III Российская олимпиада школьников
по астрономии и космической физике.

г. Калуга
11-15-мая 1996 г.

Решения задач теоретического тура

11 класс.

1. Ниже всего Солнце опускается в полночь, в Северном полушарии его "полуночная" высота находится по формуле

$$h = \varphi - 90° + \delta,$$

где δ — склонение Солнца. Если h имеет отрицательное значение,- это означает, что Солнце под горизонтом. Наибольшее склонение Солнце имеет 22 июня, $\delta = \varepsilon = 23°27'$. Граница территории, на которой хотя бы одну ночь в году не прекращаются навигационные сумерки, находится из этого уравнения при $h = -12°$ и $\delta = \varepsilon$:

$$\varphi = -12° + 90° - 23°27', \quad \varphi = 54°33'.$$

Заметим, что эта параллель проходит по северной части Калуги (для центра Калуги $\varphi = 54°31'$).

2. Из таблицы видим, что эксцентриситет орбиты кометы очень близок к единице, то есть орбита является практически параболической. Следовательно, скорость в перигелии в $2^{1/2}$ больше круговой с тем же радиусом. Из таблицы находим, что он равен *0,230 а.е.*, то есть $a_1/a_2 = 0,230$.

Обозначив эту величину через α, из третьего закона Кеплера, сравнивая с орбитой Земли:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_{Земли}^2}{a_{Земли}^3}$$

получаем

$$a_1 = \alpha \cdot a_{Земли} \quad \text{и} \quad T_1 = \alpha^{3/2} \cdot T_{Земли}.$$

$$V_I = \frac{2\pi a_1}{T_1} = \frac{2\pi\alpha a_З}{\alpha^{3/2} T_З} = \frac{2\pi a_З}{\alpha^{1/2} T_З}.$$

$$V_{II} = 2^{3/2}\frac{\pi a_З}{\alpha^{1/2} T_З}.$$

Численный ответ: $V_{II} = 87,8$ *км/с*.

3. Видимо, автор предполагал, что в результате эволюции Солнце станет остывать. Но *30* миллионов лет,- это очень мало даже для того, чтобы почувствовать какую-нибудь разницу в излучении Солнца по сравнению с нынешней. Это первая и главная ошибка.

Далее, в результате эволюции (конечно, гораздо позже, чем через *30* миллионов лет) Солнце должно превратиться в красный гигант с температурой *3-4* тысячи градусов. Конечно, удалённые звёзды с такой температурой кажутся нам красными; но если такое освещение (абсолютное чёрное тело с температурой $3\text{-}4 \cdot 10^3 K$) доминирует, то человеческий глаз будет воспринимать его почти белым (вспомните, что температура спиралей лампочек накаливания ещё меньше, а освещение в комнате кажется белым, чуть желтоватым).

Ну и давайте посчитаем, какая температура будет на земле, обращающейся вокруг красного гиганта. Десятая часть неба - это, по-видимому, *9* (или *18*) градусов, то есть диаметр Солнца увеличился в 18 (а может быть - и более) раз, а его площадь - по крайней мере, в 324 раза. Излучение с единицы площади пропорционально четвёртой степени температуры, следовательно, по сравнению с нынешним Солнцем оно уменьшится не более чем в *16* раз. То есть, даже по самым оптимистическим оценкам, падающее на Землю излучение увеличилось в *324/16 ≈ 20 раз*. При этом температура Земли поднимется более чем в два раза, то есть по шкале Цельсия превысит 300°. Ничего себе "ужасный холод"!

4. Поскольку лазер оптический, можно считать, что он работает в том же спектральном диапазоне, в котором наблюдается спутник. Следовательно, траектория лазерного луча повторит траекторию луча света, соединяющего спутник с наблюдателем. Поэтому нацеливать лазер надо на видимое направление на спутник

5. Рассмотрим по отдельности три возможных случая:
4.Лучевая скорость пульсара направлена от наблюдателя,
5.Лучевая скорость пульсара направлена к наблюдателю,
6.Лучевая скорость пульсара в момент наблюдения равна нулю.

В первом случае пульсар удаляется от Земли, и с ростом расстояния до наблюдателя угол между вектором его лучевой скорости и вектором полной скорости уменьшается. Следовательно, скорость удаления пульсара от наблюдателя медленно возрастает, поэтому частота импульсов, согласно эффекту Доплера, должна падать.

Во втором случае пульсар приближается к Земле, и с уменьшением расстояния до наблюдателя угол между вектором его лучевой скорости и вектором полной скорости возрастает. Следовательно, скорость приближения пульсара к наблюдателю медленно уменьшается, поэтому частота импульсов, согласно эффекту Доплера, должна падать.

В третьем случае пульсар начинает медленно удаляться от Земли, его лучевая скорость возрастает от нулевого значения. Поэтому чаете импульсов, согласно эффекту Доплера, должна падать.

Таким образом, во всех случаях должно наблюдаться медленное уменьшение частоты импульсов пульсара. Кстати, по своей ожидаемой величине оно вполне доступно измерениям для не очень далеких пульсаров и лишь медленное торможение вращения радиопульсаров, также приводящее, к уменьшению частоты импульсов, затрудняет наблюдательное обнаружение рассматриваемого здесь эффекта.

6. Пульсар и его спутник обращаются с периодом T вокруг общего центра масс, расположенного вблизи центра пульсара. Обозначим массу пульсара через M, массу спутника – через m. Принимаем, что $m \ll M$. Пусть V – скорость пульсара, V_c – скорость спутника, а R и R_c – радиусы их круговых орбит вокруг центра масс. Тогда, орбитальная скорость пульсара, определенная по эффекту Доплера, составит:

$$V = \frac{c \cdot dP}{P} = 3 \cdot 10^8 \, м/с \cdot 10^{-8} = 3 м/с \ .$$

В системе отсчета, связанной с центром масс, суммарный вектор импульса спутника и пульсара равен нулю, поэтому

$V_c \cdot m = V \cdot M$, или $m = M \cdot V_c / V$

(тот же вывод следует и из определения положения центра масс и равенства периодов: $R/R_c = M/m$, $R_c/V_c = R/V$). Скорость спутника на круговой орбите всегда равна

$$V_c = \left(\frac{GM}{R_c}\right)^{1/2} ,$$

где G - гравитационная постоянная. Отсюда

$$T = \frac{2\pi R_c}{V_c} = 2\pi \frac{GM}{V_c^3} ,$$

или

$$V_c = \left(2\pi \frac{GM}{T}\right)^{1/3} .$$

Подставляя последнее уравнение в первое, получаем:

$$m = M \cdot V \cdot \left(\frac{T}{2\pi \cdot GM}\right)^{1/3} .$$

Подставляя численные значения $M = 4 \cdot 10^{33}$ *кг*, $V = 3$ *м/с*, $T = 1$ *год* $= 3{,}16 \cdot 10^7$ *с* и $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *Н·м²·кг⁻²*, получаем: $m = 3.2 \cdot 10^{26}$ *kg*, или *53* массы Земли.