

Решение задач творческого тура

Ярославль,
16-20 мая

8-9 классы

1. Обозначим расстояние кометы от Солнца в перигелии через $R_p = 1$ а.е. (большая полуось орбиты Земли), а в афелии – через $R_a = 1,5$ а.е. (большая полуось орбиты Марса). Тогда большая полуось орбиты кометы составит

$$a = \frac{1,0 + 1,5}{2} = 1,25 \text{ а.е.}$$

В соответствии с третьим законом Кеплера, ее орбитальный период

$$P = a^{3/2} = 1,4 \text{ года.}$$

Эксцентриситет орбиты кометы

$$e = \frac{R_a - R_p}{R_a + R_p} = 0,2.$$

Поскольку период кометы не находится в простой пропорции с периодами Марса и Земли, комета время от времени должна сближаться с этими планетами и подвергаться их гравитационному влиянию. Значит, ее орбита неустойчива. Найдем скорость сближения кометы с планетами. Для этого используем систему двух уравнений:

$V_p R_p = V_a R_a$ – закон сохранения момента импульса,

$V_p^2 - V_a^2 = 2GM(R_p^{-1} - R_a^{-1})$ – закон сохранения энергии, где V_a и V_p – скорость кометы, соответственно в афелии и перигелии; M – масса Солнца; а G – постоянная тяготения. Из этой системы путем простейших преобразований можно получить очень полезные формулы эллиптического движения:

$$V_p^2 = C_p^2(1 + e), \text{ где } C_p^2 = \frac{GM}{R_p};$$

$$V_a^2 = C_a^2(1 - e), \text{ где } C_a^2 = \frac{GM}{R_p}.$$

C_p и C_a – это скорости кругового движения, которые также называют «первыми космическими» или «кеплеровыми» скоростями, соответственно на расстоянии R_p и R_a от Солнца. В нашем случае $C_p = 30$ км/с (орбитальная скорость Земли) и $C_a = 24$ км/с (орбитальная скорость Марса). Следовательно, скорость кометы в перигелии и афелии: $V_p = 33$ км/с и $V_a = 21$ км/с.

Значит, в том случае, если комета движется вблизи плоскости эклиптики в сторону обращения планет, в перигелии она будет догонять Землю со скоростью $V_p - C_p = 3$ км/с, а в афелии ее будет догонять Марс с такой же скоростью $C_a - V_a = 3$ км/с. В остальных случаях, когда орбита кометы произвольно наклонена к эклиптике, ее скорость относительно планеты легко вычисляется по правилу параллелограмма.

Поскольку диапазон расстояний кометы от Солнца невелик ($1,0 \div 1,5$ а.е.), условия ее нагрева Солнцем остаются достаточно стабильными, поэтому условия видимости кометы в основном зависят от ее положения на относительно Земли. Комета будет близка к Земле в период ночной видимости, и далека от Земли в периоды утренней и вечерней видимости.

2. В принципе, можно. Пусть D и F – диаметр и фокусное расстояние положительной линзы. Она создает в фокальной плоскости действительное изображение, которое можно рассматривать глазом, без окуляра с расстояния наилучшего зрения ($s = 20 \div 25$ см). Очевидно, что угловое увеличение при этом будет F/s . Для увеличения в 50 раз нужна линза с $F \approx 12$ м. Поле зрения такого телескопа будет равно угловому диаметру линзы, деленному на увеличение телескопа, т.е. $(D/F)/(F/S)$ в радианах. В угловых минутах это составит

$$\alpha = 3438' Ds / F^2 .$$

По условию задачи, $\alpha = 10'$, поэтому необходима линза диаметром $D = 180$ см. Таких линз не существует. Если же ограничиться линзой диаметром 15-20 см, то поле зрения будет около $1'$. Это вполне достаточно, для изучения планет и других небольших ярких объектов, но управляться с таким телескопом будет очень нелегко.