambda^{-4}$ (для потока) или $E(\lambda)\sim\lambda^{-4}$ (для освещённости). Эту же величину показателя степени можно получить и из самого графика (из графика получается зависимость $E(\lambda)\sim\lambda^{-3.9}$). Коэффициент пропорциональности этой зависимости определим по графику – на длине волны 1 мкм от Веги приходит $6\cdot 10^{-2}$ эрг/(м^2·сек·мкм). Значит $E(\lambda) = 6\cdot 10^{-2}\cdot (1\text{ мкм}/\lambda)^4$. Тогда освещённость от Веги во всем ИК-диапазоне (от 1 до 100 мкм) будет равна

$$E=\int_1^{100} 6\cdot 10^{-2}\cdot\lambda^{-4}\,d\lambda\approx 2\cdot 10^{-2}\,\text{эрг}/\left(\text{м}^2\,\text{сек}\right)=2\cdot 10^{-9}\,\text{Вт}/\text{м}^2$$

Освещённость, создаваемую Арктуром на границе атмосферы Земли, вычислим, используя формулу Погсона:

$$E_A^0=E\cdot 2{,}512^3\approx 3{,}2\cdot 10^{-8}\,\text{Вт}/\text{м}^2.$$

Эта величина почти в 1000 раз меньше, чем освещённость, создаваемая нагретым кубом. Собственно, уже тут **можно сделать вывод, что Хаггинс ошибался**. Это подтверждают и современные исследования – зарегистрировать свет звёзд в ИК-диапазоне с тем оборудованием, что имелось у Хаггинса, было невозможно в принципе.

Учёт поглощения в атмосфере Земли будет лишь увеличивать это различие: глядя на кривую зависимости пропускания атмосферы Земли от длины волны, делаем вывод, что в ближнем ИК-диапазоне (от 1 до 5 мкм) примерно 50% шкалы электромагнитных колебаний приходится на полосы полного поглощения и примерно 50% шкалы – на полосы пропускания, в которых проходит ~80% излучения.

Наблюдения ведутся на высоте всего 25°. Это увеличивает путь лучей Арктура через атмосферу в 1/cos(90° – h) ≈ 2,4 раза и приводит к тому, что поглощение в полосах пропускания становится примерно равно 50% (или (100 - 80) · 2,4). При этом полосы пропускания и поглощения чередуются друг с другом. Таким образом, в ближнем ИК-диапазоне теряется 3/4 всего излучения. Значит, поток от Арктура станет в 4 раза слабее.

Далее существует широкая полоса поглощения (от 5 до 7 мкм) и за ней широкая полоса пропускания (от 7 до 14 мкм с итоговым пропусканием ~50%) и после неё атмосфера Земли становится непрозрачной.

Излучение Арктура проходит длинный путь через атмосферу Земли, полностью поглощаясь в окнах непрозрачности и частично проходя в окнах прозрачности атмосферы. Излучение нагретого куба проходит короткий путь в атмосфере – считая атмосферу плоской и однородной с толщиной 8 км (и учтя высоту звезды в момент наблюдений), получим отношение длин путей примерно в 50 раз. При этом максимум излучения металлического куба приходится на полосу прозрачности 7-14 мкм. Поэтому будем считать, что излучение куба не поглощается в атмосфере Земли.

Примечание для проверки работ «продвинутых пользователей» – даже на таком коротком пути поглощение на длинах волн >30 мкм и в ядрах полос на более коротких волнах будет существенным. Допускается и приветствуется попытка учёта этого факта. Однако большого вклада это не даст.

Рекомендации для жюри

При проверке нестандартных решений надо помнить, что отклик болометра пропорционален потоку энергии, а не квантов (в отличие от ПЗС приёмников), т. е. «не все кванты одинаковые». Поэтому перевод в число квантов (или переход от них) должен быть сделан (если использовался соответствующий метод решения) очень аккуратно.

Принцип работы болометра (равномерность чувствительности и отклик пропорционален потоку энергии) **+1 балл**. Вычисление положения максимума излучения нагретого куба **+2 балла.** Вычисление освещённости, создаваемой кубом, **+2 балла**.

Определение формы зависимости распределения энергии в спектре Веги и определение интегрального потока (тем или иным способом) +**4 балла**.

Вычисление интегрального ИК-потока от Арктура (формула Погсона) **+1 балл** (либо прямое указание, что при отличии Веги от куба в 10000 раз учёт этого уже не нужен).

Рассуждения о пропускании атмосферы (с той точки зрения, что излучение куба приходится на полосу пропускания, а максимум излучения Арктура приходится на место в кривой относительно нормального пропускания атмосферы) **+2 балла.**

Если сделана попытка решения задачи через привязку к Солнцу (или через солнечную постоянную) без учёта (хотя бы в виде объяснения – в начале или в конце решения; учёта или пренебрежения) пропускания атмосферы и того, на какие диапазоны спектра приходится основная доля излучения объектов задачи ставится оценка 3 балла за задачу (при условии верного численного решения).

Решение может быть выполнено и по другой схеме без использования графика с распределением энергии в спектре Веги, например, через знание светимости Солнца или величины солнечной постоянной. Но при этом обязательно должна быть сделана корректная оценка (или корректное объяснение) доли ИК излучения в спектре Солнца, т.к. в условии речь идёт об инфракрасном блеске Арктура. В этом случае решение может быть оценено полным баллом.

Максимальная оценка – **12 баллов.**

(А. М. Татарников)

Всего за работу 64 баллов.