

## VIII Российская олимпиада школьников по астрономии и физике космоса

URL: <http://www.issp.ac.ru/iao/russia/2001/>e-mail: [univer@issp.ac.ru](mailto:univer@issp.ac.ru)

г. Троицк, 8–13 апреля 2001 г.

### Решения задач для 11 класса. Первый тур

1. (А.В. Засов.) Есть несколько способов, хотя все они не очень точные. Наиболее часто используемые – следующие:

а) По светимости ярчайших звёзд, которая в свою очередь определяется по их спектральному классу. Для молодых рассеянных скоплений ярчайшими являются голубые сверхгиганты класса **O** или **B**, для шаровых – красные гиганты.

б) По диаграмме «звёздная величина – спектр (или цвет)», совмещая положение главной последовательности на этой диаграмме с её положением на диаграмме Герцшпрунга-Рессела, построенной для скоплений (или отдельных звёзд) с известным расстоянием.

в) По цефеидам (если они наблюдаются в скоплении).

Реже используются менее точные методы (не предполагается, что участники Олимпиады дадут эти ответы, однако мы приводим их здесь «для общего развития»):

г) По видимым угловым размерам скоплений, считая их линейные размеры примерно одинаковыми (они известны для скоплений с измеренными расстояниями).

д) Для шаровых скоплений в других галактиках хорошо «работает» метод, основанный на измерении интегральной звёздной величины ярчайших скоплений в данной галактике и оценки модуля расстояния по их известной светимости.

2. (А.В. Засов.) Координаты данной звезды – это координаты Солнца в точке летнего солнцестояния. Следовательно, звезда находится на эклиптике. Плоскость эклиптики не меняется со временем, так что звезда всегда будет на эклиптике.

Точка весеннего равноденствия, от которой отсчитывается  $\alpha$ , совершает обход эклиптики за 26000 лет навстречу годовому движению Солнца, то есть  $\alpha$  всех звёзд растёт. Поэтому через четверть периода прецессии (6500 лет) звезда будет иметь  $\alpha = 6 + 6 = 12$  часов. Точка на эклиптике с таким  $\alpha$  – это точка осеннего равноденствия.

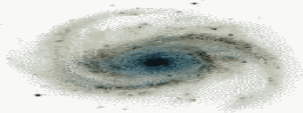
Ответ:  $\alpha = 12$  часов,  $\delta = 0^\circ$ .

3. (М.Г. Гаврилов.) Для того, чтобы видимая звёздная величина Солнца увеличилась на  $\Delta m$ , необходимо, чтобы световой поток уменьшился в  $10^{\Delta m/2,5}$ , следовательно, наблюдателю надо удалиться от Солнца в  $(10^{\Delta m/2,5})^{1/2} = 10^{\Delta m/5}$  раз.

По III закону Кеплера квадрат периода обращения планеты пропорционален кубу большой полуоси её орбиты (в данном случае – радиуса орбиты). Сравнивая нашу гипотетическую орбиту с орбитой Земли, получаем:

$$\left(\frac{T_X}{T_3}\right)^2 = \left(\frac{R_X}{R_3}\right)^3, \text{ то есть } T_X = T_3 \cdot \left(\frac{R_X}{R_3}\right)^{3/2},$$

Мы как раз только что нашли, что  $R_X/R_3$  равно  $10^{\Delta m/5}$ , поэтому



## VIII Российская олимпиада школьников по астрономии и физике космоса

URL: <http://www.issp.ac.ru/iao/russia/2001/>

e-mail: [univer@issp.ac.ru](mailto:univer@issp.ac.ru)

г. Троицк, 8–13 апреля 2001 г.

$$T_X = T_3 \cdot (10^{\Delta m/5})^{3/2} = T_3 \cdot 10^{3\Delta m/10},$$

Разность звёздных величин Луны и Солнца составляет  $\Delta m = -12,7 - (-26,8) = 14,1$ . Получаем ответ:  $T_X = 1 \text{ год} \cdot 10^{3 \cdot 14,1/10} \approx 17000 \text{ лет}$ .

#### 4. (В.Г. Сурдин.)

1) Лунный экватор почти совпадает с эклипстикой. Поэтому Солнце всегда восходит практически в точке востока, а заходит в точке запада. Орбита Луны слабо наклонена к эклипстике, поэтому Земля для лунного наблюдателя практически «ходит по эклипстике» и видна наблюдателю северного полушария только над южной частью горизонта, а наблюдателю южного полушария – только над северной его частью. Теперь посмотрим на карту неба. В районе Ориона эклиптика проходит к северу от этого созвездия. Поскольку, глядя на серп Земли, наблюдатель видел, что «под ним горел Орион», значит направление «вверх» означало «на север», т.е. Земля висела над южной частью горизонта. Вывод: герой романа был в северном полушарии Луны и, разумеется, на видимой её стороне.

2) Поскольку Солнце освещает Луну и Землю с одного направления, а направления взгляда наблюдателей на Луне и Земле противоположны, ясно, что с их точек зрения фазы Земли и Луны дополняют друг друга до полного круга. Поэтому в момент, когда Земля выглядела как «широкий серп, выгнутый к юго-западу», т.е. была между «новоземелием» и первой четвертью, Луна была между полнолунием и последней четвертью. Если учесть, что серп Земли был широкий, т.е. она была ближе к первой четверти, то Луна была ближе к последней четверти.

3) По карте видим, что эклиптика над Орионом проходит в созвездии Тельца и Близнецов; там была Земля. Значит, Луна была в противоположной части эклиптики – в Стрельце или (менее вероятно) Змееносце.

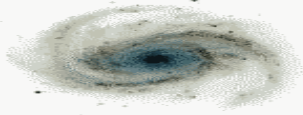
4) Солнце было к западу от Земли, на расстоянии от 0 до 90° (очевидно, ближе к 90°). Значит, оно наблюдалось в Овне или Рыбах (более вероятно, что именно в Рыбах). Это бывает с середины марта по середину мая; скорее всего, был конец марта или апрель.

#### 5. (М.Г. Гаврилов.) Видимый угловой размер «звёзд» должен быть меньше разрешающей способности глаза, то есть линейный размер (диаметр) изображений этих «звёзд» на куполе не превышал бы $L_0 = \alpha \cdot R$ , где $\alpha$ – разрешающая способность человеческого глаза в темноте (около $50'' \approx 2,5 \cdot 10^{-4}$ рад), $R$ – радиус зала планетария. В нашем случае

$$L_0 = \alpha \cdot R \approx 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \text{ м} \approx 1,25 \text{ мм}.$$

Размер изображения одной звезды, получаемого на куполе с помощью оптической системы, определяется двумя параметрами:

- а) Первый – чисто геометрический, определяемый оптическим увеличением размера звезды при проецировании её на купол. Если размер звезды на слайде  $l_0 = 0,1 \text{ мм}$ , то размер изображения вычисляется по формуле увеличения объектива (линзы):  $L = \Gamma \cdot l_0 = l_0 \cdot R/r$ , где  $r$  – расстояние от упомянутой дырочки в фольге до проецирующей линзы, по формуле линзы  $1/R + 1/r = 1/F$ . В



## VIII Российская олимпиада школьников по астрономии и физике космоса

URL: <http://www.issp.ac.ru/iao/russia/2001/>

e-mail: [univer@issp.ac.ru](mailto:univer@issp.ac.ru)

г. Троицк, 8–13 апреля 2001 г.

нашем случае увеличение не должно превышать  $\Gamma_0 = L_0/l_0$ , откуда находим, что фокусное расстояние системы должно быть не меньше

$$F = R/(\Gamma_0 + 1) = R/(L_0/l_0 + 1) \approx R \cdot l_0/L_0 = R \cdot l_0/(\alpha \cdot R) = l_0/\alpha = 0,1 \text{ мм} / 2,5 \cdot 10^{-4} \approx 40 \text{ см.}$$

Условие, вообще говоря, вполне выполнимое.

- б) Второй параметр – дифракционный, определяемый размером кружка Эйри: угловой размер расхождения пучка от точечного источника (находящегося вблизи фокуса объектива) равен  $\lambda/D$ , где  $\lambda$  – рабочая длина волны (порядка 500 нм или  $5 \cdot 10^{-7}$  м),  $D$  – диаметр объектива проецирующей оптической системы (то есть, именно тот диаметр, который нам надо найти). Размер изображения точечного источника на куполе радиуса  $R$  при этом составит  $R \cdot \lambda/D$ . Таким образом, необходимо условие

$$R \cdot \lambda/D \leq \alpha \cdot R,$$

$$D \geq \lambda/\alpha \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ м} / 2,5 \cdot 10^{-4} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2 \text{ мм.}$$

Условие тоже вполне выполнимое.

Заметим, что эту величину можно было бы указать сразу: именно ей (диаметром зрачка в условиях дневной освещённости) соответствует разрешающая способность человеческого глаза.

6. (*М.Г. Гаврилов.*) Будем рассматривать орбиту станции как круговую, при этом радиус её в среднем за сутки составлял  $R_0 + h = 6371 \text{ км} + 236 \text{ км} = 6607 \text{ км} \approx 6,6 \cdot 10^6 \text{ м}$  (где  $R_0$  – радиус Земли, а  $h$  – высота орбиты), а изменение этого радиуса за сутки –  $\Delta h = -2,5 \text{ км} \approx -2,5 \cdot 10^3 \text{ м}$ .

Падение средней высоты орбиты происходит по причине потери станцией энергии из-за трения о верхние слои атмосферы. При этом, чтобы правильно учесть всё происходящее, лучше воспользоваться энергетическим подходом, учитывая полную энергию станции

$$E = \Pi + K = -GMm/(R_0+h) + mV^2/2,$$

а не только кинетическую или потенциальную. (Здесь  $G$  – гравитационная постоянная,  $M$  – масса Земли,  $V$  – орбитальная скорость движения станции.) Попутно заметим, что скорость станции увеличивается с уменьшением высоты (станция тормозится, а скорость увеличивается!). Из условия движения по круговой орбите

$$GMm/(R_0+h)^2 = mV^2/(R_0+h),$$

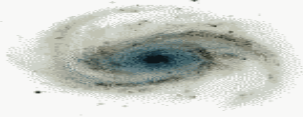
откуда

$$GMm/(R_0+h) = mV^2,$$

$$\Pi = -2K,$$

$$E = -K = \Pi/2.$$

*Примечание.* То, что мы написали, справедливо для величины потенциальной энергии гравитационного взаимодействия, отсчитываемой от бесконечности (тела удалены друг от



## VIII Российская олимпиада школьников по астрономии и физике космоса

URL: <http://www.issp.ac.ru/iao/russia/2001/>

e-mail: [univer@issp.ac.ru](mailto:univer@issp.ac.ru)

г. Троицк, 8–13 апреля 2001 г.

*друга на бесконечное расстояние). Вообще говоря, абсолютное значение потенциальной энергии в физике не имеет смысла, важно только изменение потенциальной энергии.*

Таким образом,

$$E = -GMm/2(R_0+h).$$

Процесс потери энергии станцией и одновременного увеличения скорости с уменьшением радиуса орбиты можно представить себе следующим образом. Будем рассматривать квазистационарный процесс: считать орбиту всё время круговой, а работу сил сопротивления трения

$$A = F \cdot L$$

сводить к изменению параметров этой круговой орбиты. Здесь  $F$  – сила сопротивления,  $L$  – пройденный путь. Сила  $F = \Delta P / \Delta t$  находится из следующих соображений: в течение каждого времени  $\Delta t$  о станцию ударяется масса  $\mu = \rho \cdot S \cdot V \cdot \Delta t$  в среднем неподвижных молекул ( $\rho$  – плотность атмосферы на высоте полёта станции). В результате упругих столкновений их скорость относительно станции меняется от  $-V$  до  $+V$ , а относительно Земли – от  $0$  до  $2V$ . То есть, за время  $\Delta t$  станция передаёт молекулам импульс

$$\Delta P = \mu \cdot 2V = 2V \cdot \rho \cdot S \cdot V \cdot \Delta t = 2 \cdot \rho \cdot S \cdot V^2 \cdot \Delta t,$$

Откуда

$$F = \Delta P / \Delta t = 2 \cdot \rho \cdot S \cdot V^2,$$

Таким образом, если за время  $\tau = 24$  часа станция пролетит расстояние  $L = V \cdot \tau$ , работа сил трения (и, соответственно, потеря энергии станцией) составит:

$$A = F \cdot L = 2 \cdot \rho \cdot S \cdot V^3 \cdot \tau,$$

Изменение энергии:

$$\Delta E = -A = -2 \cdot \rho \cdot S \cdot V^3 \cdot \tau.$$

С другой стороны, изменение энергии станции за это время составит

$$\Delta E = -GMm/2(R_0+h+\Delta h) - \{-GMm/2(R_0+h)\} \approx \Delta h \cdot GMm/2(R_0+h)^2,$$

где  $\Delta h$  – изменение высоты орбиты, величина  $\Delta h$  – отрицательна!

$$-2 \cdot \rho \cdot S \cdot V^3 \cdot \tau = \Delta h \cdot GMm/2(R_0+h)^2,$$

$$\rho = -\Delta h \cdot GMm / \{4(R_0+h)^2 \cdot S \cdot V^3 \cdot \tau\}$$

и, учитывая, что  $V^2 = GM/(R_0+h)$ , получаем

$$\rho = m \Delta h / \{4 \tau S \cdot (GM)^{1/2} (R_0+h)^{1/2}\}.$$

Численный ответ:

$$\rho = 3,86 \cdot 10^{-10} \text{ кг/м}^3 \approx 3,9 \cdot 10^{-10} \text{ кг/м}^3.$$