АСТРОНОМИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

VIII Российская олимпиада школьников по астрономии и физике космоса

URL: http://www.issp.ac.ru/iao/russia/2001/ e-mail: univer@issp.ac.ru г, Троицк, 8–13 апреля 2001 г.

Решения задач для 11 класса. Первый тур

1. ***(А.В. Засов.)*** Есть несколько способов, хотя все они не очень точные. Наиболее часто используемые – следующие:

а) По светимости ярчайших звёзд, которая в свою очередь определяется по их спектральному классу. Для молодых рассеянных скоплений ярчайшими являются голубые сверхгиганты класса **O** или **B**, для шаровых – красные гиганты.

б) По диаграмме «звёздная величина – спектр (или цвет)», совмещая положение главной последовательности на этой диаграмме с её положением на диаграмме Герцшпрунга-Рессела, построенной для скоплений (или отдельных звёзд) с известным расстоянием.

в) По цефеидам (если они наблюдаются в скоплении).

Реже используются менее точные методы (не предполагается, что участники Олимпиады дадут эти ответы, однако мы приводим их здесь «для общего развития»):

г) По видимым угловым размерам скоплений, считая их линейные размеры примерно одинаковыми (они известны для скоплений с измеренными расстояниями).

д) Для шаровых скоплений в других галактиках хорошо «работает» метод, основанный на измерении интегральной звёздной величины ярчайших скоплений в данной галактике и оценки модуля расстояния по их известной светимости.

2. ***(А.В. Засов.)*** Координаты данной звезды – это координаты Солнца в точке летнего солнцестояния. Следовательно, звезда находится на эклиптике. Плоскость эклиптики не меняется со временем, так что звезда всегда будет на эклиптике.

Точка весеннего равноденствия, от которой отсчитывается α, совершает обход эклиптики за 26000 лет навстречу годовому движению Солнца, то есть α всех звёзд растёт. Поэтому через четверть периода прецессии (6500 лет) звезда будет иметь $\alpha = 6 + 6 = 12$ часов. Точка на эклиптике с таким α – это точка осеннего равноденствия.

Ответ: $\alpha = 12$ часов, $\delta = 0°$.

3. ***(М.Г. Гаврилов.)*** Для того, чтобы видимая звёздная величина Солнца увеличилась на $\Delta\mathbf{m}$, необходимо, чтобы световой поток уменьшился в $10^{\Delta m/2,5}$, следовательно, наблюдателю надо удалиться от Солнца в $(10^{\Delta m/2,5})^{1/2} = 10^{\Delta m/5}$ раз.

По III закону Кеплера квадрат периода обращения планеты пропорционален кубу большой полуоси её орбиты (в данном случае – радиуса орбиты). Сравнивая нашу гипотетическую орбиту с орбитой Земли, получаем:

$$\left(\frac{T_X}{T_З}\right)^2 = \left(\frac{R_X}{R_З}\right)^3, \text{ то есть } T_X = T_З \cdot \left(\frac{R_X}{R_З}\right)^{3/2},$$

Мы как раз только что нашли, что $R_X/R_З$ равно $10^{\Delta m/5}$, поэтому

$$T_X = T_З \cdot (10^{\Delta m/5})^{3/2} = T_З \cdot 10^{3\Delta m/10},$$

Разность звёздных величин Луны и Солнца составляет $\Delta\mathbf{m} = -12{,}7 - (-26{,}8) = 14{,}1$. Получаем ответ: $T_X = 1$ год $\cdot\ 10^{3\cdot 14{,}1/10} \approx 17000$ лет.

4. ***(В.Г. Сурдин.)***

1) Лунный экватор почти совпадает с эклиптикой. Поэтому Солнце всегда восходит практически в точке востока, а заходит в точке запада. Орбита Луны слабо наклонена к эклиптике, поэтому Земля для лунного наблюдателя практически «ходит по эклиптике» и видна наблюдателю северного полушария только над южной частью горизонта, а наблюдателю южного полушария – только над северной его частью. Теперь посмотрим на карту неба. В районе Ориона эклиптика проходит к северу от этого созвездия. Поскольку, глядя на серп Земли, наблюдатель видел, что «под ним горел Орион», значит направление «вверх» означало «на север», т.е. Земля висела над южной частью горизонта. Вывод: герой романа был в северном полушарии Луны и, разумеется, на видимой её стороне.

2) Поскольку Солнце освещает Луну и Землю с одного направления, а направления взгляда наблюдателей на Луне и Земле противоположны, ясно, что с их точек зрения фазы Земли и Луны дополняют друг друга до полного круга. Поэтому в момент, когда Земля выглядела как "широкий серп, выгнутый к юго-западу", т.е. была между "новоземелием" и первой четвертью, Луна была между полнолунием и последней четвертью. Если учесть, что серп Земли был широкий, т.е. она была ближе к первой четверти, то Луна была ближе к последней четверти.

3) По карте видим, что эклиптика над Орионом проходит в созвездии Тельца и Близнецов; там была Земля. Значит, Луна была в противоположной части эклиптики – в Стрельце или (менее вероятно) Змееносце.

4) Солнце было к западу от Земли, на расстоянии от 0 до 90° (очевидно, ближе к 90°). Значит, оно наблюдалось в Овне или Рыбах (более вероятно, что именно в Рыбах). Это бывает с середины марта по середину мая; скорее всего, был конец марта или апрель.

5. ***(М.Г. Гаврилов.)*** Видимый угловой размер «звёзд» должен быть меньше разрешающей способности глаза, то есть линейный размер (диаметр) изображений этих «звёзд» на куполе не превышал бы $L_0 = \alpha \cdot R$, где α – разрешающая способность человеческого глаза в темноте (около 50" $\approx 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ рад), R – радиус зала планетария. В нашем случае

$$L_0 = \alpha \cdot R \approx 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \text{ м} \approx 1{,}25 \text{ мм}.$$

Размер изображения одной звезды, получаемого на куполе с помощью оптической системы, определяется двумя параметрами:

а) Первый – чисто геометрический, определяемый оптическим увеличением размера звезды при проецировании её на купол. Если размер звезды на слайде $l_0 = 0{,}1$ мм, то размер изображения вычисляется по формуле увеличения объектива (линзы): $L = \Gamma \cdot l_0 = l_0 \cdot R/r$, где r – расстояние от упомянутой дырочки в фольге до проецирующей линзы, по формуле линзы $1/R + 1/r = 1/F$. В нашем случае увеличение не должно превышать $\Gamma_0 = L_0/l_0$, откуда находим, что фокусное расстояние системы должно быть не меньше

$$F = R/(\Gamma_0+1) = R/(L_0/l_0 + 1) \approx R\cdot l_0/L_0 = R\cdot l_0/(\alpha\cdot R) = l_0/\alpha = 0{,}1 \text{ мм} / 2{,}5\cdot10^{-4} \approx 40 \text{ см}.$$

Условие, вообще говоря, вполне выполнимое.

б) Второй параметр – дифракционный, определяемый размером кружка Эйри: угловой размер расхождения пучка от точечного источника (находящегося вблизи фокуса объектива) равен λ/D, где λ – рабочая длина волны (порядка 500 нм или $5\cdot10^{-7}$ м), D – диаметр объектива проецирующей оптической системы (то есть, именно тот диаметр, который нам надо найти). Размер изображения точечного источника на куполе радиуса R при этом составит $R\cdot\lambda/D$. Таким образом, необходимо условие

$$R\cdot\lambda/D \le \alpha\cdot R,$$

$$D \ge \lambda/\alpha \approx 5\cdot10^{-7} \text{ м} / 2{,}5\cdot10^{-4} \approx 2\cdot10^{-3} \text{ м} = 2 \text{ мм}.$$

Условие тоже вполне выполнимое.

Заметим, что эту величину можно было бы указать сразу: именно ей (диаметром зрачка в условиях дневной освещённости) соответствует разрешающая способность человеческого глаза.

6. ***(М.Г. Гаврилов.)*** Будем рассматривать орбиту станции как круговую, при этом радиус её в среднем за сутки составлял $R_0 + h = 6371 \text{ км} + 236 \text{ км} = 6607 \text{ км} \approx 6{,}6\cdot10^6$ м (где R_0 – радиус Земли, а h – высота орбиты), а изменение этого радиуса за сутки – $\Delta h = -2{,}5 \text{ км} \approx -2{,}5\cdot10^3$ м.

Падение средней высоты орбиты происходит по причине потери станцией энергии из-за трения о верхние слои атмосферы. При этом, чтобы правильно учесть всё происходящее, лучше воспользоваться энергетическим подходом, учитывая полную энергию станции

$$E = П + К = -GMm/(R_0+h) + mV^2/2,$$

а не только кинетическую или потенциальную. (Здесь G – гравитационная постоянная, M – масса Земли, V – орбитальная скорость движения станции.) Попутно заметим, что скорость станции увеличивается с уменьшением высоты (станция тормозится, а скорость увеличивается!). Из условия движения по круговой орбите

$$GMm/(R_0+h)^2 = mV^2/(R_0+h),$$

откуда

$$GMm/(R_0+h) = mV^2,$$

$$П = -2К,$$

$$E = -К = П/2.$$

Примечание. То, что мы написали, справедливо для величины потенциальной энергии гравитационного взаимодействия, отсчитываемой от бесконечности (тела удалены друг от *друга на бесконечное расстояние). Вообще говоря, абсолютное значение потенциальной энергии в физике не имеет смысла, важно только изменение потенциальной энергии.*

Таким образом,

$$E = -GMm/2(R_0+h).$$

Процесс потери энергии станцией и одновременного увеличения скорости с уменьшением радиуса орбиты можно представить себе следующим образом. Будем рассматривать квазистационарный процесс: считать орбиту всё время круговой, а работу сил сопротивления трения

$$A = F \cdot L$$

сводить к изменению параметров этой круговой орбиты. Здесь F – сила сопротивления, L – пройденный путь. Сила $F = \Delta P/\Delta t$ находится из следующих соображений: в течение каждого времени Δt о станцию ударяется масса $\mu = \rho \cdot S \cdot V \cdot \Delta t$ в среднем неподвижных молекул (ρ – плотность атмосферы на высоте полёта станции). В результате упругих столкновений их скорость относительно станции меняется от -V до +V, а относительно Земли – от 0 до 2V. То есть, за время Δt станция передаёт молекулам импульс

$$\Delta P = \mu \cdot 2V = 2V \cdot \rho \cdot S \cdot V \cdot \Delta t = 2 \cdot \rho \cdot S \cdot V^2 \cdot \Delta t,$$

Откуда

$$F = \Delta P/\Delta t = 2 \cdot \rho \cdot S \cdot V^2,$$

Таким образом, если за время $\tau = 24$ часа станция пролетит расстояние $L = V \cdot \tau$, работа сил трения (и, соответственно, потеря энергии станцией) составит:

$$A = F \cdot L = 2 \cdot \rho \cdot S \cdot V^3 \cdot \tau,$$

Изменение энергии:

$$\Delta E = -A = -2 \cdot \rho \cdot S \cdot V^3 \cdot \tau.$$

С другой стороны, изменение энергии станции за это время составит

$$\Delta E = -GMm/2(R_0+h+\Delta h) - \{-GMm/2(R_0+h)\} \approx \Delta h \cdot GMm/2(R_0+h)^2,$$

где Δh – изменение высоты орбиты, величина Δh – отрицательна!

$$-2 \cdot \rho \cdot S \cdot V^3 \cdot \tau = \Delta h \cdot GMm/2(R_0+h)^2,$$

$$\rho = -\Delta h \cdot GMm/\{4(R_0+h)^2 \cdot S \cdot V^3 \cdot \tau\}$$

и, учитывая, что $V^2 = GM/(R_0+h)$, получаем

$$\rho = m\Delta h/\{4\tau S \cdot (GM)^{1/2}(R_0+h)^{1/2}\}.$$

Численный ответ:

$$\rho = 3{,}86 \cdot 10^{-10}\ \text{кг/м}^3 \approx 3{,}9 \cdot 10^{-10}\ \text{кг/м}^3.$$