МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ПО АСТРОНОМИИ. 2019–2020 УЧ. Г.

ОЧНЫЙ ЭТАП. 8–9 КЛАССЫ

Решения и критерии оценивания

Задача 1

В повести Н. Н. Носова «Незнайка на Луне» Незнайка и Пончик, провалившись в пещеру, обнаруживают, что лунная жизнь находится под поверхностью Луны на «внутренней Земле», для которой лунная кора является небесной сферой. При этом на внутренней планете, как и на поверхности Луны, ускорение свободного падения в 6 раз меньше земного. Определите, с какой высоты пришлось падать героям, если

1) средняя плотность «внутренней Земли» равна средней плотности Луны (3.3 г/см^3);
2) средняя плотность «внутренней Земли» равна земной плотности (5.5 г/см^3).

Толщиной лунной коры пренебречь.

Решение

Сила притяжения, действующая на тело со стороны другого тела, например Луны, равна

$$F_g = \frac{GMm}{R^2},$$

где G – гравитационная постоянная, M и m – масса притягивающего и притягиваемого тел соответственно, R – расстояние межу телами. По второму закону Ньютона $F_g = mg$, где g – ускорение, которое приобретает притягиваемое тело, которое в данном случае называется ускорением свободного падения. Отсюда

$$g = GM/R^2 .$$

Известно, что плотность тела равна его массе делённой на объём. Будем считать, что притягивающее тело – шар. Тогда

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}.$$

Отсюда выражаем величину M/R^2 и подставляем в выражение для g:

$$g = \frac{4}{3}\pi\rho G R = const .$$

Получилось, что при заданном g произведение ρR должно быть константой. Поэтому, если средняя плотность «внутренней Земли» равна средней плотности Луны, то и сама «внутренняя Земля» должна быть размером с Луну и такая ситуация попросту противоречит условию задачи.

К этому можно было прийти без формул путём следующих рассуждений. В среднюю плотность Луны вносит вклад как «внутренняя Земля» так и атмосфера между ней и лунной корой, которая значительно менее плотная. Значит плотность «внутренней Земли» должна быть выше средней.

Пусть R – радиус Луны, H – искомая высота, а $\rho_л$ и $\rho_з$ – соответственно плотности Луны и Земли. Тогда

$$\rho_л R = \rho_з (R - H).$$

Отсюда

$$H = \left(1 - \frac{\rho_л}{\rho_з}\right) R.$$

Осталось подставить числа. Радиус Луны в условии не задан. Его можно помнить, но данных в условии достаточно, чтобы его вычислить, зная радиус Земли (или длину земного экватора):

$$R_л = \frac{\rho_з g_л}{\rho_л g_з} R_з = \frac{3.3}{5.5 \cdot 6} \cdot 6370 \approx 1770\,\text{км}.$$

Истинное значение равно 1737 км. Подставляя числа в выражение для H получаем около 700 км.

Критерии проверки

Вывод формулы для зависимости радиуса от плотности – **3 балла**.

Ответ на первый вопрос о том, что получилось противоречие – **2 балла**. За такие ответы, как $H = 0$ и т. п. – 1 балл.

Вывод или запись величины радиуса Луны – **1 балл**.

Ответ на второй вопрос – **2 балла**.

Каждая арифметическая ошибка уменьшает итоговую оценку на 1 балл.

Комментарий. Условие *«Толщиной лунной коры пренебречь»* смутило некоторых участников и возникло прочтение этого пункта как *«массой лунной коры пренебречь»*. Очевидно, что из формулы для ускорения свободного падения $g = GM/R^2$ следует, что из постоянства g и M должно вытекать и постоянство R, что противоречит условию задачи. Тем, кто указал и корректно объяснил такое противоречие, решено было выставлять полный балл. Если же из такого понимания задачи делался вывод, что масса внутренней Земли равна массе Луны и дальше решал задачу, оценка выставлялась в соответствии с критериями выше.

Максимальная оценка – 8 баллов.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 2

Параллактический эллипс звезды имеет большую полуось 2 миллисекунды дуги и эксцентриситет 0.87. Чему равно склонение звезды, если её прямое восхождение равно 6^h? Чему равно расстояние до звезды?

Решение

Форма параллактического эллипса повторяет форму земной орбиты, как её видно со звезды. Так звезда в полюсе эклиптики будет смещаться вследствие параллакса по окружности, а звезды на эклиптике смещаются вдоль неё по отрезкам. Поэтому сжатие параллактического эллипса зависит от эклиптической широты звезды.

Малая полуось эллипса b равна $b=a\sqrt{1-e^2}\approx 1\,\text{mas}$. Здесь a – большая полуось эллипса, а e – эксцентриситет. Значит видимая со звезды малая полуось земной орбиты равна половине её большой полуоси.

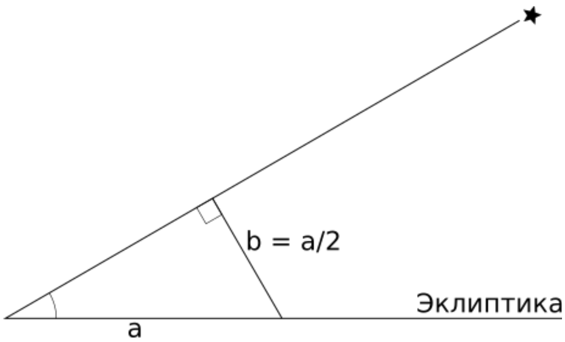

Рисунок 1: Определение эклиптической широты звезды

Из треугольника на рис. 1 получаем эклиптическую широту β равную

$$\beta=\arcsin\sqrt{1-e^2}\approx\pm 29°32'.$$

В точке весеннего равноденствия Солнце в процессе своего годичного движения переходит из южной небесной полусферы в северную. Значит, при прямом восхождении 6^h эклиптика достигает максимального склонения 23°26′. Склонение звезды равно

$$\delta_1 = 23°26' + 29°32' = 52°58'$$

или

$$\delta_2 = 23°26' - 29°32' = -6°6'.$$

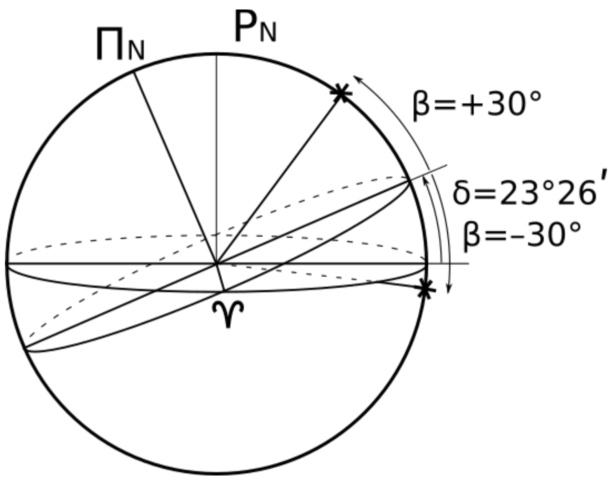

Рисунок 2: Определение склонения звезды

Параллаксом звезды называют угол π, под которым виден радиус земной орбиты. По условию $\pi = 0.002''$. Следовательно, расстояние L до звезды равно

$$L = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0.002} = 500\,\text{пк.}$$

Критерии проверки

Вычисление малой полуоси эллипса оценивается в **2 балла**.

Вычисление эклиптической широты – по **1 баллу** за каждый возможный вариант.

Вычисление склонения – по **1 баллу** за каждый возможный вариант.

Ответ участника может отличаться примерно на 0.5° от данного в этом решении, поскольку при округлении малой полуоси параллактического эллипса до 1 mas угол β получается равным 30° ровно. Такое отличие от ответа не штрафуется.

Вычисление расстояния до звезды – **2 балла**: 1 балл за запись правильной формулы и 1 балл за вычисление правильного конечного ответа.

*Максимальная оценка – **8 баллов**.*

(Е. Н. Фадеев)

Задача 3

Звёздная величина скопления звёзд равна 5^m. Самая тусклая звезда этого скопления имеет блеск 15^m. Светимость следующей по яркости звезды в два раза больше, чем самой тусклой, светимость следующей – в 3 раза больше, чем самой тусклой и так далее. Определите число звёзд в скоплении и звёздную величину самой яркой звезды. Как Вы считаете, это рассеянное или шаровое скопление?

Решение

Пусть L – светимость всего скопления, а L_1 – светимость самой тусклой звезды. Светимость второй по яркости звезды обозначим как $L_2 = 2L_1$, третьей – $L_3 = 3L_1$, N-ой – $L_N = NL_1$. Посчитаем светимость всех звёзд вместе. Для этого возьмём две последовательности чисел $L_1, L_2, \dots L_{N-1}, L_N$ и $L_N, L_{N-1}, \dots L_2, L_1$ и сложим их поэлементно: $L_1 + L_N$, $L_2 + L_{N-1}$, … $L_N + L_1$. Все эти суммы равны $(N+1)\,L_1$, а всего их N. Получаем, что суммарная светимость равна

$$L=\frac{(N+1)\,L_1 N}{2}.$$

Мы учли, что при суммировании взяли две последовательности, т. е. удвоили число звёзд. Преобразуем это уравнение к виду

$$N^2+N-2\frac{L}{L_1}=0.$$

Поскольку самая тусклая звезда слабее всего скопления на 10 звёздных величин, то отношение L/L_1 равно 10000. Решив квадратное уравнение, получаем $N \approx 141$. Шаровые скопления содержат сотни тысяч и миллионы звёзд. Значит, наше скопление может быть только рассеянным.

Звёздная величина 141-й звезды равна

$$m_{141}=m_1-2.5\lg 141\approx 9.6.$$

Критерии проверки

Вывод о том, что блеск самой тусклой звезды и всего скопления отличается в 10000 раз – **1 балл**.

Вычисление числа звёзд скопления – **3 балла**.

Вывод о типе скопления – **1 балл**.

Вычисление звёздной величины самой яркой звезды – **3 балла**.

Максимальная оценка – 8 баллов.

(Е. Н. Фадеев)

Условие 4

Меркурий находится в элонгации, максимальной в текущем периоде видимости, а Венера – в соединении с Меркурием. Какие фазы Венеры мы можем наблюдать? Орбиты Венеры и Земли считать круговыми. Все орбиты считать лежащими в плоскости эклиптики.

Решение

Большая полуось орбиты Меркурия равна a_m = 0.39 а.е., а эксцентриситет орбиты e = 0.21. Значит, Меркурий может находиться на расстоянии от

$$r_p = a\,(1 - e) = 0.31 \text{ а.е.}$$

до

$$r_a = a\,(1 + e) = 0.47 \text{ а.е.}$$

Венера находится в соединении с Меркурием, т. е. эти две планеты и Земля располагаются на одной линии. При этом, Венера может быть как ближе, так и дальше Меркурия. Фазовый угол Венеры φ, т. е. угол с вершиной в Венере между направлениями на Солнце и Землю, равен

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{r}{a_v},$$

в случае, когда Венера находится дальше Меркурия, и

$$\varphi_2 = 180° - \varphi_1,$$

когда Венера ближе Меркурия. Здесь a_v = 0.72 а.е. — радиус орбиты Венеры, а r – произвольное расстояние Меркурия до Солнца. Тогда для обоих случаев можно записать диапазоны фазовых углов: $\varphi_1 \in [26°, 41°]$ и $\varphi_2 \in [139°, 154°]$. Фаза с фазовым углом связана следующим образом:

$$\Phi = \frac{1 + \cos\varphi}{2} = \cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Отсюда получаем ответ:

$$\Phi_1 \in [0.88, 0.95] \text{ и } \Phi_2 \in [0.051, 0.12].$$

То есть, в случае верхнего соединения мы будем видеть почти весь диск Венеры, а в нижнем соединении – лишь узкий серпик.

Критерии проверки

Вычисление расстояния Меркурия в максимальной элонгации в перигелии и афелии – по **1 баллу**. Если используется только среднее расстояние от Солнца, то за этот этап выставляется **1 балл**, а оценка за всю задачу не может превышать **5 баллов**.

Вычисление фазового угла – по **1 баллу** за верхнее и нижнее соединение.

Правильная запись формулы для фазы **– 1 балл**.

Вычисление ответов: **1 балл**, если в ответе отдельные числа; **3 балла**, если использованы диапазоны.

*Максимальная оценка – **8 баллов**.*

(Е. Н. Фадеев)

Задача 5

Определите пару планет Солнечной системы, для которых время прохождения одной по диску Солнца при наблюдении с другой планеты будет максимально. Считайте, что орбиты всех планет круговые и лежат в одной плоскости. Угловым размером планеты, проходящей по диску Солнца, пренебречь.

Решение

На время прохождения влияют несколько факторов. Во-первых, чем ближе орбиты планет друг к другу, тем больше синодический период, а значит дольше время, которое внутренняя планета может проводить на диске Солнца. Поэтому совершенно не имеет смысла рассматривать все пары планет, достаточно рассматривать соседние. Во-вторых, чем ближе планеты к Солнцу, тем больший угловой размер Солнце имеет на небе планеты.

Будем проводить вычисления в системе отсчёта, которая вращается вокруг Солнца вместе с внешней планетой. Пусть R – радиус Солнца, а L_o – радиус орбиты внешней планеты. Тогда угловой радиус Солнца, видимый с этой планеты,

$$\alpha = \operatorname{arctg}(R/L_o) \approx R/L_o = \alpha_\oplus / a_o \,,$$

где $\alpha_\oplus$ – угловой радиус Солнца, видимый с Земли, а a_o – радиус орбиты планеты, выраженные в а.е.

Найдём величину дуги 2γ орбиты внутренней планеты, которая проецируется на Солнце. Для этого из теоремы синусов найдём величину вспомогательного угла ψ:

$$\psi = \arcsin\left(\frac{L_o}{L_i}\sin\alpha\right),$$

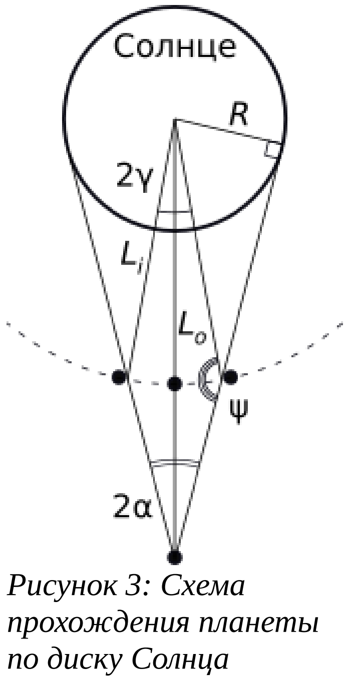

Рисунок 3: Схема прохождения планеты по диску Солнца

где L_i – радиус орбиты внутренней планеты. Отсюда искомая величина 2γ равна

$$2\gamma=2(\pi-\psi-\alpha)\,.$$

Поскольку мы рассматриваем относительное движение, то один оборот по орбите внутренняя планета совершает за синодический период S. Поэтому время прохождения будет равно

$$t=S\frac{2\gamma}{2\pi}=S\frac{\gamma}{\pi}\,.$$

Синодический период можно найти из сидерического, воспользовавшись уравнением синодического движения:

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{T_i}-\frac{1}{T_o}\,,$$

где T_i и T_o – сидерические периоды обращения внутренней и внешней планет.

Результаты вычислений сведём в таблицу. В строке каждой планеты мы определили значения для прохождения планеты, идущей строкой ниже.

Планета	**L, а.е.**	**T, лет**	**α, ′**	**ψ, °**	**2γ, ′**	**S, лет**	**t, ч**
Нептун	30.11	164.8	1.06	179.986	0.602	155.5	38.0
Уран	19.22	80.2	1.66	179.972	1.67	46.63	31.7
Сатурн	9.583	29.46	3.34	179.949	2.81	19.85	22.6
Юпитер	5.204	11.86	6.14	179.825	14.8	2.234	13.5
Марс	1.524	1.881	21.0	179.734	11.0	2.136	9.53
Земля	1	1	32.0	179.634	12.2	1.599	7.94
Венера	0.7233	0.6152	44.2	179.312	38.4	0.3957	6.17
Меркурий	0.3871	0.2408	82.6				

Отсюда делаем вывод, что самое долгое прохождение – это прохождение Урана при наблюдении с Нептуна.

Альтернативное решение: предположим, что время прохождения мало, и пренебрежём кривизной орбит планет. Планеты движутся относительно Солнца с круговой скоростью

$$v=\sqrt{\frac{GM}{L}}\,.$$

Для упрощения расчётов удобно вычислить (или знать) орбитальную скорость Земли $v_{\oplus}$. Тогда для прочих планет $v = v_{\oplus} / \sqrt{a}$, где a – радиус орбиты планеты, выраженный в а.е.

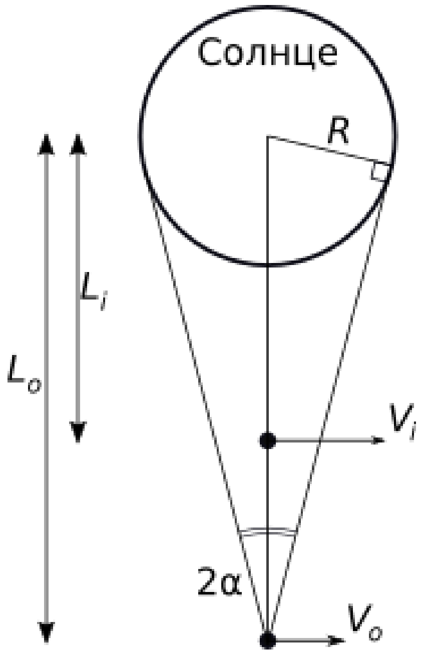

Рисунок 4:
Движение в системе отсчёта, связанной с Солнцем.

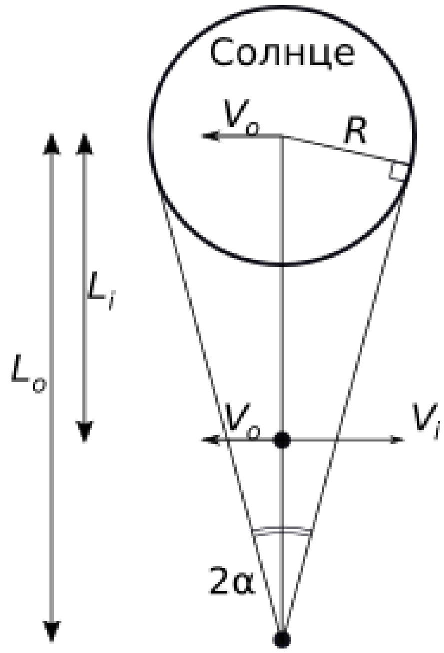

Рисунок 5:
Движение в системе отсчёта, связанной с внешней планетой.

Перейдём в систему отсчёта, связанную с внешней планетой. В этой системе отсчёта Солнце движется со скоростью внешней планеты v_i, а внутренняя планета – со скоростью $v_o - v_i$. Угловые скорости Солнца и внутренней планеты на небе внешней планеты равны соответственно

$$\omega_s = \frac{v_o}{L_o} = \sqrt{\frac{GM}{L_o^3}} \quad \text{и} \quad \omega_i = \frac{v_i - v_o}{L_o - L_i}.$$

По отношению к направлению на Солнце внутренняя планета движется с угловой скоростью

$$\Omega = \omega_i + \omega_s = \frac{v_i - v_o}{L_o - L_i} + \frac{v_o}{L_o} = \frac{v_i L_0 - v_o L_i}{L_o (L_o - L_i)} = \frac{\omega_i - \omega_o}{L_o - L_i} L_i.$$

Заметим, что угловые скорости ω можно представить в виде

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{L^3}} = \sqrt{\frac{GM}{L_{\oplus}^3}} \sqrt{\frac{L_{\oplus}}{L^3}} = \frac{\omega_{\oplus}}{a^{3/2}}.$$

Тогда время, за которое внутренняя планета пересекает угловой диаметр Солнца равно

$$t=\frac{2\alpha}{\Omega}=\frac{2\alpha_\oplus}{a_o\omega_\oplus}\left(\frac{L_o}{L_i}-1\right)\left(a_i^{-3/2}-a_o^{-3/2}\right)^{-1}=\frac{2\alpha_\oplus}{\omega_\oplus}\left(\frac{a_o}{a_i}-1\right)\frac{\sqrt{a_o}}{\left(a_o/a_i\right)^{3/2}-1}=\frac{2\alpha_\oplus}{\omega_\oplus}f\left(a_o,a_i\right).$$

Величина $2\alpha_\oplus/\omega_\oplus$ имеет размерность времени и численно равна примерно 12.9 часа. Как и для предыдущего случая, сведём результаты всех вычислений в таблицу.

Планета	L, а.е.	T, лет	α, ′	v_o, км/с	ω_s, 10^{-9} с$^{-1}$	ω_i, 10^{-9} с$^{-1}$	f	t, ч
Нептун	30.11	164.8	1.06	5.44	1.21	0.84	3.24	41.8
Уран	19.22	80.2	1.66	6.81	2.37	1.97	2.39	31.0
Сатурн	9.583	29.46	3.34	9.65	6.73	5.26	1.74	22.5
Юпитер	5.204	11.86	6.14	13.1	16.8	20.2	1.04	13.4
Марс	1.524	1.881	21.0	24.2	106	72.4	0.734	9.50
Земля	1	1	32.0	29.9	200	127	0.611	7.91
Венера	0.7233	0.6152	44.2	35.1	325	256	0.475	6.15
Меркурий	0.3871	0.2408	82.6	48.8				

Вновь самое долгое прохождение – это прохождение Урана при наблюдении с Нептуна.

Критерии проверки

Для первой схемы решения:

– определение синодического периода внутренней планеты – **1 балл**;

– определение длины дуги орбиты, внутри которой должна находиться планета, чтобы произошло покрытие, – **3 балла**.

Для второй схемы решения:

– вычисление круговой скорости – **1 балл**;

– формула для угловой скорости Солнца – **1 балл**, внутренней планеты – **1 балл**;

– правильная формула для относительной круговой скорости – **1 балл**.

Для обоих вариантов:

– определение углового размера Солнца с внешней планеты – **1 балл**;

– вычисление времени прохождения **2 балла** (1 балл за формулу и 1 балл за верный численный ответ).

– вывод о том, какая пара планет покажет прохождение максимальной продолжительности – **1 балл** (только при верных вычислениях).

*Максимальная оценка – **8 баллов**.*

(В. Б. Игнатьев)

Задача 6

В течение длительного времени ось мира совершает прецессионное движение вокруг оси эклиптики, в результате чего в разные тысячелетия наиболее близкими к полюсам мира становятся разные звёзды. В таблице приведены сведения о наиболее ярких звёздах, мимо которых на достаточно близком расстоянии проходят Северный и Южный полюсы мира.

Звезда	Эклиптические координаты на эпоху 2000.0		Звёздная величина	Звезда	Эклиптические координаты на эпоху 2000.0		Звёздная величина
	долгота λ	широта β			долгота λ	широта β	
Северный полюс мира				Южный полюс мира			
α Цефея (Альдерамин)	12°47'	68°55'	2.45	α Золотой Рыбы	37°50'	−74°35'	3.60
β Цефея (Альфирк)	35°33'	71°09'	3.20	α Часов	45°49'	−61°44'	3.85
γ Цефея (Альраи)	60°06'	64°40'	3.20	η Голубя	89°37'	−66°15'	3.95
α Малой Медведицы (Киносура)	88°34'	66°06'	1.95	α Киля (Канопус)	104°58'	−75°49'	-0.65
β Малой Медведицы (Кохаб)	133°19'	72°59'	2.05	ν Кормы	107°09'	−66°04'	3.15

α Дракона (Тубан)	157°27'	66°23'	3.65	γ Парусов (Регор)	147°21'	−64°28'	1.75
ε Большой Медведицы (Алиот)	158°56'	54°19'	1,75	ο Парусов	164°44'	−66°17'	3.60
η Большой Медведицы (Алькаид)	176°56'	54°23'	1.85	δ Парусов (Альсефина)	168°57'	−67°12'	1.95
ι Дракона (Эдасих)	184°57'	71°06'	3.25	ι Киля (Аспидиске)	185°20'	−67°07'	2.20
τ Геркулеса	224°23'	65°50'	3.90	l Киля	197°04'	−66°19'	3.65
η Геркулеса	239°04'	60°17'	3.45	υ Киля	202°53'	−67°30'	3.00
π Геркулеса	252°04'	59°33'	3.15	β Киля (Миаплацид)	211°58'	−72°14'	1.65
α Лиры (Вега)	285°19'	61°44'	0.00	ω Киля	217°26'	−67°23'	3.25
γ Лебедя (Садр)	324°50'	57°07'	2.20	β Южной Гидры	300°57'	−64°48'	2.80
α Лебедя (Денеб)	335°20'	59°54'	1.25	α Южной Гидры	324°07'	−64°15'	2.85

Ответьте на следующие вопросы:

1. Какая из этих звёзд может находиться наиболее близко к Северному, а какая – к Южному полюсу мира?
2. Как скоро это произойдёт? Дайте ответ для каждой из этих двух звёзд.
3. Какая звезда ярче 2^m будет в этот момент ближе всего к полюсу мира?
4. Когда Альдерамин станет наиболее близкой к северному полюсу мира звездой?
5. Во сколько раз северная полярная звезда будет ярче южной в 13989 году?

Считайте текущий наклон экватора к эклиптике неизменным, а звёзды неподвижными.

Решение

С хорошей точностью можно считать, что при прецессии оси мира вокруг оси эклиптики угол между ними не меняется, всегда равняясь ε = 23°26', а ось эклиптики и сама эклиптика – неподвижны. Поэтому эклиптическая широта оси мира всегда будет составлять $\beta_P = 90° - \varepsilon = 66°34'$. Меняют своё положение относительно далёких звёзд только небесный экватор и ось мира, а также, например, точка весеннего равноденствия ♈, являющаяся точкой пересечения неподвижной эклиптики и подвижного небесного экватора.

Из рисунка видно, что при прецессии у любой звезды меняется лишь эклиптическая долгота λ (поскольку движется начало её отсчёта – точка ♈, а звезда остаётся неподвижной). Положение самой эклиптики не меняется, и поэтому остаётся неизменной и эклиптическая широта β любой звезды. Таким образом, эклиптические широты звёзд, приведённых в таблице на эпоху 2000.0, будут оставаться такими же.

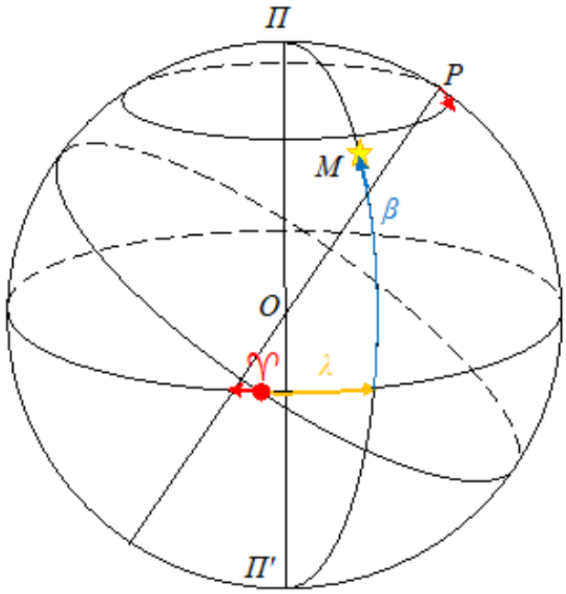

Рисунок 6: Прецессия полюса мира

1) Рассмотрим большой полукруг, проходящий через полюсы эклиптики П и П' и некоторую звезду M. Ясно, что угловое расстояние между звездой и северным полюсом мира P будет минимально в тот момент, когда P пересечёт этот полукруг, и оно будет составлять $\Delta_{min} = |66°34' - \beta|$. Получается, что решение этой части задачи сводится к вычислению этой величины для всех звёзд и поиска минимальной среди них. Результаты сведём в таблицу. Для краткости мы воспользовались стандартными латинскими обозначениями созвездий.

Звезда	Δ_{min}	**Звезда**	Δ_{min}	**Звезда**	Δ_{min}	**Звезда**	Δ_{min}
α Cep	2°21'	ι Dra	4°32'	α Dor	8°01'	ι Car	0°33'
β Cep	4°35'	τ Her	0°44'	α Hor	4°50'	l Car	0°15'
γ Cep	1°54'	η Her	6°17'	η Col	0°19'	υ Car	0°56'
α UMi	0°28'	π Her	7°01'	α Car	9°15'	β Car	5°40'
β UMi	6°25'	α Lyr	4°50'	ν Pup	0°30'	ω Car	0°49'
α Dra	0°11'	γ Cyg	9°27'	γ Vel	2°06'	β Hyi	1°46'
ε UMa	12°15'	α Cyg	6°40'	o Vel	0°17'	α Hyi	2°19'
η UMa	12°11'			δ Vel	0°38'		

В результате получаем, что самой близкой к Северному полюсу мира может быть Тубан, α Дракона, а к Южному – l Киля. Заметим, что если использовать менее точное значение наклона экватора к эклиптике – 23.4° или 23.5°, то качественно результат не изменится.

2) При прецессии Северный полюс мира P движется вместе с точкой весеннего равноденствия ♈ относительно эклиптики, и поэтому его эклиптические координаты не меняются, оставаясь всегда равными λ_P = 90°, β_P = 66°34'. Такими же они были в эпоху 2000.0. Эклиптические долготы звёзд меняются в ходе прецессии. Но их значения на эпоху 2000.0 могут помочь вычислить угол поворота, на который должна повернуться ось мира, чтобы Северный полюс мира оказался на минимальном угловом расстоянии от звезды. Он равен разности эклиптических долгот полюса мира *P* и звезды *M*: L = λ_P – λ, где λ – эклиптическая долгота звезды на эпоху 2000.0, причём если значение λ, приведённое в таблице, больше 90°, то из него нужно вычесть 360°.

За примерно T = 26000 лет Северный полюс мира совершает полный оборот вокруг северного полюса эклиптики, значит, на угол L он повернётся за промежуток времени

$$\Delta t = \frac{L}{360°} \cdot T .$$

В случае Тубана λ = 157°27' > 90°, поэтому

$$\Delta t_1 = \frac{90° - (157°27' - 360°)}{360°} \cdot 26000 \text{ лет} \approx 21100 \text{ лет},$$

то есть наиболее близким к Северному полюсу мира он станет примерно в 2000 + 21100 = 23100 году.

Эклиптическая долгота Южного полюса мира равна 270°. Рассуждая аналогичным образом, делаем вывод о том, что l Киля окажется на минимальном расстоянии от Южного полюса мира через

$$\Delta t_2 = \frac{270° - 197°04'}{360°} \cdot 26000\,\text{лет} \approx 5300\,\text{лет},$$

т. е. около 7300 года.

3) В таблице для Северного полушария дано всего 5 звёзд ярче 2^m. Очевидно, что Денеб, Вега и Киносура дальше от Тубана, чем звёзды Большой Медведицы. Рассчитать точно угловое расстояние между звёздами вблизи полюса достаточно сложно, необходимо пользоваться формулами сферической тригонометрии. Но в нашем случае можно заметить, что широты Алиота и Алькаида практически совпадают, а долгота Алиота близка к долготе Тубана. Поэтому в нужный момент именно Алиот оказывается самой близкой к полюсу мира яркой звездой. Расстояние составит всего около 12° (точные вычисления дают 12°16' для Алиота и 15°23' для Алькаида).

В случае с Южным полушарием также легко отбросить заведомо неверные варианты Канопус и Регор. Но выбор между Миаплацидом и Альсефиной несколько сложнее. Для того чтобы оценить расстояние от полюса мира до Альсефины, можно пренебречь их различием в эклиптической широте. Тогда $l_A = (197°04' - 168°57')\cos 66°34' \approx 11°11'$. Расстояние до Миаплацида оценим с помощью теоремы Пифагора, держа в уме то, что оценка получится несколько завышенной:

$$l_M = \sqrt{[(211°58' - 197°04')\cos 66°34']^2 + (72°14' - 66°19')^2} \approx 8°12'.$$

Отсюда делаем вывод, что Миаплацид ближе.

4) В случае Альдерамина λ = 12°47' < 90°, поэтому

$$\Delta t = \frac{90° - 12°47'}{360°} \cdot 26000\,\text{лет} \approx 5580\,\text{лет},$$

то есть наиболее близким к Северному полюсу мира он станет примерно в 2000 + 5580 = 7580 году.

5) Посчитаем угол L, на который повернётся Северный (и Южный) полюс мира к 13989 году:

$$L = \frac{360°}{T} \cdot \Delta t = \frac{360°}{26000} \cdot (13989 - 2000) \approx 166°.$$

Значит, Северный полюс окажется в точке, которая сейчас имеет эклиптическую долготу 284°, а Южный – в точке с эклиптической долготой 104°. В Северном полушарии в это время полярной звездой будет Вега, а в Южном – ν Кормы (Канопус располагается от полюса почти в 10°). Используя формулу Погсона получаем, что Вега ярче ν Кормы в

$$10^{0.4(3,15-0)} \approx 18 \text{ раз.}$$

Критерии проверки.

1) Обоснованный ответ на первый вопрос (ближайшая возможная к полюсу мира звезда) – по **1 баллу** за северную и южную полярную звезду.

2) Вычисление времени до максимального сближения полюса со звёздами из п. 1 – по **1 баллу** за каждую.

3) Верно найденные звёзды ярче 2^m, ближайшие к полюсу, – по **2 балла** за звезду.

4) Вычисление времени до максимального сближения полюса с Альдерамином – **1 балл**.

5) Поиск правильных полярных звёзд на указанную дату – по **1 баллу**, и искомое отношение – **1 балл**.

Максимальная оценка – ***12 баллов****.*

(Н. Д. Уткин, Е. Н. Фадеев)

Всего за работу 52 балла.

Справочные данные

Планета	Большая полуось, а.е.	Эксцентриситет орбиты	Сидерический период, лет	Радиус планеты, км
Меркурий	0.3871	0.2056	0.2408	2440
Венера	0.7233	0.0068	0.6152	6052
Земля	1	0.0167	1	6371
Марс	1.524	0.0934	1.881	3396
Юпитер	5.204	0.0483	11.86	69911
Сатурн	9.583	0.0560	29.46	58230
Уран	19.22	0.0461	80.2	25360
Нептун	30.11	0.0097	164.8	24620