
Х Российская олимпиада школьников по астрономии и физике космоса

Теоретический тур. Решения задач

г. Курск,
4-10 апреля 2003 г.

11 класс.

1. Фотометрия Солнца. (В.В. Чичмарь, март 2003).

Предполагаемое решение.

Непосредственные измерения мощности излучения Солнца затруднены, т. к. требуют точного определения коэффициента прозрачности земной атмосферы. Проще наблюдать планеты, освещённые солнечными лучами, и сравнивать их с блеском стандартных звёзд. Отношение световых потоков от планет и от звёзд не зависит от прозрачности атмосферы. Кроме того, большая яркость Солнца требует использование более сложных приборов при прямом измерении его яркости.

2. Гидирование. (В.В. Чичмарь, март 2003, обработка и дополнения – М.Г. Гаврилов).

На положение звёзд с большими зенитными расстояниями влияет рефракция атмосферы. Рефракция атмосферы "приподнимает" звёзды на небесной сфере относительно их истинных координат (уменьшает зенитное расстояние). Причём, чем ближе к горизонту, тем дальше наблюдаемое положение звёзд от их истинных координат.

Будем считать, что на малых зенитных расстояниях (то есть, далеко от горизонта) рефракцией земной атмосферы можно пренебречь и часовой механизм полностью отрабатывает изменение видимого положения звезды от времени, в дополнительном гидировании нет нужды.

Однако, при наблюдении звёзд вблизи горизонта дополнительное гидирование необходимо, поскольку в этом случае видимое положение звёзд существенно отличается от их истинных координат на небесной сфере. Часовой механизм телескопа отрабатывает суточное вращение Земли, но не отрабатывает изменение влияния рефракции земной атмосферы.

В западном сегменте неба благодаря рефракции видимое положение заходящей звезды всё более отличается от истинного, причём вектор его углового ускорения направлен против суточного движения телескопа. Даже зашедшую звезду мы наблюдаем ещё некоторое время потому, что земная атмосфера "приподнимает" её над горизонтом. Поэтому микрометрический винт должен замедлять перемещение телескопа в его суточном движении, причём чем ближе к горизонту, тем больше должна быть скорость этого компенсирующего движения (то есть, график скорости движения микрометрического винта при компенсирующем гидировании не является линейным).

В восточном сегменте неба благодаря рефракции видимое положение звезды при её восходе сильно отличается от истинного положения, но постепенно угловое расстояние между этими точками уменьшается, поскольку видимое движение звезды медленнее истинного. Микрометрический винт должен замедлять перемещение телескопа относительно его собственного суточного движения до тех пор, пока видимые и истинные координаты звёзд не совпадут. Такое движение также не является линейным. Чем выше звезда над горизонтом, тем меньше величина такой компенсации и скорость компенсирующего движения.

Кроме того, во всех случаях наблюдения звёзд у горизонта требуется компенсация не только по прямому восхождению, но и по склонению. Для наблюдений в южном и северном сегментах неба величина компенсации по склонению может быть весьма значительной по абсолютной величине, но её изменение в течение времени фотографирования – мало, поскольку звезда перемещается по небу горизонтально.

Собственно от времени наблюдения (утро, вечер) компенсирующая скорость микрометрического винта не зависит. Однако, есть тонкий эффект, из-за которого по сути такая зависимость есть.

Х Российская олимпиада школьников по астрономии и физике космоса

Дело в том, что угловое расстояние между видимым и истинным положениями звёзд зависит от коэффициента рефракции земной атмосферы, который, в свою очередь, зависит от температуры. Температура нижних слоев тропосферы в утренние и вечерние часы наблюдений разная, коэффициенты рефракции тоже разные. Поэтому графики компенсирующих скоростей микрометрического винта также должны быть разными.

Чем ниже температура, тем больше коэффициент рефракции; чем выше температура, тем ниже коэффициент рефракции. Поэтому, в утреннее время наблюдений "компенсирующая скорость" микрометрического винта также должна быть выше, чем в вечернее.

3. Затмения. (О.С. Угольников, март 2003).

Кратеры Коперник и Кеплер находятся в северном полушарии Луны, а кратер Тихо – в южном полушарии. Данное затмение было частным теневым с фазой, не меньшей 0,3-0,4, при этом Луна задела южную часть тени Земли. Такое затмение может произойти, если Луна не дошла нескольких градусов (около 5-6) до восходящего узла, или прошла на столько же далее нисходящего узла своей орбиты. Но, так как синодический полупериод обращения Луны (около 14,8 сут) больше, чем драконический (около 13,6 сут), то во втором из перечисленных случаев в ближайшее новолуние Луна уйдёт более чем на 18 градусов от восходящего узла орбиты, и солнечного затмения быть не может (оно уже произошло до лунного).



В первом же случае солнечное затмение произойдёт, и при этом Луна уже пройдёт нисходящий узел орбиты и окажется южнее эклиптики (см. рисунок). Данное затмение будет видно в южном полушарии Земли и не будет видно в северном полушарии, то есть, не будет видно и в России. (*)

Примечание (*): С той поправкой, что, конечно, затмение можно будет наблюдать с российских полярных станций в Антарктиде.

4. Внуки-путешественники. (Н.Н. Шахворостова, март 2003, обработка и дополнения – М.Г. Гаверилов).

Почему же опаздывает второй внук? Вероятно потому, что часы у него отстают. Почему же часы, шедшие абсолютно точно в течение многих десятилетий, вдруг стали отставать? Дело в том, что скорость хода маятниковых часов обратно пропорциональна периоду колебаний математического маятника, который является основным элементом таких часов. А период колебаний определяется формулой $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, где L – длина маятника, а g – ускорение свободного падения. Возможно, конечно, что разные температурные условия на полюсе и экваторе привели к изменению длины маятника, но скорее всё дело в разнице ускорений свободного падения.

Ускорение свободного падения на экваторе меньше, чем на полюсе, сразу по двум причинам.

Во-первых, ускорение свободного падения на экваторе будет меньше за счёт центробежного ускорения на величину $\Delta g_1 = v^2/R$, где v – скорость вращения точки экватора, равная $2\pi R/T = 465$ м/с. Это приводит к относительному уменьшению ускорения силы тяжести на экваторе на величину $v^2/Rg = v^2R/GM = 0,00345 = 1/290$.

Во-вторых, Земля имеет сжатие, равное $\eta = 0,00335 = 1/298$ (см. таблицу Солнечной системы), что также уменьшает ускорение свободного падения на экваторе. Численно оценить это довольно сложно, но можно сделать оценки. Оценка снизу – ноль, сверху эта величина Δg_2

Х Российская олимпиада школьников по астрономии и физике космоса

не превосходит $\left(\frac{GM}{R_n^2} - \frac{GM}{R_a^2}\right) \approx \frac{2GM\eta}{R^2} \approx 0,007g_0$, где M , R_n , R_a и R – масса, полярный, экваториальный и средний радиусы Земли. Реально, величина Δg_2 составляет $0,0018g_0$.

В итоге, относительное уменьшение ускорение силы тяжести на экваторе меньше, чем на полюсе, примерно на $0,52\%$.

Поскольку, как мы выяснили, скорость хода маятниковых часов пропорциональна Δg , часы на полюсе быстрее пройдут свой год, в результате покоритель полюса и исследователь Белых Медведей к радости бабушки прибудет раньше намеченного срока. А вот часы этнографа будут отставать, в результате он будет считать, что время Нового Года ещё не наступило.

Количественно разница хода часов на полюсе и экваторе равна $\Delta g/2g_0 = 0,26\%$. За год это составит примерно $0,95$ суток или $22,8$ часа. (Если решать задачу, не учитывая сплюснутость Земли, то, соответственно, $\Delta g_1/2g_0 = 0,172\%$, за год это составит примерно $0,63$ суток или около 15 часов). Вот сколько бабушке придётся волноваться, что там случилось со вторым внуком в далёкой Африке.

Примечание 1. Предполагается, что полным решением участника Олимпиады является правильное вычисление Δg_1 и связанных с этим последствий упоминание про Δg_2 из-за сплюснутости Земли.

Примечание 2. Эта задача является продолжением сюжетной линии задач о животных на астрономических олимпиадах. Ведь полярник попутно изучал вопрос задачи «Звёздный Мир» №340 (Олимпиада ННЦ 1989 года), проверял, сколь раз на самом деле могут любоваться полной луной белые медведи. А этнограф смотрел за правильностью расстановки по экватору жирафов и сусликов (задача Олимпиады ННЦ 2003 года).

Примечание 3. Вообще, хочется, наверно, узнать не только разницу прихода внуков, но и насколько один пришёл раньше Нового Года, и насколько второй опоздал. Точный расчёт говорит, что разница ускорений между экватором и Курском составляет 62% от общей разницы, а разница между Курском и полюсом – 38% . Поэтому полярник пришёл домой на 83 часа раньше Нового года, а этнограф опоздал на 14 часов.

Примечание 4. М-да... Ну с полярником понятно, у них там то полярный день, то полярная ночь, за временем особо не нужно следить. Но этнограф... У него же часы больше, чем на час в месяц отставали, то есть, по его часам и восходы, и заходы солнца каждые 26 дней происходили на час раньше! В результате, в начале июня солнце всходило "в полночь", а заходило - "в полдень". А к концу декабря - удивительно, но солнце всходило уже в 16 часов, а заходило в 4 утра! "Вот какие чудеса творятся в Африке, ни за что не поверите", - спешил поведать этнограф бабушке и брату о своих открытиях.

5. Астероид. (Н.И.Перов, февраль 2003, редакция – М.Г.Гаврилов, март 2003).

При равенстве потоков энергии, поглощённой от Солнца и излученной астероидом (как абсолютно чёрным телом):

$$Q_{\text{погл}} \sim Q_{\text{излуч}}$$

При этом, $Q_{\text{погл}} \sim r^{-2}$, а $Q_{\text{излуч}} \sim T^4$. Здесь r – гелиоцентрическое расстояние астероида, T – его температура (абсолютная, в Кельвинах). Из этих соотношений следует, что $T \sim r^{-1/2}$. Для перигелия $R_p = a(1-e)$, а для афелия $R_a = a(1+e)$, где a – большая полуось орбиты астероида, e – её эксцентриситет.

По закону Вина

$$\lambda_a / \lambda_p = T_p / T_a.$$

Из приведенных соотношений вытекает, что

$$(\lambda_a / \lambda_p)^2 = (1+e)/(1-e).$$

X Российская олимпиада школьников по астрономии и физике космоса

Отсюда эксцентриситет равен

$$e = \frac{(\lambda_a / \lambda_n)^2 - 1}{(\lambda_a / \lambda_n)^2 + 1}$$

При $\lambda_a / \lambda_n = 3$, получаем

$$e = 0,8.$$

6. Похищение Луны. (Е.С.Божурова, М.Г.Гаврилов, февраль 2003, редакция – март 2003).

Вначале качественно поймём, увеличится или уменьшится большая полуось орбиты Земли и, соответственно, период её обращения вокруг Солнца. См. решение для 10 класса.

Для решения задачи количественно, кажется, что потребуется использовать довольно много величин, которые надо взять из таблицы Солнечной системы, а потом – много вычислять, используя эти данные. Однако, достаточно взять лишь три величины отношений, рекомендованные в условии, а именно, a , p и Y , чтобы получить относительные изменения для большой полуоси орбиты Земли и периода её обращения.

Обозначения:

$R_{зл}$ – среднее расстояние от Земли до Луны;

$R_0 = 149\,597\,870$ км – среднее расстояние от центра масс системы Земля-Луна до Солнца;

$a = R_{зл} / R_0 = 0,00257$ – отношение этих расстояний;

$p = M_{л} / M_{з} = 0,0123$ – отношение масс Луны и Земли;

$T_{л}$ – период обращения Луны вокруг Земли;

$T_0 = 365,256$ сут – период обращения системы Земля-Луна вокруг Солнца (звёздный год)

$Y = T_{л} / T_0 = 0,0748$ – отношение этих периодов;

V_0 – средняя орбитальная скорость системы Земля-Луна вокруг Солнца;

$V_{л}$ – орбитальная скорость Луны вокруг Земли;

G – гравитационная постоянная;

M_0 – масса Солнца;

$GM_0 = V_0^2 R_0$.

Произведём некоторые вычисления:

Поскольку $V_0 = 2\pi R_0 / T_0$ и $V_{л} = 2\pi R_{зл} / T_{л}$, получаем $V_{л} / V_0 = a / Y$, или

$$V_{л} = V_0 \cdot a / Y;$$

$V_{зл} = V_{л} p = V_0 (ap/Y)$ – скорость Земли относительно центра масс системы Земля-Луна;

$V_{зс} = V_0 - V_{зл} = V_0 \cdot (1 - ap/Y)$ – скорость Земли относительно Солнца в момент лунного затмения;

$R_{зс} = R_0 - pR_{зл} = R_0 \cdot (1 - ap)$ – расстояние от Земли до Солнца в тот же момент.

В тот момент, когда змей похищает Луну, полная удельная энергия Земли становится равной

$$E_3 = V_{зс}^2 / 2 - GM_0 / R_{зс}$$

С другой стороны, для любого тела, обращающегося по эллиптической орбите (независимо от величины эксцентриситета), полная удельная энергия (то есть, энергия на единицу массы) определяется формулой

$$E = V_r^2 / 2 - GM_0 / r_1 = -GM_0 / 2r_1;$$

где r_1 – большая полуось орбиты (в данном случае – новой орбиты Земли, после того, как змей исчезает с Луной), $V_r = (GM_0 / r_1)^{1/2}$ – круговая скорость для движения по орбитам с большой полуосью r_1 . Приравняв энергии E_3 и E , получаем:

$$V_{зс}^2 / 2 - GM_0 / R_{зс} = -GM_0 / 2r_1, \text{ откуда}$$

$$1/r_1 = 2/R_{зс} - V_{зс}^2 / GM_0.$$

Х Российская олимпиада школьников по астрономии и физике космоса

$$r_1 = 1 / (2/R_{зс} - V_{зс}^2 / V_o^2 R_o) = R_o / (2R_o / R_{зс} - V_{зс}^2 / V_o^2) = R_o / (2/(1 - ap) - (1-ap/Y)^2) = \\ = R_o / (2(1 + ap) / (1 - a^2p^2) - 1 + 2ap/Y - a^2p^2/Y^2)$$

Учитывая, что соотношения радиусов орбит и масс – параметры a и p , а также параметр ap/y – малы, пренебрегая вторыми порядками этих величин по сравнению с первыми, получаем:

$$r_1 = R_o / (2(1 + ap) - 1 + 2ap/y) = R_o / (1 - 2ap - 2ap/y) = R_o / (1 + 2ap(1 + 1/y))$$

Таким образом, большая полуось новой орбиты Земли будет равна:

$$r_1 = 0,99909 \text{ а.е.} = 149,46 \text{ млн.км.}$$

Новый орбитальный период Земли:

$$T_1 = 2\pi \cdot (r_1^3 / GM_o)^{1/2} = 364,76 \text{ суток.}$$

Таким образом, дракон съест не только Луну, но и полдня в году!

Кстати, возвращаясь к качественному решению. Величина $2ap$ в окончательном ответе связана с уменьшением расстояния до Солнца, а величина $2ap/y$ – с уменьшением скорости относительно Солнца.