

Тренерский штаб сборной России по астрономии и астрофизике
Методическая комиссия олимпиады школьников по астрономии имени В. Я. Струве



IV Олимпиада школьников по астрономии имени В. Я. Струве

Заключительный этап

Задания, решения и критерии оценивания

Методическое пособие

Москва
2025

УДК 52(076.1)

ББК 22.6

IV Олимпиада школьников по астрономии имени В. Я. Струве. Заключительный этап. Задания, решения и критерии оценивания : методическое пособие / Под ред. И. А. Утешева, А. В. Веселовой — М.: 2025. — 50 с.

Олимпиада школьников по астрономии имени В.Я. Струве проводится для учащихся 7–8-х классов как дополнение к Всероссийской олимпиаде школьников по астрономии, в последних этапах которой принимают участие 9–11-классники. Олимпиада проводится для популяризации астрономии и других естественных наук, а также для выявления на раннем этапе способных и талантливых учащихся и их привлечения к систематическим занятиям астрономией.

Заключительный этап IV олимпиады состоялся 24–25 апреля 2025 года в распределённом формате в 65 регионах России от Чукотского автономного округа до Калининградской области.

Комплект заданий подготовлен методической комиссией
олимпиады школьников по астрономии имени В. Я. Струве
struve.astroedu.ru • struve@astroedu.ru

Авторы-составители: Веселова А. В., СПбГУ (Санкт-Петербург)
Волобуева М. И., ПФМЛ № 239 (Санкт-Петербург)
Зворыкин И. А., МФТИ (Москва)
Утешев И. А., МФТИ, ЦПМ (Москва)
Шамбин А. И., АГУ (Республика Адыгея)
Шишкина А. Ф., УНИТ (Республика Башкортостан)

Редакторы: Утешев И. А. — письменный тур
Веселова А. В. — онлайн-тур

Рецензенты: Эскин Б. Б., СПбГУ (Санкт-Петербург)
Булыгин И. И., МГУ им. М. В. Ломоносова, ЦПМ (Москва)

Тренерский штаб сборной России по астрономии и астрофизике выражает благодарность Министерству просвещения Российской Федерации и Московскому физико-техническому институту за поддержку инициативы по организации олимпиады, а также всех причастных к её проведению, в особенности членов жюри заключительного этапа олимпиады 2025 года: Автаеву А.А., Безбородову И.Н., Булыгина И.И., Веселову А.В., Зворыкина И.А., Иванова Е.С., Кирсанкину А.П., Кованкина А.С., Комкова Н.Н., Леденева Е.И., Орлова И.О., Русакова С.А., Санковского Д.Е., Телелюхина К.С., Утешева И. А., Федорова В. С., Шишкину А. Ф., Южакова И. И.

Содержание

I Письменный тур	4
7 класс	6
7.1 Один день решает судьбу империи	6
7.2 Труба на Европу	9
7.3 Трое на орбите ждут Рассветы	13
7.4 Вне Земли от счастья	16
7.5 Да-да, созвездие Кота	20
7.6 Чашу огня в небо поднять	24
8 класс	29
8.1 Один день решает судьбу империи	29
8.2 Мальчик, который гулял сам по себе	32
8.3 Марс и Юпитер, или N лет спустя	36
8.4 Ой, не преувеличивай	38
8.5 Живите сегодняшним днём!	40
8.6 Чашу огня в небо поднять	44
II Онлайн-тур	49
Справочные данные	50

Часть I

Письменный тур

На письменном туре участникам предложены 6 задач, на выполнение которых отводилось 3 часа 55 минут. Каждая задача предполагает представление развёрнутого письменного решения.

Решение каждого задания оценивается из 10 баллов. Максимальная оценка за тур — 60 баллов.

Принципы оценивания олимпиадных работ

1. Правильное решение оценивается полным баллом, при этом оно не обязано повторять авторское буквально или логически. Частично верное или совершенно неверное решение оценивается соответственно частичным баллом или нулём.

2. Решение участника разбивается на логические элементы (шаги). Каждый из шагов оценивается независимо в соответствии с критериями, приведёнными после авторского решения задачи. Оценка за задачу равна сумме оценок за каждый из критериев.

За каждый из критериев выставляется *неотрицательная* оценка. Если критерием предусмотрен штраф, он применяется к полной оценке за критерий; штрафы в пределах одного критерия складываются.

3. Каждый критерий оценивается независимо. За одну и ту же ошибку участник не может быть «наказан» дважды. Однако если участник получил и проигнорировал заведомо абсурдный результат, оценка может быть снижена вплоть до нуля.

4. Оригинальные решения, не совпадающие с авторскими, оцениваются по аналогии, если в них возможно выделить аналогичные шаги.

Решение участника может оказаться более эффективным, чем авторское. В таком случае «выпадающие» критерии оцениваются в полном объёме.

5. Если участник совершает ошибку, не предусмотренную в критериях, член жюри самостоятельно определяет величину штрафа.

Оценка *не снижается* за плохой почерк, помарки, недостатки оформления и прочие не относящиеся к сути решения участника элементы, но может быть снижена за запись численных ответов с заведомо абсурдной точностью.

6. Для выставления справедливой оценки учитывается *вся проделанная участником работа*. Некоторые правильные идеи и догадки, имеющие отношение к корректному решению задачи, могут быть (на усмотрение членов жюри) оценены суммарно в 1–2 балла даже при отсутствии конкретных продвижений.
7. Не оцениваются элементы, не имеющие отношения к решению конкретной задачи: отвлечённые факты и произвольные формулы. Однако если правильное решение содержит необязательные дополнения и комментарии с грубыми физическими и астрономическими ошибками, оценка может быть снижена.
8. Каждая задача проверяется независимо двумя членами жюри. В протокол жюри вносится *одна* согласованная оценка за задачу. Если устранить разногласия не удалось, окончательное решение принимает председатель жюри или уполномоченный им член жюри.

7 класс

7.1 Один день решает судьбу империи

В биографии одного выдающегося исторического деятеля указано, что он родился 13 (24) ноября, а скончался 6 (18) мая. Известно, что он умер в последний год уходящего века на 70-м году жизни.

- а) Почему в условии задачи указаны двойные даты?
- б) Определите годы жизни этого человека.
- в) *Не оценивается*: попробуйте угадать, о ком идёт речь.

Возможное решение

Одна минута решает исход баталии;
один час – успех кампании;
один день – судьбу империи.

Александр Васильевич Суворов

Двойная датировка событий используется для ясности из-за существования двух систем летоисчисления: юлианского календаря (старый стиль) и григорианского календаря (новый стиль). Григорианский календарь был введён в 1582 году, однако фактический переход на новый стиль в разных странах произошёл в разное время; так, в России современный календарь стал использоваться только с 1918 года*. Во избежание путаницы даты событий российской истории между 1582 и 1918 гг. указываются одновременно и по новому, и по старому стилю.

С 1 марта 1900 года по настоящее время разница между новым и старым стилем составляет 13 дней. Как видно из условия, во время жизни исторического деятеля эта разница была другой: в день его рождения она составляла $24 - 13 = 11$ дней, а в день смерти уже $18 - 6 = 12$ дней.

В юлианском и григорианском календарях добавочный день високосного года — 29 февраля, однако календари слегка различаются правилом определения високосного года. В юлианском календаре високосным является любой год, номер которого кратен 4. В григорианском календаре базовый принцип такой же, однако год, номер которого делится на 100, но не кратен 400, считается невисокосным.

*Декрет Совета народных комиссаров о введении в Российской республике западноевропейского календаря от 26 января 1918 года.

Таким образом средняя продолжительность юлианского года составляет $365 + \frac{1}{4} = 365.25$ сут., в то время как средняя продолжительность григорианского года $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365.2425$ сут., что лучше приближает среднюю продолжительность тропического года (примерно 365.2422 сут.)

Например, 1700, 1800, 1900, 2100... гг. являются високосными по старому стилю, а по новому — нет (отметим, что 2000 год високосный в обоих календарях). Именно в такие годы расхождение между календарями увеличивается на 1 день (вместо 29 февраля в григорианском календаре наступает сразу 1 марта):

Период [†]	Разница календарей, сут.
Октябрь 1582 – февраль 1700	10
Март 1700 – февраль 1800	11
Март 1800 – февраль 1900	12
Март 1900 – февраль 2100	13
Март 2100 – февраль 2200	14

Так как и рождение, и смерть деятеля произошли уже после февраля соответствующего года (в ноябре и в мае), получаем, что первые две цифры года рождения — это 17, а года смерти — 18.

Осталось определить последние две цифры. Так как исторический деятель умер «в последний год уходящего века», то, очевидно, это был **1800 год**. Отметим, что номер последнего года века всегда делится на 100, так как «нулевого» года не существовало (поэтому, вопреки распространённому заблуждению, XXI век и третье тысячелетие начались 1 января 2001 года, а не 2000-го).

Поскольку герой родился в ноябре, а умер в мае «на 70-м году жизни», 70 лет ему должно было исполниться в год смерти, то есть в ноябре 1800 года. Значит, он родился в $1800 - 70 = 1730$ году.

О ком же речь? Конечно, об Александре Васильевиче Суворове — одном из величайших полководцев в истории России[‡], чья фраза из труда «Наука побеждать», посвящённого теории военного искусства, озаглавила эту задачу.

[†]Юлианские даты до 5 (15) октября 1582 года (даты введения григорианского календаря) тоже можно пересчитать «по новому стилю», но так делать не принято. Календарь, используемый для обозначения дат, более ранних, чем дата введения самого календаря, называют *пролептическим*.

[‡]Интересно, что год рождения А. В. Суворова является предметом споров: некоторые историки полагают, что он родился не в 1730, а в 1729 году.

Критерии оценивания:

a1	Двойная датировка объяснена указанием дат по юлианскому и григорианскому календарю (старому и новому стилю) <i>Нет верных названий календарей или стилей</i>	3 –1
a2	Указана верная разница дней между новым и старым стилем	1
a3	Определена разница дат рождения и (или) смерти	1
a4	Объяснён механизм изменения разницы дат. Указан критерий високосности года с номером вида $\overline{AB00}$	1
б1	Получены первые две цифры годов рождения и смерти (определён век жизни)	1
б2	Показано, что последний год века оканчивается на 00, не на 99. Приведено рассуждение о связи месяцев рождения и смерти с возрастом и годом рождения	0.5 + 0.5
б3	Дан верный ответ (год жизни и год смерти)	2
Всего		10

Верный ответ на вопрос, о каком историческом деятеле идёт речь, не оценивается (о чём сразу предупредили в условии задачи), но методическая комиссия олимпиады искренне гордится участниками, которые помнят историю России!

7.2 Труба на Европу

Однажды вечером скучающий инопланетянин Гигос XZ решил полететь на Землю, чтобы познакомиться с местными жителями. Гигос XZ живет на планете Терра, вращающейся вокруг звезды Гли, похожей на Солнце. Расстояние от Гли до Солнца составляет 10 парсек.

До Земли Гигос планирует добраться так:

- До Европы (спутника Юпитера) он движется по гиперпространственной транспортной трубе «Квантовый поток» со скоростью $v_0 = 4$ световых года в час.
- После выхода из трубы Гигосу понадобится 3 часа на перезарядку систем корабля и улаживание таможенных формальностей.
- Далее Гигос продолжает движение по Солнечной системе на своём корабле со скоростью $u_0 = 1$ астрономическая единица в час.

Задания:

- а) Сколько времени может занять вышеописанное путешествие Гигоса до Земли? Рассмотрите все возможные варианты.
- б) На корабле Гигоса есть k -ускоритель, который позволяет передвигаться в гипертрубе со скоростью $v = kv_0$, где $k > 0$. Однако после использования ускорителя скорость вне трубы из-за усталости двигателей также изменится и станет равной $u = \frac{1}{k}u_0$. Найдите оптимальное (то есть позволяющее достигнуть Земли за наименьшее время) значение настройки k , если Юпитер находится на минимально возможном расстоянии от Земли.

Подсказка: минимум функции $y(x) = ax + \frac{b}{x}$ при $a, b, x > 0$ достигается в точке $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

- в) Вычислите среднюю скорость движения Гигоса на протяжении всего путешествия без ускорителя и со включённым k -ускорителем при оптимальной настройке при том же положении Юпитера. Выразите ответы в единицах скорости света.

Возможное решение. Для начала определим время движения Гигоса по трубе без включения ускорителя. Переведём парсеки в световые годы, например, воспользовавшись сведениями из выданных справочных данных о выражении каждой из указанных величин в метрах:

$$1 \text{ пк} = \frac{3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}}{9.461 \cdot 10^{15} \text{ м}} \approx 3.26 \text{ св. лет.}$$

Тогда путешествие по трубе занимает

$$t_0 = \frac{10 \text{ пк}}{v_0} = \frac{10 \times 3.26 \text{ св. год}}{4 \text{ св. год/ч}} = 8.15 \text{ ч.}$$

Расстояние d , которое Гигосу необходимо пролететь по Солнечной системе, зависит от взаимного расположения Земли и Юпитера (см. рис 1). Расстоянием между Юпитером и Европой, очевидно, можно пренебречь ввиду его малости по сравнению с межпланетными расстояниями.

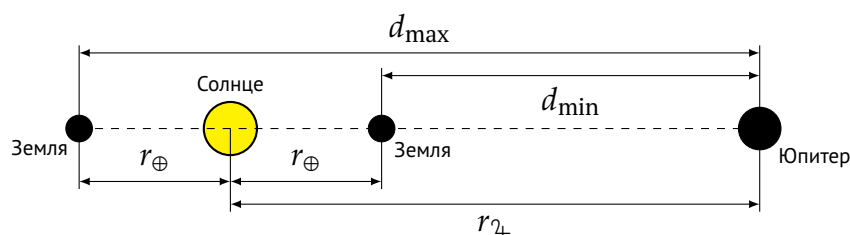


Рис. 1: Взаимные расположения Земли и Юпитера (не в масштабе)

Минимальное расстояние $d_{\min}$ достигается, когда Земля и Юпитер расположены на одной прямой по одну сторону от Солнца. В этом случае расстояние равно разности радиусов орбит планет:

$$d_{\min} = r_{\text{♃}} - r_{\oplus} = 5.2 - 1.0 = 4.2 \text{ а. е.}$$

Максимальное расстояние $d_{\max}$ между планетами достигается также при их расположении на одной прямой, но с разных сторон от Солнца. Из рисунка видно, что в таком случае

$$d_{\max} = r_{\text{♃}} + r_{\oplus} = 5.2 + 1.0 = 6.2 \text{ а. е.}$$

Таким образом при перемещении со скоростью $u_0 = 1 \text{ а. е./час}$ путь по Солнечной системе занимает время $\tau_0 = d/u_0$, лежащее в пределах от 4.2 до 6.2 часов. С учётом вынужденной остановки после выхода из трубы общее время путешествия составит от $8.15 + 3 + 4.2 = \mathbf{15.35 \text{ ч}}$ до $8.15 + 3 + 6.2 = \mathbf{17.35 \text{ ч}}$.

При включении k -ускорителя скорость в трубе увеличится в k раз, а время путешествия по трубе во столько же раз уменьшится: $t_k = t_0/k = 8.15/k$ часов. Напротив, вне трубы скорость уменьшится в k раз, а время в пути увеличится соответственно: $\tau_k = k\tau_0 = 4.2k$ часов. Необходимо найти, при каком значении параметра k сумма $t_k + \tau_k = 8.15/k + 4.2k$ [ч] достигает наименьшего значения.

Воспользуемся подсказкой. Положив $a = 4.2$ и $b = 8.15$, получаем минимум выражения $ak + \frac{b}{k}$ при значении

$$k = \sqrt{\frac{8.15}{4.2}} \approx 1.39.$$

При этом общее время путешествия составит

$$\frac{8.15}{1.39} + 3 + 4.2 \times 1.39 = 14.7 \text{ (ч)}.$$

Следовательно, увеличив скорость в гипертрубе на 39 %, удастся выиграть совсем немного времени: $15.35 - 14.7 = 0.65$ часа, то есть 39 минут.

Осталось вычислить средние скорости. Для этого необходимо всё пройденное расстояние разделить на общую продолжительность путешествия. Очевидно, общий путь можем принять равным 10 парсекам = 32.6 световым годам: несколько астрономических единиц ничтожно малы по сравнению с этим расстоянием.

Гигос без включения ускорителя за 15.35 часов преодолел расстояние, которое свет проходит за 32.6 лет. Тогда его средняя скорость в единицах скорости света c есть

$$\overline{V}_1 = \frac{32.6 \text{ лет}}{15.35 \text{ ч}} \times c = \frac{32.6 \times 365.25 \times 24}{15.35} \times c \approx 18.6 \cdot 10^3 c.$$

Аналогично, для случая со включённым ускорителем

$$\overline{V}_k = \frac{32.6 \text{ лет}}{14.7 \text{ ч}} \times c = \frac{32.6 \times 365.25 \times 24}{14.7} \times c = \frac{15.35}{14.7} \times 18.6 \cdot 10^3 c \approx 19.4 \cdot 10^3 c.$$

Очевидно, Гигос не мог двигаться в «обычном» пространстве с такими скоростями: предельная скорость движения объектов в известной нам «плоской» Вселенной ограничена скоростью света. Развитая цивилизация, однако!

Критерии оценивания:

a1	Найдено время движения Гигоса по трубе	0.5
a2	Обоснованно найдены минимальное и максимальное расстояния, которые Гигосу нужно пролететь по Солнечной системе	0.5 + 0.5
a3	Определено общее время путешествия (указан верный диапазон) <i>Найдено только одно значение времени</i>	2 1

61	Правильно описаны изменения времён при использовании k -ускорителя	0.5
62	Получена верная функция вида $8.15/k + 4.2k$ (или аналогичная)	1
63	Получено верное значение оптимального k	1
в1	Верно записана формула для средней скорости, в которой средняя скорость есть отношение всего расстояния на всё время (включая остановки)	1
в2	Верно вычислена и выражена в единицах скорости света средняя скорость в первом случае	1
в3	Верно найдено время движения с использованием оптимальных настроек ускорителя	1
в4	Верно вычислена и выражена в единицах скорости света средняя скорость во втором случае	1
Всего		10

7.3 Трое на орбите ждут Рассветы

Искусственные спутники Земли (ИСЗ) «Полюс-1» (○ П₁) и «Полюс-2» (● П₂) обращаются по круговым орбитам, проходящим над Северным и Южным полюсами Земли, так, что плоскости их орбит взаимно перпендикулярны друг другу. Искусственный спутник «Экватор» (⊙ Э) обращается по круговой орбите, проходящей над экватором Земли. В некоторый начальный момент времени все три спутника оказались над экватором (рис. 2, слева). Направления движения спутников «Полюс-2» и «Экватор» в этот момент показаны стрелками. Спустя время, равное периоду обращения спутника «Полюс-1» вокруг Земли, спутники оказались в положении, изображенном на рис. 2 справа.

Зная, что период обращения спутника «Полюс-1» вокруг Земли равен 9.9 часам и что за каждые 9 оборотов спутника «Полюс-2» спутник «Экватор» совершает 11 оборотов, определите наибольшие возможные значения периодов этих спутников.

Примечание. Радиусы орбит спутников изображены на рисунке одинаковыми для удобства восприятия. В действительности они различны.

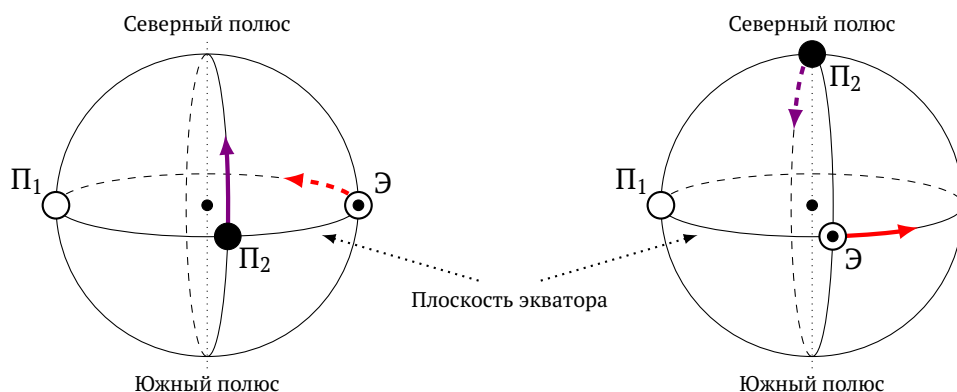


Рис. 2: Положения ИСЗ в начальный момент времени (слева) и через орбитальный период ИСЗ «Полюс-1» (справа)

Возможное решение. За один оборот спутника «Полюс-1» спутник «Полюс-2» мог совершить $\frac{1}{4}$ оборота, $1 + \frac{1}{4}$ оборота, $2 + \frac{1}{4}$ оборота, ..., $k_{\text{П2}} + \frac{1}{4}$ оборота, где $k_{\text{П2}}$ — целое неотрицательное число. Отсюда получаем соотношение между периодами обращения спутников:

$$T_{\text{П1}} = T_{\text{П2}} \left(k_{\text{П2}} + \frac{1}{4} \right) \implies T_{\text{П2}} = \frac{4T_{\text{П1}}}{4k_{\text{П2}} + 1}. \quad (1)$$

Из формулы видно, что чем больше $k_{\text{П2}}$, тем меньше период $T_{\text{П2}}$, следовательно, нужно искать решение с наименьшим возможным значением $k_{\text{П2}}$.

Аналогично, после одного оборота спутника «Полюс-1» спутник «Экватор» мог совершить $\frac{3}{4}$ оборота, $1 + \frac{3}{4}$ оборота, $2 + \frac{3}{4}$ оборота, ..., $k_{\text{Э}} + \frac{3}{4}$ оборота, где $k_{\text{Э}}$ — также целое неотрицательное число. Тогда

$$T_{\text{П1}} = T_{\text{Э}} \left(k_{\text{Э}} + \frac{3}{4} \right) \implies T_{\text{Э}} = \frac{4T_{\text{П1}}}{4k_{\text{Э}} + 3}, \quad (2)$$

а параметр $k_{\text{Э}}$ должен быть наименьшим из возможных.

Приравнивая выражения для $T_{\text{П1}}$ из (1) и (2), получаем:

$$T_{\text{П2}} \left(k_{\text{П2}} + \frac{1}{4} \right) = T_{\text{Э}} \left(k_{\text{Э}} + \frac{3}{4} \right) \implies \frac{T_{\text{П2}}}{T_{\text{Э}}} = \frac{k_{\text{Э}} + \frac{3}{4}}{k_{\text{П2}} + \frac{1}{4}}.$$

По условию за каждые 9 оборотов спутника «Полюс-2» спутник «Экватор» совершает 11 оборотов, то есть

$$9T_{\text{П2}} = 11T_{\text{Э}} \implies \frac{T_{\text{П2}}}{T_{\text{Э}}} = \frac{11}{9}.$$

Тогда

$$\frac{k_{\text{Э}} + \frac{3}{4}}{k_{\text{П2}} + \frac{1}{4}} = \frac{11}{9} \implies k_{\text{Э}} = \frac{11 \cdot (k_{\text{П2}} + \frac{1}{4})}{9} - \frac{3}{4} = \frac{44k_{\text{П2}} + 11 - 27}{36} = \frac{11k_{\text{П2}} - 4}{9}.$$

Далее подбираем наименьшее возможное значение параметров:

$$k_{\text{П2}} = 0 \implies k_{\text{Э}} = -\frac{4}{9} \quad \text{— нецелое отрицательное число,}$$

$$k_{\text{П2}} = 1 \implies k_{\text{Э}} = \frac{11 - 4}{9} = \frac{7}{9} \quad \text{— нецелое число,}$$

$$k_{\text{П2}} = 2 \implies k_{\text{Э}} = \frac{22 - 4}{9} = 2 \quad \text{— целое число (подходит!)}$$

В результате $k_{\text{П2}} = k_{\text{Э}} = 2$ — наименьшие возможные коэффициенты, которые соответствуют наибольшим возможным периодам обращения спутников «Полюс-2» и «Экватор». Теперь можем вычислить периоды обращения этих спутников:

$$T_{\text{П2}} = \frac{4T_{\text{П1}}}{4k_{\text{П2}} + 1} = \frac{4 \times 9.9 \text{ ч}}{4 \times 2 + 1} = \mathbf{4.4 \text{ ч}},$$

$$T_{\text{Э}} = \frac{4T_{\text{П1}}}{4k_{\text{Э}} + 3} = \frac{4 \times 9.9 \text{ ч}}{4 \times 2 + 3} = \mathbf{3.6 \text{ ч}}.$$

Критерии оценивания:

1	Получена формула (1) или её верный аналог	1
2	Показано, что наибольшему возможному значению периода ИСЗ «Полюс–2» соответствует наименьшее возможное значение коэффициента $k_{П2}$	1
3	Получена формула (2) или её верный аналог	1
4	Показано, что наибольшему возможному значению периода ИСЗ «Экватор» соответствует наименьшее возможное значение коэффициента $k_{Э}$	1
5	Получено верное отношение периодов $\frac{T_{П2}}{T_{Э}}$ с использованием величин $k_{П2}$ и $k_{Э}$	1
6	Записано верное численное отношение $\frac{T_{П2}}{T_{Э}}$	1
7	Получена верная формула связи между $k_{П2}$ и $k_{Э}$	1
8	Установлено, что $k_{П2} = k_{Э} = 2$	1
9	Вычислен период $T_{П2}$	1
10	Вычислен период $T_{Э}$	1
Всего		10

Примечание. «Рассвет» — российский проект низкоорбитальной спутниковой группировки для обеспечения широкополосного доступа в Интернет. В 2023–2024 гг. в рамках миссий «Рассвет-1» и «Рассвет-2» состоялся запуск шести спутников для тестирования ключевых технологий, по три аппарата за запуск.

7.4 Вне Земли от счастья

Вокруг звезды радиусом 2.3 радиуса Солнца по круговой орбите радиусом 1.2 а. е. движется планета радиусом 1.5 радиуса Земли. Наклон плоскости экватора к плоскости орбиты составляет 25° . Атмосфера у планеты отсутствует. На некоторой широте в день зимнего солнцестояния диск звезды в полдень касается горизонта нижним краем.

- а) Определите широту места наблюдения.
- б) Определите наибольшую высоту центра звезды, достигаемую в течение местного года на этой широте.
- в) Определите расстояние от пункта наблюдения до северного тропика.

Возможное решение:

а) В полдень звезда находится в верхней кульминации. Касание горизонта нижним краем означает, что центр звезды находится на высоте, равной видимому угловому радиусу звезды. Определим угловой радиус звезды, пользуясь приближением малых углов, то есть разделив линейный радиус звезды на расстояние до неё и получив значение угла в радианах:

$$\rho = \frac{R}{a} = \frac{2.3 \times 696\,000 \text{ км}}{1.2 \times 1.496 \cdot 10^8 \text{ км}} = 0.0089 \text{ рад} = 0.5^\circ.$$

Аналогичный результат можно получить, оценив угловой радиус звезды как $2.3/1.2 \approx 1.9$ угловых радиусов Солнца при наблюдении с Земли (звезда в 2.3 раза больше Солнца, но дальше от своей планеты в 1.2 раза). Известно, что угловой радиус Солнца на небе Земли составляет $16'$. Значит, угловой радиус звезды составляет $16' \times 1.9 \approx 30' = 0.5^\circ$.

Следовательно, в момент верхней кульминации высота центра звезды составляла $h_{\text{БК}} = \rho = 0.5^\circ$.

Для определения широты места наблюдения требуется оценить склонение звезды. День зимнего солнцестояния соответствует наибольшему удалению звезды от плоскости экватора планеты, при этом склонение минимально и по модулю равно углу между экватором и плоскостью орбиты (местной эклиптики): $\delta_{\text{min}} = -\varepsilon = -25^\circ$.

Запишем формулу для высоты светила в верхней кульминации, подставим имеющиеся числа:

$$h_{\text{БК}} = 90^\circ - |\varphi_1 - \delta_{\text{min}}| \quad \Rightarrow \quad 89.5^\circ = |\varphi_1 + 25^\circ|.$$

Широта φ_1 находится в пределах от -90° до $+90^\circ$, следовательно, уравнение имеет единственное решение: $\varphi_1 = 89.5^\circ - 25^\circ = 64.5^\circ$.

б) Величина широты превышает широту северного тропика (ровно 25° , см. решение пункта «в»), следовательно, в зените центр звезды наблюдаться не может, то есть верхняя кульминация всегда происходит к югу от зенита, а её высота будет тем больше, чем больше склонение звезды.

Наибольшего склонения звезда достигает в день летнего солнцестояния, когда склонение составляет $\delta_{\max} = +25^\circ$. Наибольшая достигаемая высота верхней кульминации окажется равной

$$h_{\text{вк},\max} = 90^\circ - |\varphi - \delta_{\max}| = 90^\circ - |64.5^\circ - 25^\circ| = 50.5^\circ.$$

Северный тропик является северной границей области, на которой местное солнце (точнее, центр его диска) может проходить через зенит. Если объект кульминирует в зените, высота верхней кульминации составляет ровно 90° , тогда из формулы для высоты верхней кульминации получаем

$$90^\circ = 90^\circ - |\varphi - \delta| \implies \varphi = \delta.$$

Поскольку наибольшее склонение составляет $\delta = +\varepsilon = +25^\circ$, широта северного тропика также равна $+25^\circ$.

Задача допускает и графическое решение. Соответствующие чертежи приведены на рис. 3 и 4.

в) Требуется определить расстояние от пункта на широте 64.5° до параллели 25° . Заметим, что в качестве ответа допустимо предъявить длину дуги меридиана, заключенной между указанными широтами. Линейное расстояние вдоль дуги пропорционально угловой мере этой дуги, то есть разности широт.

Длина меридиана равна половине длины окружности, то есть πR , при соответствующей угловой мере 180° . Составим пропорцию:

$$\frac{64.5^\circ - 25^\circ}{180^\circ} = \frac{x}{\pi R} \implies x = \pi(1.5 \times 6.37 \cdot 10^3 \text{ км}) \times \frac{39.5^\circ}{180^\circ} \approx 6.6 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

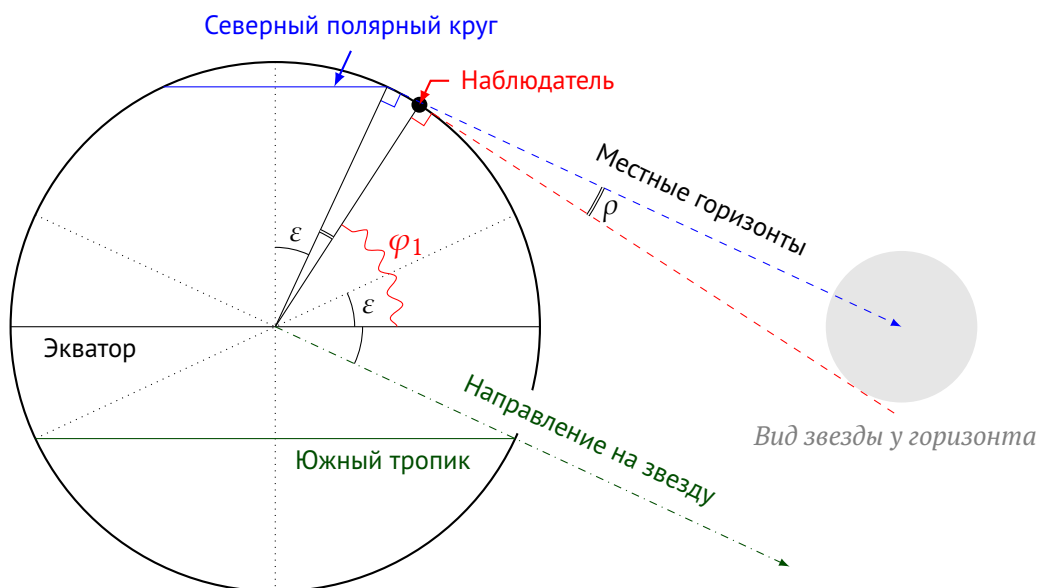


Рис. 3: Геометрия задачи: день зимнего солнцестояния

В верхней кульминации центр диска звезды лежит на горизонте для наблюдателя на северном полярном круге. Для наблюдателя (широта φ_1) в тот же момент диск звезды касается горизонта. На чертеже отмечено не реальное положение звезды, а её наблюдаемый вид относительно «местных горизонтов» для северной приполярной области (сама звезда в масштабе чертежа «бесконечно далеко»).

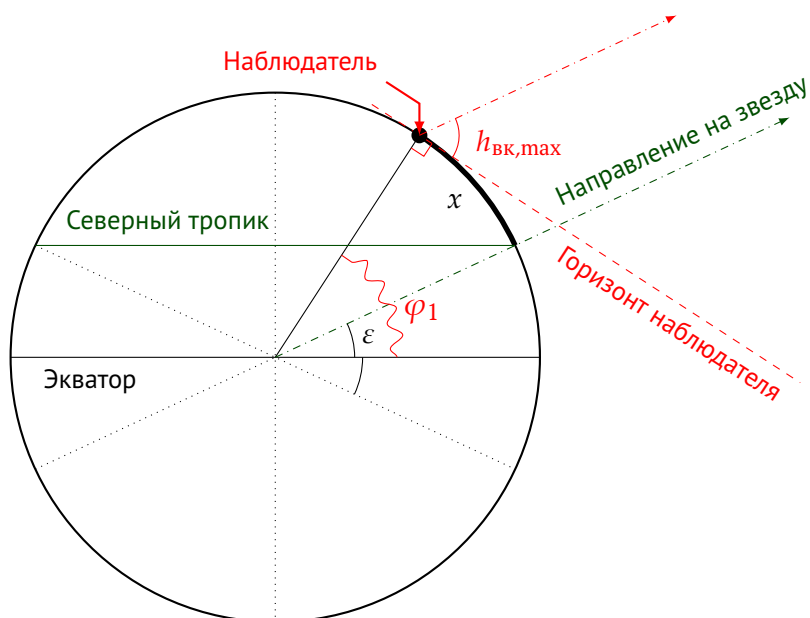


Рис. 4: Геометрия задачи: день летнего солнцестояния

В верхней кульминации звезда на северном тропике наблюдается в зените.

Критерии оценивания:

а1	Указание на положение звезды в верхней кульминации в полдень	1
а2	Указание на равенство высоты центра звезды над горизонтом угловому радиусу звезды	1
а3	Вычисление углового радиуса звезды	1
а4	Определение склонения звезды в день зимнего солнцестояния	1
а5	Запись формулы и вычисление широты наблюдения	1
б1	Обоснование условий наблюдения максимальной высоты звезды над горизонтом (верхняя кульминация, склонение $+25^\circ$)	1
б2	Вычисление максимальной высоты	1
в1	Обоснованное определение широты северного тропика	1
в2	Вычисление длины дуги (в угловой мере) вдоль меридиана	1
в3	Получение верного ответа	1
Всего		10

Замечание. В случае записи верной формулы наличие арифметической ошибки снижало оценку на 0.5 балла.

7.5 Да-да, созвездие Кота

В далёком будущем исследователи космоса проводят наблюдения звёздного неба на землеподобной планете. Звезда γ Мыши имеет в момент наблюдения координаты ($\alpha = 1^{\text{h}} 10^{\text{m}} 0.00^{\text{s}}$, $\delta = +1^{\circ} 10' 00.00''$), при этом каждый год её прямое восхождение изменяется на $\mu_{\alpha} = 10.00''$, а склонение — на $\mu_{\delta} = -10.00''$. Звезда β Ленивого Котика имеет координаты ($\alpha = 1^{\text{h}} 10^{\text{m}} 0.00^{\text{s}}$, $\delta = +1^{\circ} 0' 0.00''$) и неподвижна на небе. Считая системы небесных координат на планете аналогичными земным, определите:

- а) Какое угловое расстояние разделяет звёзды на момент наблюдения?
- б) Какое угловое расстояние будет разделять их через 100 лет?
- в) На каком минимальном расстоянии γ Мыши пройдет от β Ленивого Котика?

Для решения задачи можно использовать заготовку чертежа (рис. 5).



Рис. 5: Заготовка чертежа

Возможное решение:

а) В настоящее время различие прямых восхождений звезд нулевое ($\Delta\alpha = 0$), а различие склонений равно

$$\Delta\delta = 1^\circ 10' 12.00'' - 1^\circ 0' 0.00'' = 10' 00.00'' = 10.00'.$$

Угловое расстояние между звездами можно вычислить по теореме Пифагора, поскольку склонение невелико, расстояния невелики и область неба можно считать плоской:

$$l = \sqrt{(\Delta\alpha)^2 + (\Delta\delta)^2} = |\Delta\delta| = 10.00'.$$

б) Определим, как изменятся координаты γ Мыши за 100 лет. Смещение по прямому восхождению составит

$$d_\alpha = 100\mu_\alpha = 100 \times 10.00'' = 1000''.$$

С учетом постоянства прямого восхождения β Ленивого Котика, разница прямых восхождений составит именно $\Delta\alpha = 1000''$.

Смещение по склонению составит

$$d_\delta = 100\mu_\delta = 100 \times (-10.00'') = -1000''.$$

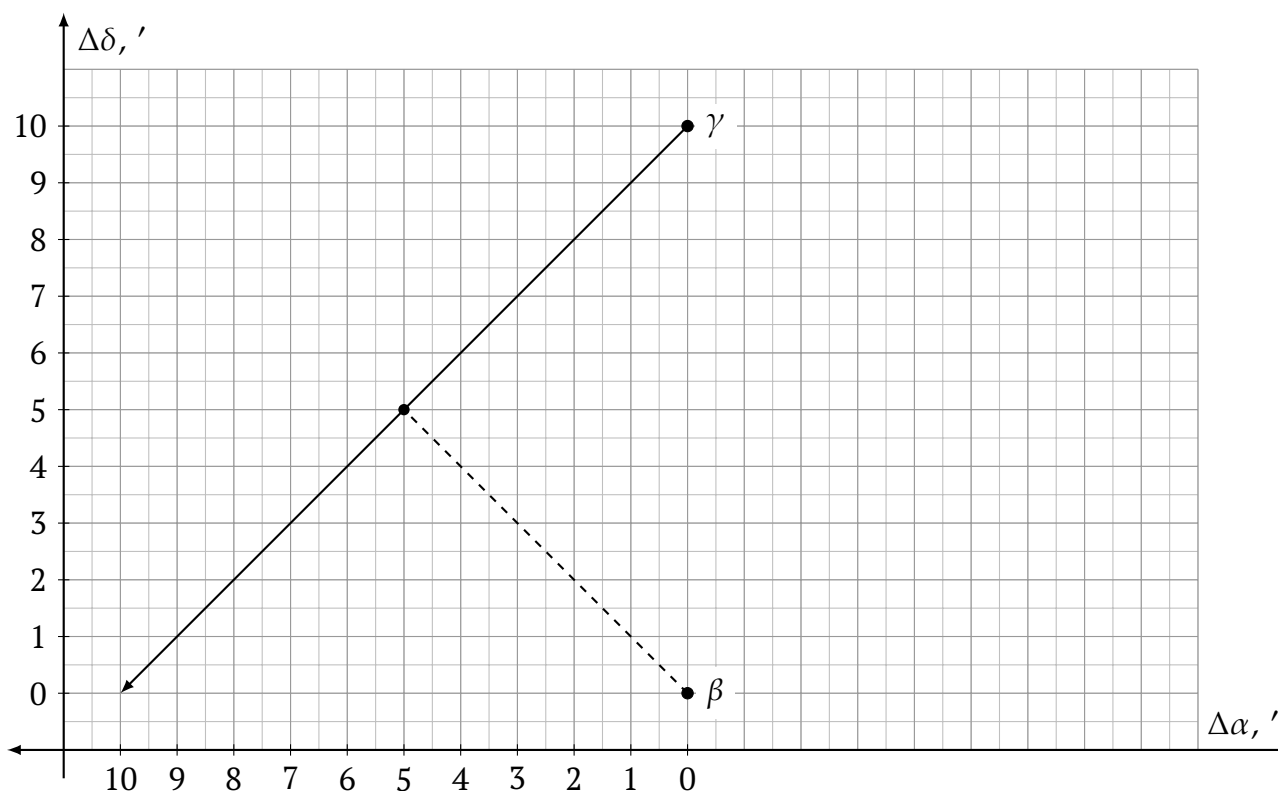
Склонение γ Мыши уменьшается, современное склонение при этом было больше, чем у β Ленивого Котика, следовательно, разность склонений уменьшится; новая разность будет равна

$$\Delta\delta' = 10.00' - 1000'' = 600'' - 1000'' = -400''.$$

Новое угловое расстояние составит при этом

$$l' = \sqrt{(1000'')^2 + (-400'')^2} \approx 1077'' \approx 18'.$$

в) Определить минимальное расстояние можно минимум двумя способами: можно написать зависимость разности координат от времени t , а дальше искать минимальное расстояние как наименьшее значение квадратичной функции (такой метод реализован в задаче 8.5, с. 40). А можно поступить проще и нарисовать траекторию движения γ Мыши относительно β Ленивого Котика, в версии задачи 7.5 это приводит к разумному результату.

Рис. 6: Траектория движения γ Мыши относительно β Ленивого Котика

Нарисуем на графике (см. рис. 6), как двигались звезды. Поскольку нас интересует относительное движение, выберем положение β Ленивого Котика произвольно. На миллиметровке выберем масштаб «1 клетка — 1 угловая минута»[§], отметим современные положения звёзд; γ Мыши окажется строго над β Ленивого Котика. Заметим, что координаты по прямому восхождению и склонению изменяются одинаково, прямое восхождение растёт, а склонение убывает. Это означает, что траектория движения проходит под углом 45° к координатным линиям. Нарисуем такую линию, а затем для поиска минимального расстояния опустим на нее перпендикуляр из точки β . Перпендикуляр попадает в точку с координатами (5; 5) в заданном масштабе. В таком случае расстояние от точки β окажется равным

$$l_{\min} = \sqrt{(5')^2 + (5')^2} \approx 7.1'.$$

Искомое расстояние возможно было измерить непосредственно по графику.

[§]На заготовке чертежа для такого выбора масштаба можно дописать соответствующий коэффициент к самой величине ($60 \times \Delta\delta$, °), к единицам измерения ($\Delta\delta$, °/60). Или просто зачеркнуть ненужную единицу и написать нужную ($\Delta\delta$, ') — заготовка же!

Критерии оценивания:

а1	Вычисление разности прямых восхождений либо указание на равенство прямых восхождений	1
а2	Вычисление разности склонений	1
а3	Вычисление расстояния либо указание на равенство расстояния и разности склонений	1
б1	Вычисление смещения γ Мыши по прямому восхождению	1
б2	Вычисление смещения γ Мыши по склонению	1
б3	Вычисление разности склонений звёзд	1
б4	Вычисление углового расстояния между звёздами	1
в1	Описание метода определения минимального расстояния между звёздами	2
в2	Получение верного численного ответа	1
Всего		10

7.6 Чашу огня в небо поднять

На фотографии (рис. 7) запечатлена знаменитая скульптура «Родина-мать зовёт!» (высота от подножия до кончика меча — 85 м) на фоне заката. Мамаев курган отмечен на карте (рис. 9) знаком ▲. Известно, что его географический азимут для точки съёмки оказался равен 246.5° .

- а) Определите азимут центра диска Солнца и знак его склонения (+ или –).
- б) Оцените расстояние от скульптуры до точки съёмки и отметьте точку съёмки на карте знаком ×.

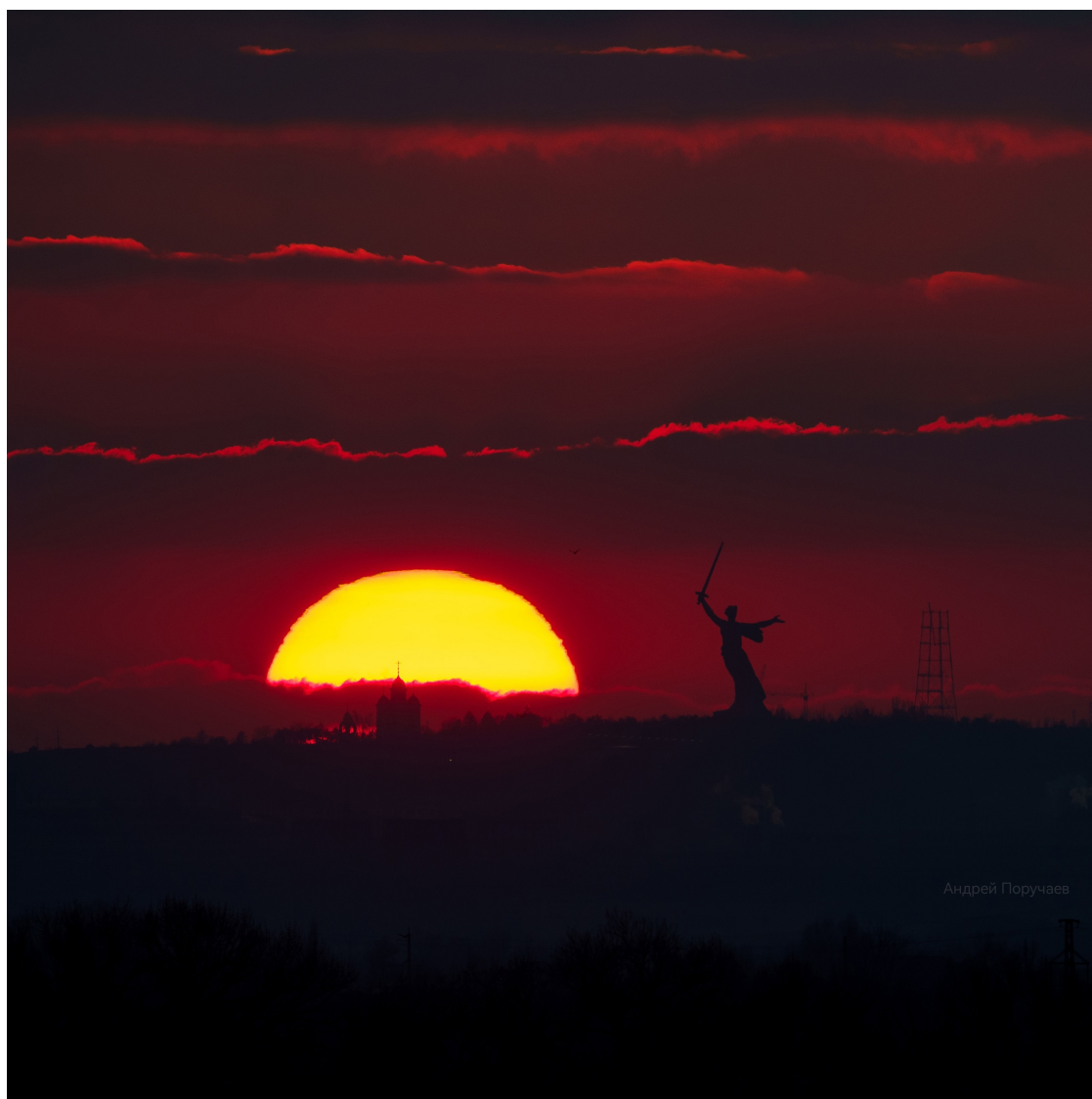


Рис. 7: «Родина-мать зовёт!» на фоне заката
Андрей Поручаев, vk.com/horizontsobityi. Оригинальное изображение



Рис. 8: «Родина-мать зовёт!» на фоне заката

Андрей Поручаев

Андрей Поручаев, vk.com/horizontsobityi. Фрагмент изображения адаптирован для печати

Рис. 9: Карта Волгограда (Сталинграда) с окрестностями

Возможное решение. Географический азимут отсчитывается от точки севера по часовой стрелке (на восток). Заметим, что географический азимут точки запада равен 270° . Видим, что азимут скульптуры (она стоит на вершине Мамаева кургана) меньше, а значит, относительно места съёмки скульптура находится на юго-западе. Солнце при этом находится левее скульптуры, то есть ещё южнее. Следовательно, Солнце находится в южном полушарии небесной сферы, а его склонение **отрицательно**.

Угловой масштаб изображения можно определить при помощи диска Солнца. Диаметр солнечного диска составляет около половины градуса, точнее – $32' \approx 0.53^\circ$. Измерим этот диаметр линейкой на фотографии. Проводить измерения необходимо параллельно линии горизонта: вертикальный масштаб искажается атмосферной рефракцией (преломлением лучей в атмосфере Земли), причём тем сильнее, чем ближе светило к горизонту, поэтому Солнце у горизонта выглядит немного приплюснутым. Кроме того, в рассматриваемом случае нижняя часть диска Солнца просто не видна из-за облаков и линии горизонта.

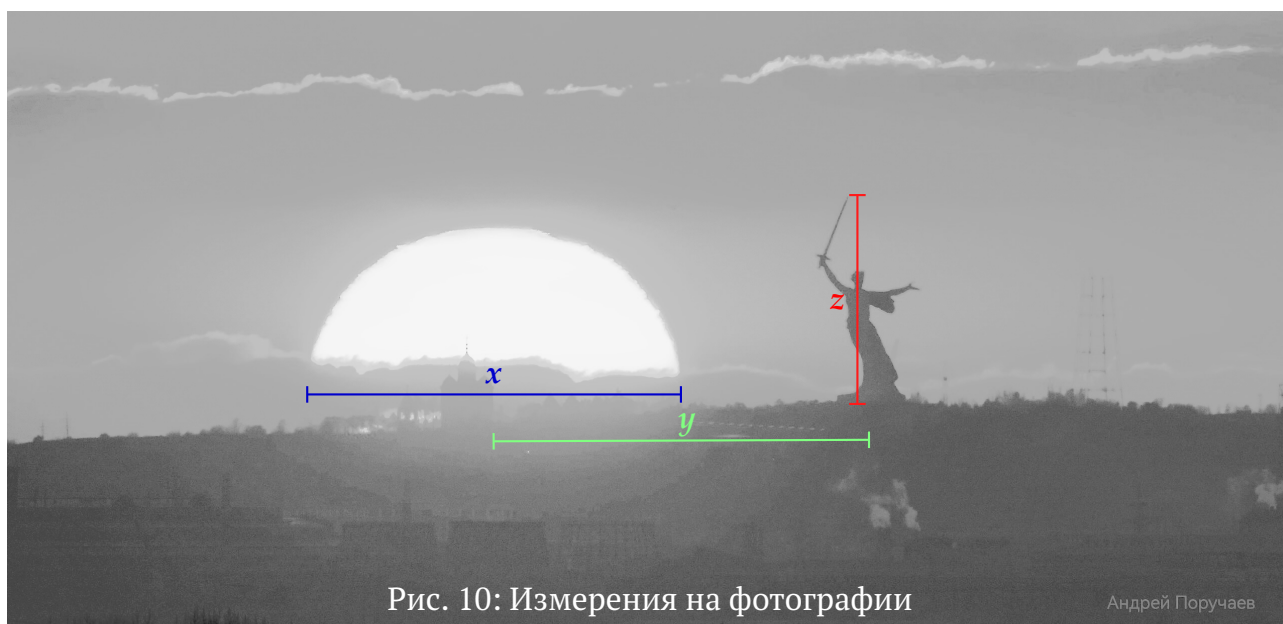


Рис. 10: Измерения на фотографии

Андрей Поручаев

Андрей Поручаев, vk.com/horizontsobityi. Фрагмент изображения адаптирован для печати

В результате измерений получаем: диаметр диска Солнца равен x мм, расстояние (по горизонтали) от центра диска Солнца до скульптуры — y мм, высота скульптуры — z мм. Конкретные значения x , y и z зависят от размеров изображения на печати и могут быть различными; масштаб печати не влияет на конечный ответ задачи.

Так как $x \approx y$, азимут центра диска Солнца равен

$$A_{\odot} = 246.5^\circ - 0.53^\circ \times \frac{y}{x} \approx 246.0^\circ.$$

Угловая высота скульптуры H составляет примерно $\frac{z}{x} \approx 0.56$ от углового диаметра Солнца. Тогда

$$H = 0.53^\circ \times \frac{z}{x} \approx 0.30^\circ.$$

Зная действительную (пространственную) и видимую (угловую) высоту скульптуры, можем найти расстояние r до неё:

$$\frac{H}{360^\circ} = \frac{85 \text{ м}}{2\pi r} \Rightarrow r = 85 \text{ м} \times \frac{360^\circ}{2\pi \cdot 0.30^\circ} \approx 1.6 \cdot 10^4 \text{ м} \approx \mathbf{16 \text{ км}}.$$

Ввиду значительной погрешности измерений результаты участников могли заметно отличаться от истинного. Допускается погрешность $\pm 1.5 \text{ км}$.

Теперь найдём эту точку на карте. Относительно Мамаева кургана точка съёмки имеет азимут $A_0 = 246.5^\circ - 180^\circ = 66.5^\circ$. Откладываем этот угол от направления на север и отмеряем расстояние в 16 км согласно указанному масштабу (рис. 11).

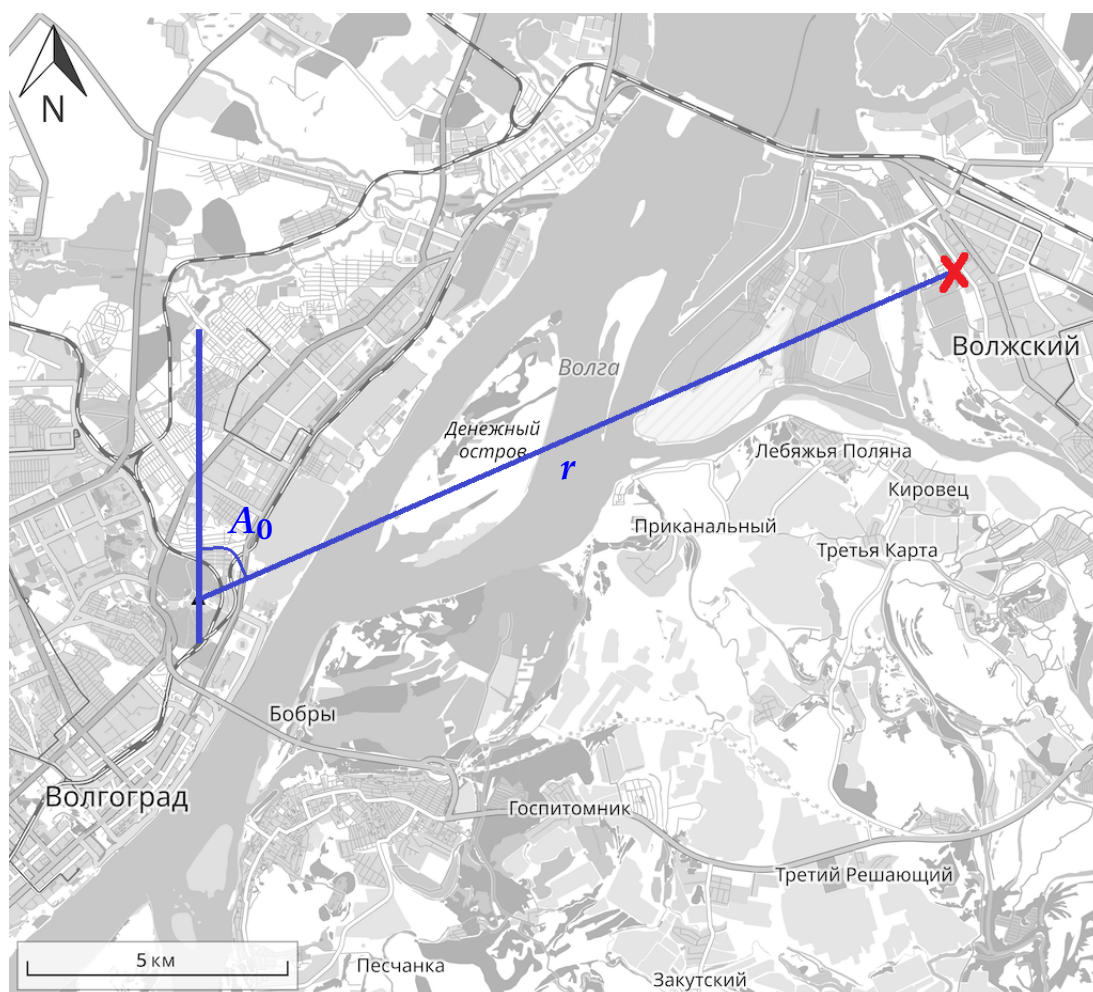


Рис. 11: Точка съёмки на карте

Критерии оценивания:

а1	Определение масштаба фото по угловому размеру Солнца	1
а2	Определение азимута Солнца	2
а3	Обоснованное получение отрицательного склонения	2
б1	Расчёт углового размера памятника	1
б2	Расчёт расстояния до памятника, ответ в пределах 14.5—17.5 км	2
б3	Отметка точки съёмки на карте <i>Верно только направление или только расстояние</i>	2 <i>1</i>
Всего		10

Примечание. Фотография была сделана 5 февраля 2025 года с пропилеев Центрального стадиона имени Ф. Г. Логинова, город Волжский.

8 класс

8.1 Один день решает судьбу империи

В биографии одного выдающегося исторического деятеля указано, что он родился 13 (24) ноября, а скончался 6 (18) мая. Известно, что он умер в последний год уходящего века на 70-м году жизни.

- а) Почему в условии задачи указаны двойные даты?
- б) Определите годы жизни этого человека.
- в) *Не оценивается*: попробуйте угадать, о ком идёт речь.

Возможное решение

Одна минута решает исход баталии;
один час – успех кампании;
один день – судьбу империи.

Александр Васильевич Суворов

Двойная датировка событий используется для ясности из-за существования двух систем летоисчисления: юлианского календаря (старый стиль) и григорианского календаря (новый стиль). Григорианский календарь был введён в 1582 году, однако фактический переход на новый стиль в разных странах произошёл в разное время; так, в России современный календарь стал использоваться только с 1918 года¹. Во избежание путаницы даты событий российской истории между 1582 и 1918 гг. указываются одновременно и по новому, и по старому стилю.

С 1 марта 1900 года по настоящее время разница между новым и старым стилем составляет 13 дней. Как видно из условия, во время жизни исторического деятеля эта разница была другой: в день его рождения она составляла $24 - 13 = 11$ дней, а в день смерти уже $18 - 6 = 12$ дней.

В юлианском и григорианском календарях добавочный день високосного года — 29 февраля, однако календари слегка различаются правилом определения високосного года. В юлианском календаре високосным является любой год, номер которого кратен 4. В григорианском календаре базовый принцип такой же, однако год, номер которого делится на 100, но не кратен 400, считается невисокосным.

¹Декрет Совета народных комиссаров о введении в Российской республике западноевропейского календаря от 26 января 1918 года.

Таким образом средняя продолжительность юлианского года составляет $365 + \frac{1}{4} = 365.25$ сут., в то время как средняя продолжительность григорианского года $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365.2425$ сут., что лучше приближает среднюю продолжительность тропического года (примерно 365.2422 сут.)

Например, 1700, 1800, 1900, 2100... гг. являются високосными по старому стилю, а по новому — нет (отметим, что 2000 год високосный в обоих календарях). Именно в такие годы расхождение между календарями увеличивается на 1 день (вместо 29 февраля в григорианском календаре наступает сразу 1 марта):

Период	Разница календарей, сут.
Октябрь 1582 – февраль 1700	10
Март 1700 – февраль 1800	11
Март 1800 – февраль 1900	12
Март 1900 – февраль 2100	13
Март 2100 – февраль 2200	14

Так как и рождение, и смерть деятеля произошли уже после февраля соответствующего года (в ноябре и в мае), получаем, что первые две цифры года рождения — это 17, а года смерти — 18.

Осталось определить последние две цифры. Так как исторический деятель умер «в последний год уходящего века», то, очевидно, это был **1800 год**. Отметим, что номер последнего года века всегда делится на 100, так как «нулевого» года не существовало (поэтому, вопреки распространённому заблуждению, XXI век и третье тысячелетие начались 1 января 2001 года, а не 2000-го).

Поскольку герой родился в ноябре, а умер в мае «на 70-м году жизни», 70 лет ему должно было исполниться в год смерти, то есть в ноябре 1800 года. Значит, он родился в $1800 - 70 = 1730$ году.

О ком же речь? Конечно, об Александре Васильевиче Суворове — одном из величайших полководцев в истории России^{**}, чья фраза из труда «Наука побеждать», посвящённого теории военного искусства, озаглавила эту задачу.

^{||}Юлианские даты до 5 (15) октября 1582 года (даты введения григорианского календаря) тоже можно пересчитать «по новому стилю», но так делать не принято. Календарь, используемый для обозначения дат, более ранних, чем дата введения самого календаря, называют *пролептическим*.

^{**}Интересно, что год рождения А. В. Суворова является предметом споров: некоторые историки полагают, что он родился не в 1730, а в 1729 году.

Критерии оценивания:

a1	Двойная датировка объяснена указанием дат по юлианскому и григорианскому календарю (старому и новому стилю) <i>Нет верных названий календарей или стилей</i>	3 –1
a2	Указана верная разница дней между новым и старым стилем	1
a3	Определена разница дат рождения и (или) смерти	1
a4	Объяснён механизм изменения разницы дат. Указан критерий високосности года с номером вида $\overline{AB00}$	1
б1	Получены первые две цифры годов рождения и смерти (определён век жизни)	1
б2	Показано, что последний год века оканчивается на 00, не на 99. Приведено рассуждение о связи месяцев рождения и смерти с возрастом и годом рождения	0.5 + 0.5
б3	Дан верный ответ (год жизни и год смерти)	2
Всего		10

Верный ответ на вопрос, о каком историческом деятеле идёт речь, не оценивается (о чём сразу предупредили в условии задачи), но методическая комиссия олимпиады искренне гордится участниками, которые помнят историю России!

8.2 Мальчик, который гулял сам по себе

Первое наблюдение. Любопытный первоклассник вышел погулять 23 сентября. Около полуночи мальчик наблюдал восход Марса и заход Юпитера и заметил, что угловое расстояние между планетами составило 180° . Наблюдение проходило в ясную ночь на параллели 55° с. ш.

Задания:

- Зарисуйте положения Марса и Юпитера относительно Солнца $\odot$ и Земли $\oplus$ в день наблюдения, подпишите планеты символами $\mars$ и $\jupiter$ соответственно.
- Могли ли восход Марса и заход Юпитера произойти одновременно? Если нет, то какое из этих событий наступило раньше?
- Зарисуйте положения Марса $\mars$, Юпитера $\jupiter$ и Солнца $\odot$ на небесной сфере в момент захода Юпитера.
- Определите разность высот верхних кульминаций Юпитера и Марса на данной широте в день наблюдения.

Указания. *Используйте для зарисовок заготовки (рис. 12).*

Орбиты планет считайте круговыми и лежащими в одной плоскости.

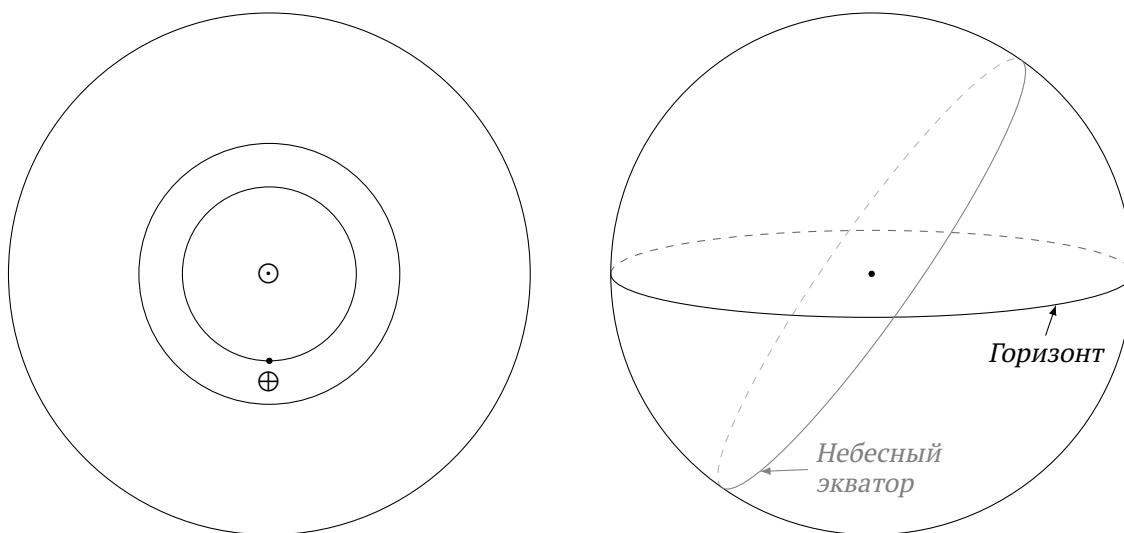


Рис. 12: Заготовки зарисовок:
положения планет в пространстве (слева) и на небесной сфере (справа)

Возможное решение. В полночь Солнце находится в нижней кульминации. Так как Марс (примерно) в этот момент восходит, а Юпитер — заходит, делаем вывод, что угол между направлением на Солнце и на каждую из планет близок к 90° , то есть планеты находятся вблизи квадратур. При этом Марс опережает Солнце в суточном движении, то есть находится к западу от него — вблизи западной квадратуры, а Юпитер, наоборот, расположен восточнее, вблизи восточной квадратуры. На рис. 13 слева представлен вид на Солнечную систему с севера (движение планет и вращение Земли вокруг своей оси происходит против часовой стрелки).

Солнце, Марс и Юпитер находятся на эклиптике — большом круге небесной сферы, который наклонён к плоскости небесного экватора на угол $\varepsilon = 23.5^\circ$. Большие круги всегда пересекаются в диаметрально противоположных точках, и, соответственно, делят друг друга пополам. Это значит, что точки эклиптики, находящиеся на горизонте, *всегда* разделены угловым расстоянием в 180° . Следовательно, восход Марса и заход Юпитера **должны произойти одновременно**.

Разберёмся, как это изобразить на небесной сфере. Так как описанные события происходят 23 сентября, то Солнце находится в точке осеннего равноденствия — одной из двух точек пересечения эклиптики с небесным экватором. Солнце *относительно звёзд* перемещается с запада на восток (противоположно суточному движению, которое происходит, как известно, с востока на запад). Тогда Марс, расположенный примерно в 90° к западу от Солнца, находится около точки летнего солнцестояния, а Юпитер, соответственно, вблизи точки зимнего солнцестояния.

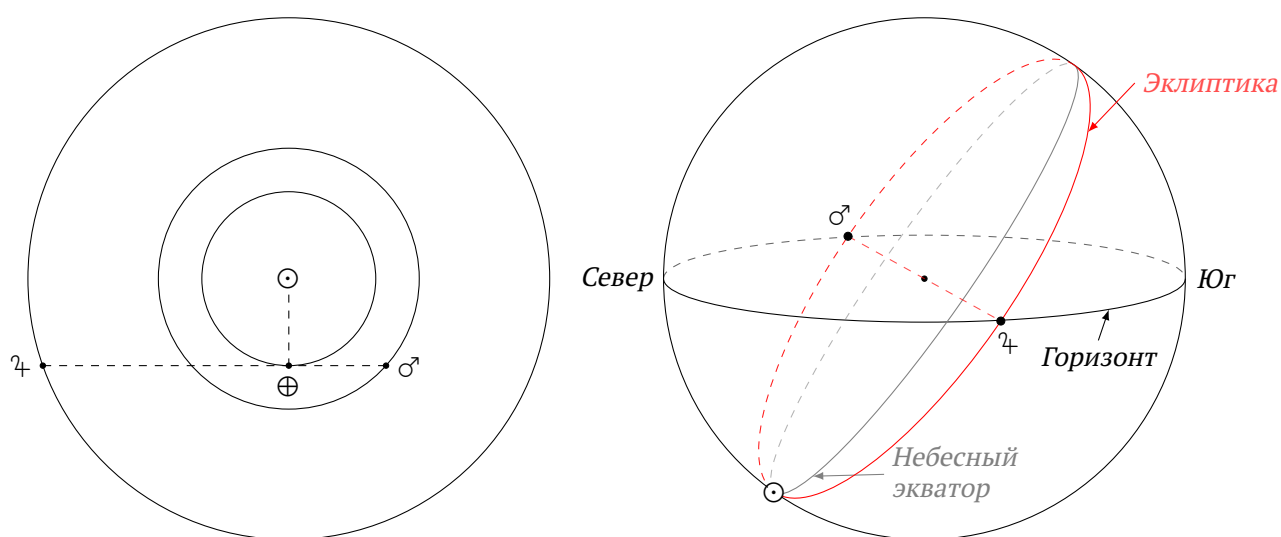


Рис. 13: Положения планет в пространстве (слева) и на небесной сфере (справа)

Отметим, что точно определить положения планет невозможно: если планеты находятся в точности в квадратурах (и, соответственно, в точках солнцестояний), то Солнце в момент пересечения планетами горизонта не находится в точности в нижней кульминации. Действительно, если точка осеннего равноденствия в нижней кульминации, то до соответствующих кульминаций точек солнцестояний осталось 6 часов. Но точка лета находится выше горизонта больше 12 часов в течение суток (в Северном полушарии), поэтому она уже должна была взойти. Напротив, точка зимы находится выше горизонта менее 12 часов в сутки, поэтому уже зашла. Если же предположить, что восход Марса и заход Юпитера произошли ровно в местную полночь, то это значит, что они не находятся в точности в квадратурах. Поэтому на рисунке (рис. 13, справа) возможна некоторая вариативность.

Отметим ключевые моменты, которые должны выполняться в любом случае:

- Солнце, Марс и Юпитер находятся на эклиптике;
- Солнце находится в точке осеннего равноденствия, на пересечении эклиптики и небесного экватора;
- Солнце находится в нижней кульминации или вблизи неё;
- Марс и Юпитер находятся на горизонте в диаметрально противоположных точках: Марс — на восточной стороне, Юпитер — на западной;
- Марс находится вблизи точки летнего солнцестояния (к северу от небесного экватора), Юпитер — вблизи точки зимнего солнцестояния (к югу от небесного экватора).

Для определения высот в верхней кульминации воспользуемся известной формулой:

$$h_{\text{БК}} = 90^\circ - |\varphi - \delta|.$$

На широте $\varphi = 55^\circ$ верхняя кульминация всех точек эклиптики происходит к югу от зенита, так как $\varphi > \varepsilon$. Тогда разность высот просто равна разности склонений: $\Delta h = \Delta \delta$. Так как Марс находится вблизи точки летнего солнцестояния, его склонение $\delta_{\text{♂}} \approx +\varepsilon$. Юпитер находится в противоположной точке эклиптики, $\delta_{\text{♃}} \approx -\varepsilon$. В результате имеем

$$\Delta h = \delta_{\text{♂}} - \delta_{\text{♃}} \approx \varepsilon - (-\varepsilon) = 2\varepsilon = 47^\circ.$$

Критерии оценивания:

а1	Приведён рисунок с угловым расстоянием между планетами 180°	1
а2	Верно указан тип квадратуры каждой планеты	1
а3	Указана невозможность одновременного нахождения планет на горизонте, если обе они наблюдаются в квадратурах	1
б1	Верный ответ на вопрос	1
б2	Верное обоснование указанного ответа	1
в	Верно отмечены планеты и Солнце	1 + 1 + 1
г1	Верно определены склонения планет	1
г2	Верно вычислена разность высот	1
Всего		10

8.3 Марс и Юпитер, или N лет спустя

Эта задача является продолжением предыдущей.

Второе наблюдение. Спустя некоторое время (может, месяцы, а может, годы) всё ещё юный астроном смог повторить наблюдение в то же время суток и при той же конфигурации планет. Известно, что в то время мальчик ещё учился в школе.

- а) Какое минимальное время прошло между двумя описанными наблюдениями?
- б) Оцените, в каком месяце могло состояться самое раннее второе наблюдение.

Орбиты планет считайте круговыми и лежащими в одной плоскости.

Возможное решение. В данной задаче требуется найти время, которое прошло между наблюдениями двух одинаковых конфигураций Земли, Юпитера и Марса. Очевидно, что абсолютно точное повторение такой конфигурации произойдет через *очень большой* промежуток времени, а повторение ситуации в обозримом будущем допускается с некоторой погрешностью.

Для начала найдём синодические периоды S для Марса и Юпитера, используя известные значения периодов обращения Земли $T_{\oplus}$ и каждой из планет вокруг Солнца:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{TT_{\oplus}}{T - T_{\oplus}}.$$

Получаем

$$S_{\odot} = \frac{365.26 \times 686.98}{686.98 - 365.26} \text{ (сут.)} \approx 779.95 \text{ сут.}$$

$$S_{\text{J}} = \frac{1 \times 11.862}{11.862 - 1} \text{ (лет)} \approx 1.0921 \text{ лет} = 398.88 \text{ сут.}$$

Заметим, что синодический период Марса примерно в 2 раза больше синодического периода Юпитера. Рассмотрим моменты времени, когда Марс будет оказываться в той же конфигурации с Землей. Спустя синодический период пройдет 779.95 дней или 1.96 синодических периодов Юпитера. Во второй раз пройдет 1559.9 дней или 3.91 синодических периода Юпитера, и т. д.

В общем виде получаем, что на n синодических периодов Марса приходится k синодических периодов Юпитера, где

$$k = \frac{779.95n}{398.88} = 1.955n.$$

Необходимо подобрать n и k так, чтобы они были наиболее близки к целым числам. Поскольку за время обучения мальчика в школе пройдёт не более 5 синодических периодов Марса, найдём ответ простым перебором:

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 1.955;$$

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad k = 3.910;$$

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad k = 5.865;$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad k = 7.820;$$

$$n = 5 \quad \Rightarrow \quad k = 9.775.$$

Видим, что наиболее подходящим является вариант $n \approx 1$; $k \approx 2$. Соответствующее время примерно равно **2 годам и 2 месяцам** (49–50 дней для повторения конфигурации Марса, 67–68 дней — для Юпитера).

Первое наблюдение состоялось 23 сентября. Значит, следующее наблюдение подобной конфигурации планет будет возможно во второй половине **ноября** два года спустя.

Критерии оценивания:

а1	Определение синодического периода Марса: формула + верное числовое значение	1 + 1
а2	Определение синодического периода Юпитера: формула + верное числовое значение	1 + 1
а3	Указание кратности периодов, оценка минимального времени	1
б1	Обоснованное вычисление интервала времени	2
б2	Обоснованный расчёт даты	1
б3	Верное определение месяца (ноябрь) <i>Указан октябрь или декабрь</i>	2 <i>1</i>
Всего		10

8.4 Ой, не преувеличивай

На сколько изменится расстояние, которое Земля пролетает за 365 суток по своей орбите вокруг Солнца, если радиус орбиты увеличится на метр?

Возможное решение. Заметим «ловушку»: в условии задачи речь идёт не об одном обороте Земли вокруг Солнца, а о *фиксированном* отрезке времени. Это значит, что искомое расстояние зависит только от орбитальной скорости Земли.

Т!;dr. Типичное неправильное решение, в котором найдена разность длин орбит с радиусами, отличающимися на 1 м, с ответом $+2\pi\Delta r \approx 6.3$ м, оценивалось в 4 балла.

Выясним, как радиус орбиты влияет на скорость (будем считать орбиту круговой). С одной стороны, скорость равна длине окружности, делённой на период обращения вокруг Солнца:

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

С другой стороны, из третьего закона Кеплера следует, что период обращения планеты также зависит от радиуса орбиты:

$$T^2 = kr^3,$$

где k — некоторый коэффициент пропорциональности, конкретное выражение для которого, как увидим далее, не пригодится. Получаем, что

$$v = \frac{2\pi r}{\sqrt{kr^3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

При увеличении радиуса орбиты скорость *уменьшится*, а значит, расстояние d , пройденное за определённое время, также будет **меньше**. Выясним, на сколько:

$$\Delta d = d_0 - d = v_0 t - vt = v_0 t - (v_0 - \Delta v)t = \Delta v t.$$

Здесь и далее индекс «0» относится к начальным параметрам орбиты Земли.

Найдём разность скоростей:

$$\begin{aligned} \Delta v = v_0 - v &= \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{r_0}} - \frac{1}{\sqrt{r}} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{r_0}} - \frac{1}{\sqrt{r_0 + \Delta r}} \right) = \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{k r_0}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta r/r_0}} \right) = v_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta r/r_0}} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя $\frac{\Delta r}{r_0} = \frac{1 \text{ м}}{1 \text{ а. е.}} \approx 6.68 \cdot 10^{-12}$ и учитывая, что $v_0 t \approx 2\pi r_0 = 2\pi \text{ а. е.}$, получаем

$$\Delta d = v_0 t \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta r/r_0}}\right) \approx 2.10 \cdot 10^{-11} \text{ а. е.} \approx \mathbf{3.14 \text{ м.}}$$

Критерии оценивания:

1	Указано, что орбита является (примерно) круговой (явно или через формулу длины окружности)	1
2	Упомянута зависимость скорости от радиуса орбиты	1
3	Обоснованно упомянут третий закон Кеплера	1
4	Записана верная формула для орбитальной скорости или равнозначная ей	1
5	Учтено изменение скорости при увеличении радиуса орбиты	2
6	Получено верное выражение для изменения расстояния Δd <i>Записано выражение $2\pi\Delta r$ при использовании модели без учёта изменения скорости</i>	2 <i>1</i>
7	Приведён численный ответ исходя из полученного выражения для изменения расстояния <i>Знак изменения расстояния неверен</i>	2 <i>1</i>
Всего		10

Примечание. Выражение (3) можно преобразовать к более изящному виду. Известно, что для малых x ($x \ll 1$) верна формула приближённых вычислений:

$$(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x.$$

Полагая $x = \Delta r/r_0$ и $\alpha = -1/2$, получаем:

$$\Delta v = v_0 \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta r/r_0}}\right) = v_0 \times \left(1 - (1 + \Delta r/r_0)^{-\frac{1}{2}}\right) \approx v_0 \cdot \frac{\Delta r}{2r_0},$$

$$\Delta d = v_0 t \cdot \frac{\Delta r}{2r_0} \approx 2\pi r_0 \cdot \frac{\Delta r}{2r_0} = \pi \Delta r = 3.14 \text{ м.}$$

С коэффициентом k участники уже встретились в этом году, решая задачу №6 регионального этапа олимпиады. Сорвём маски: $k = \frac{4\pi^2}{G\mathcal{M}_\odot}$, где G — гравитационная постоянная, $\mathcal{M}_\odot$ — масса Солнца. В таком случае скорость планеты, обращающейся вокруг Солнца по круговой орбите с радиусом r , равна $v = \frac{2\pi}{\sqrt{kr}} = \sqrt{\frac{G\mathcal{M}_\odot}{r}}$ — это известная формула для круговой скорости орбитального движения, которую также можно было использовать для решения данной задачи (без вывода).

8.5 Живите сегодняшним днём!

Звезда Барнарда — одна из самых быстрых на земном небосводе — имеет в настоящий момент экваториальные координаты ($\alpha = 17^{\text{h}} 59^{\text{m}} 2.10^{\text{s}}$, $\delta = +4^{\circ} 45' 42.8''$). Каждый год прямое восхождение звезды изменяется на $\mu_{\alpha} = -0.8''$, а склонение — на $\mu_{\delta} = 10.4''$. Яркая звезда созвездия Змееносца, Кебалрай (β Oph) находится неподалеку от звезды Барнарда, имеет координаты ($\alpha = 17^{\text{h}} 44^{\text{m}} 43.26^{\text{s}}$, $\delta = +4^{\circ} 33' 21.5''$) и сравнительно неподвижна на небе.

- а) Какое угловое расстояние разделяет звезду Барнарда и β Oph в настоящее время?
- б) Определите угловое расстояние между этими звёздами через 1000 лет.
- в) На какое минимальное расстояние сблизятся эти звёзды и когда это произойдет?

Для решения задачи можно использовать заготовку чертежа (рис. 14).



Рис. 14: Заготовка чертежа

Возможное решение:

а) В настоящее время различие прямых восхождений звезд составляет

$$\Delta\alpha = 17^{\text{h}} 59^{\text{m}} 2.10^{\text{s}} - 17^{\text{h}} 44^{\text{m}} 43.26^{\text{s}} = 14^{\text{m}} 18.84^{\text{s}} = 14.31^{\text{m}}.$$

Различие склонений равно

$$\Delta\delta = 4^{\circ} 45' 42.8'' - 4^{\circ} 33' 21.5'' = 12' 21.3'' = 12.36'.$$

Угловое расстояние между звездами можно вычислить по теореме Пифагора, поскольку склонение невелико, расстояния невелики и область неба можно считать плоской:

$$l = \sqrt{(\Delta\alpha)^2 + (\Delta\delta)^2}.$$

При этом нужно не забыть перевести единицы измерения к одинаковым, например, к угловым минутам. Вспомним, что

$$360^{\circ} = 24^{\text{h}}, \quad 15^{\circ} = 1^{\text{h}}, \quad 15' = 1^{\text{m}}, \quad 15'' = 1^{\text{s}},$$

откуда $\Delta\alpha = 14.31 \times 15' = 214.7'$. Тогда современное угловое расстояние между звёздами есть

$$l = \sqrt{(214.7')^2 + (12.4')^2} \approx 215' = 3.6^{\circ}.$$

Основное различие в координатах обусловлено именно разницей прямых восхождений, поэтому и расстояние между звездами практически совпадает с $\Delta\alpha$.

б) Определим, как изменятся координаты звезды Барнарда за 1000 лет. Смещение по прямому восхождению составит

$$d_{\alpha} = 1000\mu_{\alpha} = 1000 \times (-0.8'') = -800'' \approx -13.3'.$$

Прямое восхождение звезды Барнарда уменьшается, современное прямое восхождение было больше, чем у Кебалрай, следовательно, уменьшается и разность прямых восхождений с Кебалрай. Новая разность составит $\Delta\alpha' = 214.7' - 13.3' = 201.4'$.

Склонение изменится на величину

$$d_{\delta} = 1000 \times \mu_{\delta} = 1000 \times 10.4'' = 10400'' = 173.3'.$$

Склонение звезды Барнарда увеличивается, современное склонение при этом и так было больше, чем у Кебалрай, следовательно, увеличится и разность склонений.

Новая разность составит $\Delta\delta' = 12.4' + 173.3' = 185.7'$. Новое угловое расстояние при этом окажется равным

$$l = \sqrt{(201.4')^2 + (185.7')^2} \approx 274' = 4.6^\circ.$$

в) Пусть с текущего момента прошло время t тысяч лет — такая единица измерения времени позволит работать с близкими по порядку величины коэффициентами. Прямое восхождение звезды Барнарда изменится на $\mu_\alpha \cdot t = -800'' \cdot t = -13.3' \cdot t$, склонение изменится на $\mu_\delta \cdot t = 10400'' \cdot t = 173.3' \cdot t$. Тогда разности прямых восхождений и склонений двух звезд составят

$$\Delta\alpha = |214.7' - 13.3' \cdot t|, \quad \Delta\delta = 12.4' + 173.3' \cdot t.$$

Заметим, что минимальное расстояние соответствует минимальному квадрату расстояния. С учетом указанных выше разностей координат квадрат расстояния между звездами зависит от времени как

$$l^2(t) = (214.7' - 13.3' \cdot t)^2 + (12.4' + 173.3' \cdot t)^2.$$

В правой части после раскрытия скобок получится квадратичная функция, то есть требуется найти наименьшее значение на параболе. Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$$l^2(t) = 30210t^2 - 1413t + 46250.$$

Старший коэффициент положителен, ветви параболы направлены вверх, а наименьшее значение достигается в вершине:

$$t_0 = -\frac{-1413}{2 \cdot 30210} = 0.023.$$

Следовательно, минимальное расстояние достигается примерно **через 23 года!**

Определим квадрат расстояния в квадратных угловых минутах, а также само расстояние:

$$l(t_0)^2 = 30210 \cdot (0.023)^2 - 1413 \cdot 0.023 + 46250 = 46233,$$

$$l(t_0) = \sqrt{l(t_0)^2} = 215' = 3.6^\circ.$$

Неудивительно, что с точностью наших расчётов минимальное расстояние совпало с современным.

Критерии оценивания:

а	Обоснованное получение расстояния между звёздами в настоящее время	3
	<i>Единицы измерения не приведены к одной</i>	-2
	<i>Расстояние определено не по теореме Пифагора: разность координат, сумма модулей отклонений, и т. д.</i>	-2
	<i>Арифметическая ошибка</i>	-1
б	Обоснованное получение верного расстояния через 1000 лет	3
	<i>Единицы измерения не приведены к одной</i>	-2
	<i>Расстояние определено не по теореме Пифагора: разность координат, сумма модулей отклонений, и т. д.</i>	-2
	<i>Арифметическая ошибка</i>	-1
в-1.1	Запись выражения для расстояния или его квадрата в зависимости от времени	2
в-1.2	Определение момента времени исходя из уравнения	1
в-1.3	Определение минимального расстояния исходя из уравнения	1
в-2.1	Нарисованы верные траектории движения звёзд либо верная относительная траектория звёзд	2
	<i>Неверное направление отсчёта прямого восхождения</i>	-1
в-2.2	Определение минимального расстояния	1
в-2.3	Определение времени достижения минимального расстояния в пределах ± 100 лет	1
Всего		10

Замечание. Определение расстояния при помощи рисунка в данной задаче (в отличие от задачи 7.5) затруднено: звезда Барнарда находится на минимальном расстоянии практически сейчас, отличить текущее расстояние между звездами от минимального сложно, отрезки буквально совпадают. При этом погрешности в изображении траектории звезды Барнарда существенно снижают точность полученных результатов. Чертёж лишь позволяет получить «наводку» на примерное значение правильного ответа и понять, что минимальное расстояние достигается в окрестностях сегодняшнего дня.

Поскольку большинство участников всё же использовали графический метод решения, баллы выставались за описание метода (определение длины перпендикуляра, опущенного на траекторию звезды Барнарда), верное изображение траектории в указанных осях и масштабе и получение обоснованных ответов. При этом получение минимального расстояния, большего чем современное — **грубая ошибка**.

8.6 Чашу огня в небо поднять

На фотографии (рис. 15) запечатлена знаменитая скульптура «Родина-мать зовёт!» (высота от подножия до кончика меча — 85 м) на фоне заката. Мамаев курган отмечен на карте (рис. 17) знаком ▲. Известно, что его географический азимут для точки съёмки оказался равен 246.5° .

- Определите азимут центра диска Солнца и знак его склонения (+ или –).
- Оцените расстояние от скульптуры до точки съёмки и отметьте точку съёмки на карте знаком ×.



Рис. 15: «Родина-мать зовёт!» на фоне заката
Андрей Поручаев, vk.com/horizontsobityi. Оригинальное изображение

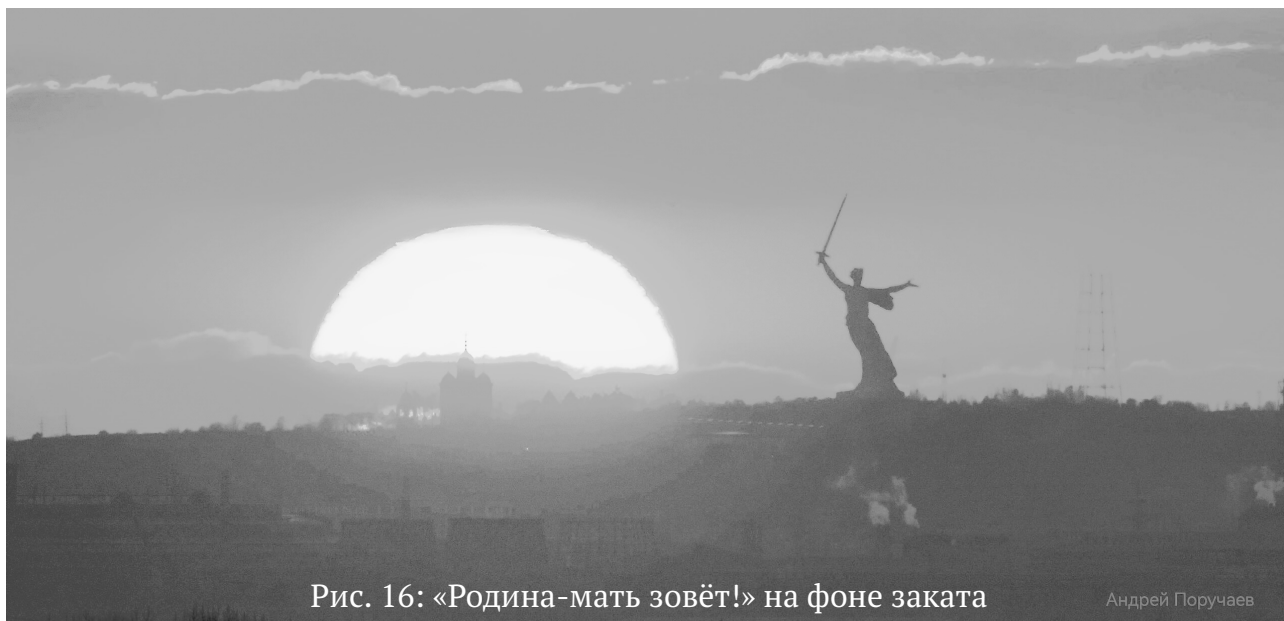


Рис. 16: «Родина-мать зовёт!» на фоне заката

Андрей Поручаев

Андрей Поручаев, vk.com/horizontsobityi. Фрагмент изображения адаптирован для печати



Рис. 17: Карта Волгограда (Сталинграда) с окрестностями

Возможное решение. Географический азимут отсчитывается от точки севера по часовой стрелке (на восток). Заметим, что географический азимут точки запада равен 270° . Видим, что азимут скульптуры (она стоит на вершине Мамаева кургана) меньше, а значит, относительно места съёмки скульптура находится на юго-западе. Солнце при этом находится левее скульптуры, то есть ещё южнее. Следовательно, Солнце находится в южном полушарии небесной сферы, а его склонение **отрицательно**.

Угловой масштаб изображения можно определить при помощи диска Солнца. Диаметр солнечного диска составляет около половины градуса, точнее – $32' \approx 0.53^\circ$. Измерим этот диаметр линейкой на фотографии. Проводить измерения необходимо параллельно линии горизонта: вертикальный масштаб искажается атмосферной рефракцией (преломлением лучей в атмосфере Земли), причём тем сильнее, чем ближе светило к горизонту, поэтому Солнце у горизонта выглядит немного приплюснутым. Кроме того, в рассматриваемом случае нижняя часть диска Солнца просто не видна из-за облаков и линии горизонта.

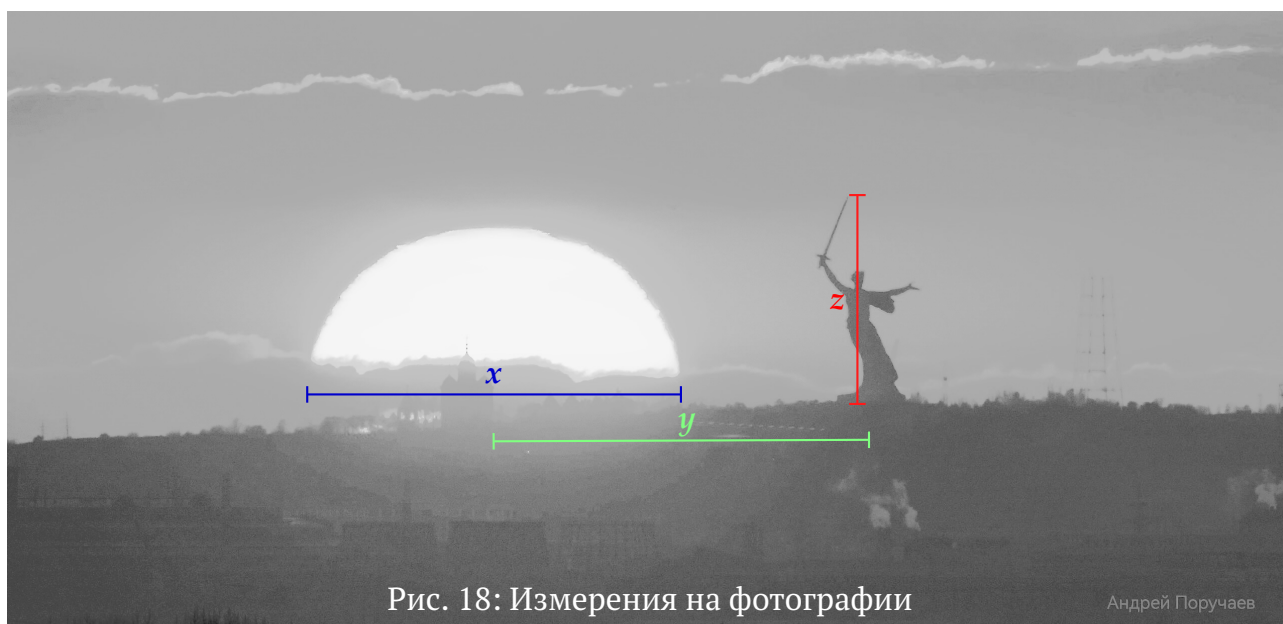


Рис. 18: Измерения на фотографии

Андрей Поручаев

Андрей Поручаев, vk.com/horizontsobityi. Фрагмент изображения адаптирован для печати

В результате измерений получаем: диаметр диска Солнца равен x мм, расстояние (по горизонтали) от центра диска Солнца до скульптуры — y мм, высота скульптуры — z мм. Конкретные значения x , y и z зависят от размеров изображения на печати и могут быть различными; масштаб печати не влияет на конечный ответ задачи.

Так как $x \approx y$, азимут центра диска Солнца равен

$$A_{\odot} = 246.5^\circ - 0.53^\circ \times \frac{y}{x} \approx 246.0^\circ.$$

Угловая высота скульптуры H составляет примерно $\frac{z}{x} \approx 0.56$ от углового диаметра Солнца. Тогда

$$H = 0.53^\circ \times \frac{z}{x} \approx 0.30^\circ.$$

Зная действительную (пространственную) и видимую (угловую) высоту скульптуры, можем найти расстояние r до неё:

$$\frac{H}{360^\circ} = \frac{85 \text{ м}}{2\pi r} \Rightarrow r = 85 \text{ м} \times \frac{360^\circ}{2\pi \cdot 0.30^\circ} \approx 1.6 \cdot 10^4 \text{ м} \approx \mathbf{16 \text{ км}}.$$

Ввиду значительной погрешности измерений результаты участников могли заметно отличаться от истинного. Допускается погрешность $\pm 1.5 \text{ км}$.

Теперь найдём эту точку на карте. Относительно Мамаева кургана точка съёмки имеет азимут $A_0 = 246.5^\circ - 180^\circ = 66.5^\circ$. Откладываем этот угол от направления на север и отмеряем расстояние в 16 км согласно указанному масштабу (рис. 19).

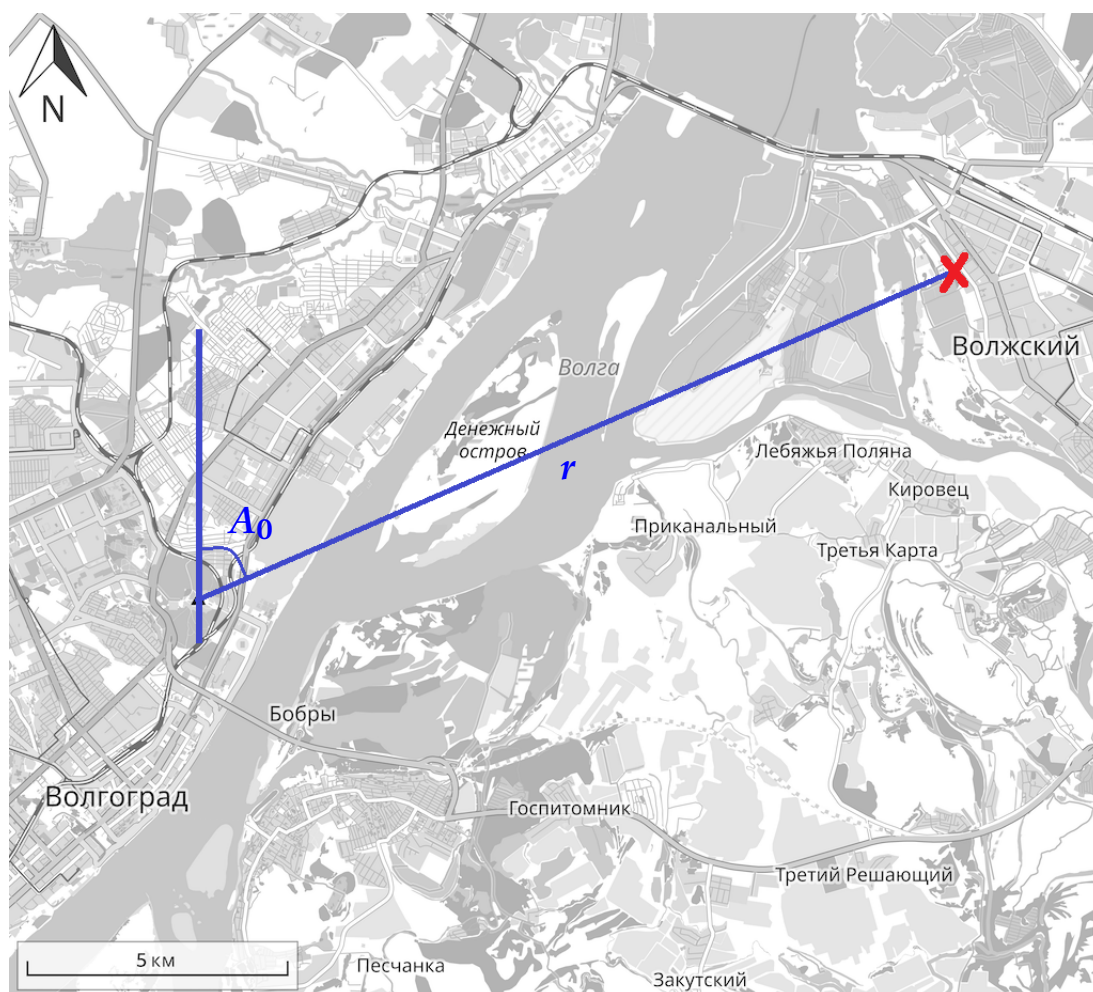


Рис. 19: Точка съёмки на карте

Критерии оценивания:

а1	Определение масштаба фото по угловому размеру Солнца	1
а2	Определение азимута Солнца	2
а3	Обоснованное получение отрицательного склонения	2
б1	Расчёт углового размера памятника	1
б2	Расчёт расстояния до памятника, ответ в пределах 14.5—17.5 км	2
б3	Отметка точки съёмки на карте <i>Верно только направление или только расстояние</i>	2 <i>1</i>
Всего		10

Примечание. Фотография была сделана 5 февраля 2025 года с пропилеев Центрального стадиона имени Ф. Г. Логинова, город Волжский.

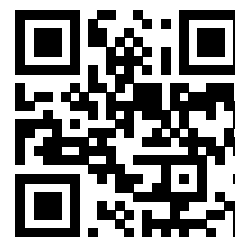
Часть II

Онлайн-тур

На онлайн-туре участники выполняли задания в системе тестирования. Комплект для каждого класса содержит 24 задания: вопросы на общие астрономические знания, упражнения для демонстрации практических навыков и простые вычислительные задачи. На выполнение заданий отводился 1 час 30 минут.

Для каждого задания оценивается только представленный участником ответ, оценка составляет 1–2 балла в зависимости от сложности задания и количества подвопросов. Максимальная оценка за тур — 40 баллов.

С полным содержанием комплекта в системе тестирования возможно ознакомиться на сайте олимпиады struve.astroedu.ru.



Справочные данные

Некоторые основные физические и астрономические постоянные

Гравитационная постоянная	$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
Скорость света в вакууме	$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Масса протона	$m_p = 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса электрона	$m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Астрономическая единица	$1 \text{ а. е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Парсек	$1 \text{ пк} = 206\,265 \text{ а. е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
Световой год	$1 \text{ св. год} = 365.25 \text{ сут.} \times c = 9.461 \cdot 10^{15} \text{ м}$

Данные о Солнце, Земле и Луне

Видимая звёздная величина Солнца	$m_{\odot} = -26.8^{\text{m}}$
Эффективная температура Солнца	$T_{\odot, \text{eff}} = 5.8 \cdot 10^3 \text{ К}$
Поток энергии на расстоянии Земли	$E_{\odot} = 1.4 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$
Тропический год	$= 365.24219 \text{ сут.}$
Сидерический (орбитальный) период	$= 365.25636 \text{ сут.}$
Средняя орбитальная скорость	$= 29.8 \text{ км/с}$
Звёздные сутки	$= 23 \text{ ч } 56 \text{ мин } 04 \text{ с}$
Наклон экватора к эклиптике	$\varepsilon = 23.44^{\circ}$
Сидерический месяц	$= 27.32 \text{ сут.}$
Синодический месяц	$= 29.53 \text{ сут.}$
Ускорение свободного падения на поверхности Земли	$g = 9.8 \text{ м/с}^2 = 9.8 \text{ Н/кг}$

Характеристики Солнца, планет Солнечной системы и Луны

	Радиус орбиты, а. е.	Орбитальный период	Масса, кг	Радиус, 10^3 км	Осевого период
☉ Солнце			$1.989 \cdot 10^{30}$	697	25.38 сут.
☿ Меркурий	0.3871	87.97 сут.	$3.302 \cdot 10^{23}$	2.44	58.65 сут.
♀ Венера	0.7233	224.70 сут.	$4.869 \cdot 10^{24}$	6.05	243.02 сут.
⊕ Земля	1.0000	<i>см. выше</i>	$5.974 \cdot 10^{24}$	6.37	23.93 ч
☾ ↪ Луна	0.0026	27.32 сут.	$7.348 \cdot 10^{22}$	1.74	<i>синхр.</i>
♂ Марс	1.5237	686.98 сут.	$6.419 \cdot 10^{23}$	3.40	24.62 ч
♃ Юпитер	5.2028	11.862 лет	$1.899 \cdot 10^{27}$	71.5	9.92 ч
♄ Сатурн	9.5388	29.458 лет	$5.685 \cdot 10^{26}$	60.3	10.66 ч
♅ Уран	19.1914	84.01 лет	$8.683 \cdot 10^{25}$	25.6	17.24 ч
♆ Нептун	30.0611	164.79 лет	$1.024 \cdot 10^{26}$	24.7	16.11 ч