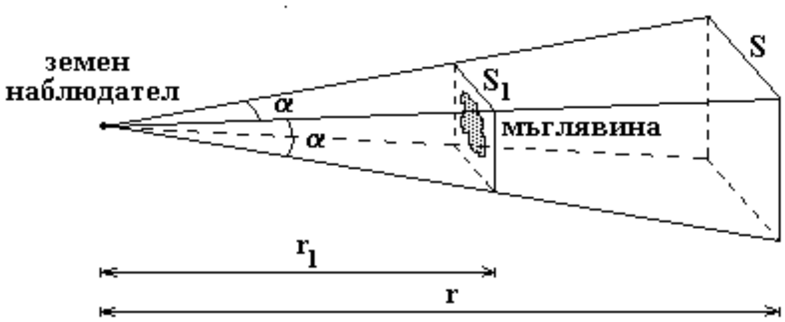
Теоретический тур

10 класс.

1. **Звёзды и туманность.** ***(Е.С. Божурова в редакции М.Г. Гаврилова, 2002.)*** Почему на фоне туманности плотность звёзд меньше? Очевидно, потому, что часть их загораживает туманность (по-болгарски – "мъглявина").



Звёзды, регистрируемые на каждом из двух исследуемых участков снимка, принадлежат области пространства с формой пирамиды и определённым объёмом. Фотоаппарат болгарских астрономов находится в вершине пирамиды (точка «земен наблюдател»), основанием которой является часть сферы с радиусом, равным расстоянию до самых отдалённых звёзд, зарегистрированных на фотографии. По условию задачи звёзды равномерно распределены в пространстве, следовательно, число звёзд на данном участке снимка пропорционально объёму соответствующей пирамиды. Объём пирамиды с высотой h и площадью основания S есть:

$$V = h \cdot S / 3.$$

Для простоты рассмотрим участки с малыми угловыми размерами: такими, что можно не учитывать кривизну оснований соответствующих пирамид. Также для простоты сравним пирамиды с квадратными основаниями, пусть угловая длина сторон этих квадратов – α. Тогда высоты пирамид можно принять равными расстоянию до самых отдалённых звёзд, которые видны в соответствующих областях фотоснимка. Для случая на фоне туманности это r_1 – расстояние до туманности (так как она непрозрачная), а для случая вне туманности это r – расстояние до звёзд 15^m. Линейные длины сторон оснований двух пирамид равны $\alpha \cdot r_1$ и $\alpha \cdot r$, а площади этих оснований $S_1 = (\alpha r_1)^2$ и $S = (\alpha r)^2$. Объёмы этих двух пирамид:

$$V_1 = r_1 \cdot (\alpha r_1)^2 / 3 = \alpha^2 r_1^3 / 3,$$

$$V = r \cdot (\alpha r)^2 / 3 = \alpha^2 r^3 / 3.$$

Отношение числа звёзд в них:

$$N_1 / N = V_1 / V = (r_1 / r)^3$$

Из этого равенства получаем формулу для соотношения расстояний r_1 и r :

$$r_1 = r\, (N_1 / N)^{1/3}.$$

Чтобы найти расстояние r до самых слабых звёзд, используем классическую формулу, связывающую абсолютную звёздную величину M и видимую звёздную величину m. В нашем случае $M = 5^m$ для всех звёзд, а видимая звёздная величина самых слабых звёзд на снимке $m = 15^m$.

$$5 \lg r - 5 = m - M,$$

$$lg\ r = (m - M + 5) / 5,$$

$$lg\ r = 3,$$

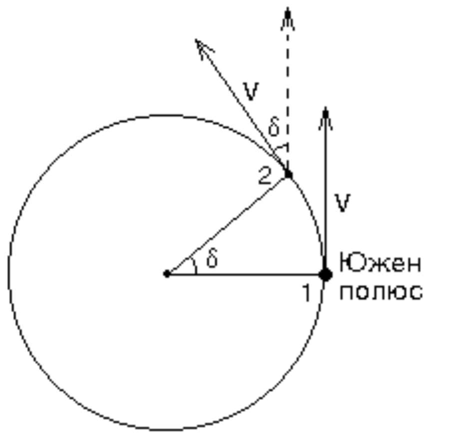
$$r = 1000\ пк.$$

Учитывая, что $N_1 / N = 10$, получаем :

$$r_1 = r\ (1/10)^{1/3} \approx 460\ пк.$$

Примечание: даже если бы мы учли кривизну оснований пирамид и рассмотрели бы произвольные формы их оснований (использовали точную формулу для объёма сферического сектора), результат получился бы точно такой же.

2. **Путешествия у полюса.** ***(Е.С. Божурова в редакции М.Г. Гаврилова, 2002.)*** Двигаясь со скоростью 2 км/ч, участники экспедиции за 24 часа далеко не уйдут. Даже, если бы они шли по прямой, – и то, удалились бы не более, чем на 48 км. Поэтому мы можем не учитывать кривизну земного шара и считать, что полярники движутся по плоскости. Вектор их скорости всё время направлен к звезде Сириус. Сириус участвует в видимом суточном движении небесной сферы и за 24 часа проходит по небу приблизительно 361°. Дополнительный градус появляется потому, что звезда делает полный оборот не за 24 часа (солнечные сутки), а примерно за $23^ч 56^м$ (звёздные сутки, точнее – $24^ч \times 365{,}26 / 366{,}26 = 23^ч 56^м 04^с$). За остающиеся почти 4 минуты до окончания 24-го часа звезда проходит ещё около $(4^м : 60) \times 15° = 1°$. Следовательно, вектор скорости полярников равномерно вращается, отслеживая направление на Сириус и делая один полный оборот за одни звёздные сутки. По величине скорость движения полярников остаётся постоянной. Это означает, что они движутся по окружности длиной $23^ч 56^м 04^с \times 2$ км/ч = 47,869 км и радиусом $47{,}869 / 2\pi = 7{,}621$ км. Центр этой окружности находится в стороне от полюса. То есть, через звёздные сутки полярники вновь окажутся на полюсе, а за оставшиеся до окончания 24-го часа почти 4 минуты пройдут ещё 131 м.



При движение по окръжност, ако за даден интервал от време радиус-векторът на движещата се точка се завърти на ъгъл δ, то и векторът на скоростта се завърта на същия ъгъл δ.

3. **Разрешающая способность.** ***(А.В. Засов в редакции М.Г. Гаврилова, 2002.)*** Из ограничения на разрешающую способность следует, что атмосфера меняет направление проходящих сквозь нее лучей случайным образом в пределах угла 0,5″. Оптические свойства рассеивающего слоя не зависят от того, с какой стороны от него находится источник. Поэтому свет, идущий от любой точки на поверхности Земли, также будет рассеиваться на тот же угол. Если даже предположить, что все рассеяние происходит на высоте 2 км, то «размазка» изображения деталей земной поверхности будет соответствовать диаметру

$$2000\ м \cdot \sin(0{,}5'') \approx 2000\ м \cdot 0{,}5 / 2{\cdot}10^5 = 5{\cdot}10^{-3}\ м = 5\ мм.$$

Если же учесть, что 2 км – это предельная высота рассеивающих слоев атмосферы, а средняя высота заведомо ниже, то можно рассматривать полученную оценку как верхний предел линейной разрешающей способности. С высоты 200 км отрезок полученного размера будет виден под углом в 100 раз меньшим, чем с высоты 2 км, то есть под углом уже не 1/2, а 1/200 угловой секунды. Дифракционная разрешающая способность δ в оптической области спектра составляет примерно λ/D, где λ – длина волны видимого света, примерно равная 5000 Å = $5\cdot10^{-7}$ м. Чтобы дифракция на краях объектива не мешала реализовать разрешающую способность в $\delta = 1''/200 \approx (1''/200)\cdot(1\ \text{рад}/200000'') = 2{,}5\cdot10^{-8}$ рад, надо иметь диаметр объектива телескопа $D = \lambda/\delta \approx 5\cdot10^{-7}$ м / $2{,}5\cdot10^{-8}$ = 20 м. До осуществления таких возможностей пока далеко. Реально иметь космический телескоп с диаметром 1 м и разрешающей способностью 0,1″. Для него при наблюдении земной поверхности разрешение составит 10 см. Даже очень неспокойная атмосфера не помешает её реализовать.

4. **22750 звёзд.** ***(А.В. Засов, 2002.)*** Звёзды данной звёздной величины в 2,512 раз слабее предыдущей. Но их суммарный поток пропорционален полному числу звёзд. Поэтому звёзды, более слабые на одну звёздную величину, давали бы точно такой же световой поток, если бы их было в 2,512 раз больше по числу.

   В действительности мы имеем, что

   Число звёзд 5-й звёздной величины больше чем 4-й в 700/250 = 2,80 раза,
   Число звёзд 6-й звёздной величины больше чем 5-й в 1900/700 = 2,71 раза,
   Число звёзд 7-й звёздной величины больше чем 6-й в 5300/1900 = 2,79 раза,
   Число звёзд 8-й звёздной величины больше чем 7-й в 14600/5300 = 2,75 раза.

   Поскольку все отношения больше 2,512, вклад звёзд каждой последующей звёздной величины (в пределах рассматриваемого интервала величин) растёт с увеличением звёздной величины. Для более слабых звёзд этот закон нарушается, иначе бы всё небо ярко светилось.

   Ответ: восьмой звёздной величины.

5. **Спелеологи-гравиметристы.** ***(М.Г. Гаврилов, 1992, редакция 2000.)*** Спелеологи должны проводить измерения силы тяжести в различных точках на поверхности земли. Тогда в том случае, когда под ними находится некоторая полость радиуса R (объём пустого пространства – пространства, где плотность составляет не ρ_0, а 0), сила тяжести будет меньше. Для простоты рассмотрим шарообразную полость. Тогда в том случае, когда прямо под спелеологами находится полость радиуса R (то есть, пространство объёма $4/3\cdot\pi\cdot R^3$, где плотность составляет не ρ_0, а 0), сила тяжести будет меньше на величину

$$\Delta g = G\cdot\Delta M/L^2 = G\cdot\Delta\rho\cdot4/3\cdot\pi\cdot R^3/L^2,$$

где L – расстояние от точки измерения до центра этой шаровой полости. Очевидно, наибольший эффект будет заметен тогда, когда L ≈ R, то есть полость почти касается земной поверхности. В этом случае

$$\Delta g = G\cdot\Delta\rho\cdot4/3\cdot\pi\cdot R^3/R^2 = G\cdot\Delta\rho\cdot4/3\cdot\pi\cdot R.$$

Поскольку период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi\cdot(l/g)^{1/2},$$

то изменение величины g на Δg приведёт к изменению периода колебаний маятника на величину $\Delta T/T = -(\Delta g/g)/2$. Таким образом:

$$2\Delta T/T = -(G\cdot\Delta\rho\cdot4/3\cdot\pi\cdot R) / g.$$

Поскольку $\Delta\rho = 0 - \rho_0 = -\rho_0$, получаем

$$2\Delta T/T = (G\cdot\rho_0\cdot4/3\cdot\pi\cdot R) / g,$$

Откуда:

$$R = (3/2\pi)\cdot(\Delta T/T)\cdot g / (G\cdot\rho_0).$$

Если предел чувствительности гравиметра составляет $2\cdot10^{-5}$ %, то есть $\Delta T/T = 2\cdot10^{-7}$, то радиус полости, измеряемый на пределе чувствительности получается равным 5,0 метров.

Ответ: полость с характерным размером (диаметром) порядка 10 метров.

6. **Толщина солнечного паруса.** ***(М.Г. Гаврилов, 2002.)*** Обозначим толщину паруса через d. Масса паруса равна: $M_П = \rho\cdot d\cdot S$, $d = M_П / \rho\cdot S$. Разумно предположить, что зеркальные свойства парусу обеспечивают металлические характеристики его материала; это даёт возможность оценить порядок плотности материала ρ: от $2\cdot10^3$ кг/м^3 до $2\cdot10^4$ кг/м^3. Для оценки возьмём плотность алюминия $\rho = 2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3. Очевидно также, что масса паруса входит в упомянутые 10 тонн всего комплекса. Для оценки возьмём половину этой величины, $M_П = 5\cdot10^3$ кг. При таких оценочных подсчётах площадь в 7 654 321 м^2 следует округлить по крайней мере до 7,7 км^2. Получаем:

$$d = 5\cdot10^3 \text{ кг} / (2{,}7\cdot10^3 \text{ кг/м}^3\cdot7{,}7\cdot10^6 \text{ м}^2) \approx 2{,}4\cdot10^{-7} \text{ м} \approx 1/4 \text{ мкм}.$$

Величина, наверно, достижимая для технологий недалёкого будущего.

Примечание: правильными следует считать ответы в диапазоне от 0,03 до 0,4 мкм.