Теоретический тур, решения задач

10 класс.

1. Шаровое скопление. ***(О.С. Угольников, 2004.)***

Возраст шарового скопления очень велик, он сопоставим с возрастом нашей Галактики. За это время шаровое скопление не распалось, значит, составляющие его звёзды гравитационно связаны. Характерная скорость звезды, находящейся вблизи края скопления, должна быть порядка первой космической скорости. Среднюю массу звёзд скопления примем равной массе Солнца, то есть масса скопления – 10^6 $M_\odot$ или $2\cdot10^{36}$ кг, радиус равен 30 пк или $9{,}3\cdot10^{17}$ м. Первая космическая скорость равна

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \approx 1{,}2\cdot10^4\, м/с$$

или 12 км/с.

2. Новолуния. ***(А.В. Засов, 2004.)***

Ответ: одно. Новолуние будет наблюдаться, когда Луна окажется между наблюдателем и Солнцем. Ее положение относительно Земли при этом не играет роли.

3. Кинетическая энергия. ***(А.В. Засов, 2004.)***

Пусть M и m – массы Солнца и Земли, R и r – радиусы их орбит вокруг общего центра масс, а V и v –скорости их движения по орбитам (соответственно). Центр масс находится на прямой, соединяющей центры Земли и Солнца, поэтому периоды обращения Земли и Солнца равны: $T = 2\pi R/V = 2\pi r/v$. Отношение расстояний этих тел от центра масс $R/r = m/M$. Отсюда следует, что $V/v = m/M$. Тогда для отношения кинетических энергий орбитального движения Земли и Солнца можно записать: $E_з/E_с = mv^2/MV^2 = M/m$.

Ответ: у Земли, в 300 тысяч раз.

4. Период обращения планеты ***(В.В. Порфирьев, 2004, обработка и дополнение – М.Г. Гаврилов, 2004)***

Если на планете тот же климат, что и Земле, то поток энергии падающей на нее совпадает с потоком энергии, падающим на Землю:

$$\frac{4\pi R_Q^2 T_Q^4}{a_i^2} = \frac{4\pi R^2 T^4}{a^2}$$

где a_i и a – расстояния от Земли до Солнцаи от планеты до звезды соответственно. Полагая $a_i = 1$, получим (в астрономических единицах):

$$a = \sqrt{\left(\frac{R}{R_Q}\right)^2\left(\frac{T}{T_Q}\right)^4} = \frac{R}{R_Q}\left(\frac{T}{T_Q}\right)^2 \approx 9.35\ \text{а.е.}$$

Период обращения планеты определяем по обобщенному III закону Кеплера. Если t брать в годах, a – в астрономических единицах, M – в массах Солнца, то:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{M}} \approx 24{,}2\ \text{года}$$

Примечание: справедливости ради надо отметить, что в данном решении для того, чтобы климат на планете был такой же, как на Земле, необходимо, необходимо, чтобы и альбедо Земли и планеты были одинаковы.

5. Звездная величина Луны. ***(М.Г. Гаврилов, 2004).***

Для сравнения нужно рассмотреть два крайних случая. Наибольший блеск (наименьшую звездную величину) Луна будет иметь в том случае, когда она находится в перигее своей орбиты, а Земля в перигелии. Наименьший блеск – наоборот, когда она в апогее, а Земля – в афелии. Сравним эти два случая.

В первом случае, падающий на Луну поток солнечного света пропорционален $1/(a(1-e))^2$, во втором – ~ $1/(a(1+e))^2$, где a – среднее расстояние от Солнца до Луны, e –эксцентриситет Земной орбиты (расстоянием Земля-Луна пренебрегаем по сравнению с расстоянием Солнце-Земля).

Кроме того, для первого случая уже идущий от Луны поток света к земному наблюдателю пропорционален $1/(a(1-e_R))^2$, для второго – ~ $1/(a(1+e_R))^2$, где r – среднее расстояние от Земли до Луны, e_R – эксцентриситет орбиты Луны (а здесь мы пренебрегаем размерами Земли и Луны по сравнению с расстоянием Земля-Луна).

Таким образом, в первом случае поток света к земному наблюдателю пропорционален $1/(r(1-e_R)\cdot a(1-e))^2$, во втором – ~ $1/(r(1+e_R)\cdot a(1+e))^2$. Их отношение даёт

$$\left(\frac{1+e_R}{1-e_R}\right)^2 \times \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2;$$

$$\Delta m = 2{,}5\lg\left[\left(\frac{1+e_R}{1-e_R}\right)^2 \times \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2\right] = 5\lg\frac{1+e_R}{1-e_R} + 5\lg\frac{1+e}{1-e}.$$

Подстановка численных данных даёт:

$$\Delta m = 0{,}239 + 0{,}074 \approx 0.31$$

Как видим, второй член (возникающий из-за эксцентриситета земной орбиты) мал, но, всё же, существенен.

6. Приливная гравитация. ***(М.Г. Гаврилов, 1999)***

Первая и главная часть решения задачи фактически представляет собой вывод формулы для приливных сил. Центр аппарата обращается вокруг чёрной дыры по круговой траектории с угловой скоростью ω, определяемой из условия нахождения на орбите:

$$\omega^2 R = \frac{GM}{R^2},$$

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3},$$

Точки A и B обращаются с этой же угловой скоростью, но силы притяжения со стороны чёрной дыры, действующие на тела в этих точках, иные:

$$\frac{GM}{(R-L/2)^2} \text{ и } \frac{GM}{(R+L/2)^2} \text{ соответственно.}$$

В результате в точке A тела будут как бы испытывать искусственное тяготение (ускорение силы тяжести), направленное по направлению к чёрной дыре и равное

$$g_{иск} = \frac{GM}{(R-L/2)^2} - \omega^2(R-L/2),$$

а в точке B – искусственное тяготение, направленное по направлению от чёрной дыры и равное

$$g_{иск} = \omega^2(R+L/2) - \frac{GM}{(R+L/2)^2}.$$

Подставляя значение ω^2, получаем для первого случая:

$$g_{иск} = GM\left(\frac{1}{(R-L/2)^2} - \frac{R-L/2}{R^3}\right),$$

$$g_{иск} = GM\frac{R^3-(R-L/2)^3}{R^3(R-L/2)^2} = GM\frac{\left(R^3-R^3+3R^2\,L/2+3R(L/2)^2-(L/2)^3\right)}{R^3(R-L/2)^2} \approx GM\frac{3R^2L}{2R^5} \approx \frac{3}{2}GM\frac{L}{R^3}.$$

Аналогично для второго случая получаем эту же величину (только направление её, напомним, от чёрной дыры).

Таким образом, ответ будет одинаковым для пунктов а) и б) задачи. Учитывая, что нам необходимо $g_{\textbf{иск}} = g_{\textbf{земн}}$ = 9,81 м/с^2, получаем

$$R^3 = \frac{3}{2} GM \frac{L}{g},$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{2} GM \frac{L}{g}} \approx 1{,}83 \cdot 10^7\,м = 18{,}3\,тыс.км\,.$$