Астрономическое Общество
Euro-Asian Astronomical Society

IV Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Решения задач теоретического тура

г. Троицк,
7-11 апреля

11 класс

1. Максимальное удаление звезды от центра галактики можно найти, используя закон сохранения энергии. Удаляясь от центра галактики, звезда теряет скорость, преодолевая силу притяжения галактики, то есть совершая работу против сил тяготения. Работа, совершенная звездой против силы тяготения в интервале от R_o до R_g, равна площади трапеции, заключенной под прямолинейным участком графика зависимости силы от расстояния, то есть

$$A(R_o, R_g) = \frac{(R_g - R_o)\cdot(F_g - F_o)}{2},$$

где F_g и F_o – значения силы притяжения на расстояниях R_g и R_o соответственно. Легко понять, что на круговых орбитах

$$\frac{F_g}{m} = \frac{V_g^2}{R_g},\ \frac{F_o}{m} = \frac{V_o^2}{R_o},$$

где m – масса звезды. Работа, совершенная звездой против силы тяготения в интервале между R_g и R_{max} (максимальным расстоянием от центра галактики), где гравитационная сила изменяется по закону $1/r^2$, равна разности значений потенциальной энергии

$$A(R_g, R_{\max}) = \frac{GMm}{R_g} - \frac{GMm}{R_{\max}},$$

где G – гравитационная постоянная, а M – полная масса галактики, с другой стороны, известно, что

$$GM = R_g \cdot V_g^2.$$

Тогда максимальное расстояние R_{max} вычисляется с помощью выражения

$$\frac{mV_*^2}{2} = \frac{(R_g - R_o)\cdot(F_g - F_o)}{2} + GMm\left(\frac{1}{R_g} - \frac{1}{R_{\max}}\right);$$

$$V_*^2 = (R_g - R_o)\cdot\left(\frac{V_g^2}{R_g} + \frac{V_o^2}{R_o}\right) + 2V_g^2\left(1 - \frac{R_g}{R_{\max}}\right)$$

Подставив в это выражение численные значения из условия задачи (при этом заметим, что в систему СИ переходить вовсе не обязательно), получим:

$R_{max} \approx 43{,}7$ кпк

Чтобы навсегда покинуть галактику, звезда должна иметь такую скорость V, чтобы

$$V^2 \geq (R_g - R_o)\cdot\left(\frac{V_g^2}{R_g} + \frac{V_o^2}{R_o}\right) + 2V_g^2$$

Вычисления дают, что критическая скорость:

$v_2 \approx 483$ км/с.

2. Для того, чтобы хотя бы часть метеорита долетела до Земли, необходимо, чтобы его полной кинетической энергии не хватило бы на нагрев всего льда, его плавления, нагрев воды до температуры парообразования и превращения воды в пар, то есть:

$$\frac{mv^2}{2} \leq mc_Л \Delta T_Л + m\lambda + mc_В \Delta T_В + mr,$$

где m – масса метеорита, $\Delta T_Л$ и $\Delta T_в$ – температуры, на которые нагреваются лёд и вода соответственно, то есть 50° и 100°.

$$v \leq \sqrt{2\cdot(c_Л \Delta T_Л + \lambda + c_В \Delta T_В + r)},$$

$$v_{\max} \approx \sqrt{2(2100\cdot 50 + 330000 + 4200\cdot 100 + 2300000)} \approx \sqrt{6310000},$$

откуда $v_{max} \approx 2{,}5$ км/с.

Заметим, что до поверхности Земли долетит именно твердый метеорит (лёд), поскольку все четыре описанных процесса происходят только для участков метеорита, близких к его поверхности, причём практически одновременно, и он уменьшается в размерах, оставаясь твёрдым. Таким образом, ситуация прилёта к земле "большой капли воды" невозможна.

3. Поскольку разность звёздных величин 8, то ясно, что главная звезда ($2M_\odot$) находится на главной последовательности, а спутник – белый карлик, масса которого не более $M_\odot$. По третьему закону Кеплера

$$\frac{(M+m)\cdot T^2}{a^3} = const,$$

причём эта константа равна единице, если работать в системе единиц "а.е. – год – $M_\odot$". Подставив (2 + 1) $M_\odot$ и 177 лет в эту формулу, получим, что а ≈ 50 а.е. Поскольку 50 а.е. видно под углом 2,5", то расстояние в 1 а.е. видно под углом 0,05", то есть расстояние до звёзд составляет около 20 пк.

4. Полное солнечное затмение соответствует такому взаимному положению Луны и Солнца на нашем небе, при котором диск Луны полностью покрывает диск Солнца. Лунный диск движется относительно солнечного с определённой скоростью, в первом приближении равной

u ≈ 360º/29.5 сут ≈ 0,51 угл.сек./сек.

Очевидно, что максимальное время полного солнечного затмения будет в том случае, когда центр лунного диска проходит через центр солнечного. (Это и есть принцип выбора места наблюдения: множество точек на местности, при наблюдении из которых центр одного диска проходит через центр другого, называется линией центра полосы затмения.)

В этом случае время между вторым и третьим контактами (то есть началом и окончанием полного затмения) лунный диск пройдёт относительно солнечного угловое расстояние

$$\delta = 2(\rho_л - \rho_о) = 68''.$$

Время полного затмения составит

$$\tau = \frac{\delta}{u} = \frac{68''}{0.51''/сек} \approx 134 сек$$

Этот ответ получен в первом приближении, без учёта вращения Земли вокруг своей оси. В результате суточного вращения поверхность Земли движется в том же направлении, что и лунная тень, поэтому относительно поверхности Земли скорость тени будет меньше, чем вычисленная нами (вычисления произведены относительно центра Земли, а не относительно её поверхности). Из этого следует, что реальное время затмения больше, чем только вычисленное.

Примечание-дополнение. Количественно это можно учесть следующим образом: Скорость лунной тени относительно линии центр Земли – центр Солнца равна $v_1 = 2\pi R/T \approx 950$ м/с, а скорость Читинской области относительно той же линии $v_2 = 2\pi r\cdot\cos\varphi/t \approx 315$ м/с. (Здесь R = 384000 км – средний радиус лунной орбиты, r = 6380 км – радиус Земли, T = 29,5 сут –

синодический период обращения Луны, t – одни сутки, φ = 52° – географическая широта).

Если бы затмение происходило в полдень, то для получения скорости движения тени по поверхности Земли можно было бы просто вычесть v_2 из v_1. Однако, затмение происходит по всемирному времени в 01^h, по местному астрономическому времени в $0l^h + 113°/(15°/^h) \approx 08^h32^m$, то есть примерно за 3 часа 28 минут до полудня, то есть Читинская область была расположена примерно на 52° от линии центр Земли – центр Солнца. Таким образом, скорость лунной тени составляла $v_* = v_t - v_2\cos 52° \approx 780$ м/с.

Таким образом, более точная оценка даёт максимальную продолжительность затмения $\tau \approx 134$ сек·(950/780) ≈ 163 сек. Данная оценка практически совпадает с реальной величиной.

5. Понадобятся следующие данные, которые можно найти в таблице: эксцентриситет орбиты e = 0,9951 и расстояние от Солнца до точки перигелия: p = 0,914 а.е. Исходя из этих данных, легко найти большую полуось орбиты

$$a = \frac{p}{1-e} \approx 186{,}5 \text{ а.е.},$$

а зная её, по III закону Кеплера (сравнивая с обращением Земли вокруг Солнца)

$$T = T_З \cdot a^{3/2} \approx 2550 \text{ лет.}$$

6. Если ослабление, выраженное в звёздных величинах обозначить через A_b и A_v (для соответствующих диапазонов), то:

$$(B-V)_0 = B_0 - V_0 = (B - A_b) - (V - A_v) =$$

$$= (B - 2.5\cdot\lg\alpha_b) - (V - 2.5\cdot\lg\alpha_v) = (B-V) - 2.5(\lg\alpha_b - \lg\alpha_v) \approx$$

$$\approx 0.22 - 2.5\cdot(0.4-0.3) \approx 0.22 - 0.25 \approx -0.03$$

Это звезда класса А с температурой около 10000 К.