Теоретический тур, решения задач

11 класс.

1. **Созвездия в Подмосковье** ***(Н.Е. Шатовская, обработка и дополнения – О.С. Угольников, 2004.)***

   На нашем небе нельзя одновременно увидеть созвездия Ворона и Рыб. Их прямые восхождения отличаются на 12 часов, при этом Рыбы находятся вблизи небесного экватора, а Ворон – южнее его. Поэтому он восходит после захода Рыб, а заходит – до их восхода, независимо от сезона года. Но вот пять из шести перечисленных созвездий, все, кроме Рыб, можно увидеть на небе весенними ночами.

2. **Прохождение Луны** ***(А.В. Засов, 2004, обработка – М.Г. Гаврилов, 2004).***

   Максимальное расстояние, на которое Луна «приподнимается» над плоскостью земной орбиты, равно h=R×sin i. Значения R = 384 тыс. км и i = 5,15° берем из таблицы Солнечной Системы.

   h = L × sin i = 384 тыс. км × sin 5,15° ≈ 34,5 тыс. км.

   В проекции на диск Солнца это расстояние составит

   2h / D = 2L × sin i/D = 2 × 34,5 тыс. км / 1392 тыс. км ≈ 0,050

   Или примерно 1/20 долю диаметра Солнца.

3. **Точка Лагранжа** ***(Е.Б. Постников, дополнения - А.В. Засов, М.Г. Гаврилов, О.С. Угольников)***

   По описанию, корабль находится в той точке либрации, которая располагается на прямой, соединяющей Юпитер и Ио и находится между ними. Так как масса Юпитера M и Ио μ много больше массы корабля m, то вращение этой прямой в пространстве определяется вращением Ио вокруг Юпитера с угловой скоростью ω.

   Эта угловая скорость определяется равенством $\frac{GM}{L^2} = \omega^2 L$, откуда $\omega^2 = \frac{GM}{L^3}$.

   Обозначим через ΔL расстояние от корабля до Ио. Корабль находится в равновесии под действием противоположно направленных сил притяжения со стороны Юпитера $GMm/(L-\Delta L)^2$ и Ио $G\mu m/(\Delta L)^2$, которые сообщают ему центростремительное ускорение $a = \omega^2(L-\Delta L)$. По второму закону Ньютона:

$$\frac{GMm}{(L-\Delta L)^2} - \frac{G\mu m}{\Delta L^2} = m\omega^2(L-\Delta L);$$

$$\frac{GM}{(L-\Delta L)^2} - \frac{G\mu}{\Delta L^2} = \omega^2(L-\Delta L);$$

$$\frac{GM}{L^2\left(1-\frac{\Delta L}{L}\right)^2} - \frac{G\mu}{\Delta L^2} = \omega^2(L-\Delta L)$$

   Так как μ << M, то точка либрации находится гораздо ближе к Ио, чем к центру Юпитера, то есть $\frac{\Delta L}{L} << 1$ и $\frac{1}{\left(1-\frac{\Delta L}{L}\right)^2} \approx 1 + 2\frac{\Delta L}{L}$,

$$\frac{GM\left(1+2\frac{\Delta L}{L}\right)}{L^2} - \frac{G\mu}{\Delta L^2} = \omega^2(L-\Delta L).$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$\frac{GM}{L^2}+\frac{2GM\Delta L}{L^3}-\frac{G\mu}{\Delta L^2}=\omega^2 L-\omega^2\Delta L .$$

Учитывая, что $\omega^2 = GM/L^3$ и сокращая соответствующие слагаемые, получаем:

$$\frac{2GM\Delta L}{L^3}-\frac{G\mu}{\Delta L^2}=\frac{GM\Delta L}{L^3} .$$

Окончательный ответ: $\Delta L = L\sqrt[3]{\frac{\mu}{3M}}$.

Подставим числа: ΔL = 422 тыс. км $\times$ (89,4·10^{21} кг / 3·1,90·10^{27}кг)$^{1/3}$ = 10,6 тыс. км. Таким образом, у Артура Кларка приведено абсолютно правильное положение точки Лагранжа.

Теперь ответим на вопрос о видимых радиусах Юпитера и Ио.

Обозначим радиусы Юпитера и Ио, соответственно, как R и r, их видимые угловые радиусы – как P и p, а плотности – как ρ_1 и ρ_2. Учитывая, что

$$M=\frac{4}{3}\pi\rho_1 R^3 ,\ \ \mu=\frac{4}{3}\pi\rho_2 r^3 ,$$

получаем, что

$$P=\frac{R}{L-\Delta L}=\frac{3M}{4\pi\rho_1\left(L-\Delta L\right)},$$

$$p=\frac{r}{\Delta L}=\frac{3\mu}{4\pi\rho_2\Delta L} .$$

Откуда

$$\frac{p}{P}=\frac{L-\Delta L}{\Delta L}\times\sqrt[3]{\frac{\mu}{\mathrm{M}}}\times\sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}=\left(\sqrt[3]{\frac{3M}{\mu}}-1\right)\times\sqrt[3]{\frac{\mu}{\mathrm{M}}}\times\sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}=\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{\frac{\mu}{M}}\right)\times\sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}} .$$

Подставим значения μ, M, ρ_1 и ρ_2, взяв их из таблицы Солнечной системы. Благодаря тому, что средняя плотность Ио как раз примерно втрое больше, чем у Юпитера (3,55 против 1,33 г/см^3) получается, что видимый радиус Ио будет всего лишь в 1,014 раза больше. Разницу в 1,4 % обычный наблюдатель не замечает (тем более, в противоположных точках горизонта). То есть, Юпитер и Ио действительно выглядят одинаковыми из этой точки.

Примечание: Кстати, заметим интересный факт. Соотношение видимых из точки Лагранжа угловых размеров планеты и спутника определяется, главным образом, соотношением их плотностей. А если масса спутника пренебрежимо мала по сравнению с массой планеты, что имеет место и в нашем случае (μ << M: μ/M ≈ 1/20000), то исключительно соотношением их плотностей.

Если в последней формуле сделать приближение, учтя, что μ << M, получим:

$$\frac{p}{P}\approx\sqrt[3]{\frac{3\rho_1}{\rho_2}} .$$

В таком приближении видимый радиус Ио будет всего в (3,99/3,55)$^{1/3}$ ≈ 1,04 раза больше. Разница в 4 % – тоже небольшая. Обычный наблюдатель о в противоположных точках горизонта её также не замечает.

4. Период обращения планеты ***(В.В. Порфирьев, 2004, обработка и дополнение – М.Г. Гаврилов, 2004)***

Если на планете тот же климат, что и Земле, то поток энергии падающей на нее совпадает с потоком энергии, падающим на Землю:

$$\frac{4\pi R_Q^2 T_Q^4}{a_;^2}=\frac{4\pi R^2 T^4}{a^2}$$

где a_i и а – расстояния от Земли до Солнцаи от планеты до звезды соответственно. Полагая a_i = 1, получим (в астрономических единицах):

$$a = \sqrt{\left(\frac{R}{R_Q}\right)^2 \left(\frac{T}{T_Q}\right)^4} = \frac{R}{R_Q}\left(\frac{T}{T_Q}\right)^2 \approx 9.35 \text{ а.е.}$$

Период обращения планеты определяем по обобщенному III закону Кеплера. Если t брать в годах, а – в астрономических единицах, M – в массах Солнца, то:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{M}} \approx 24{,}2 \text{ года}$$

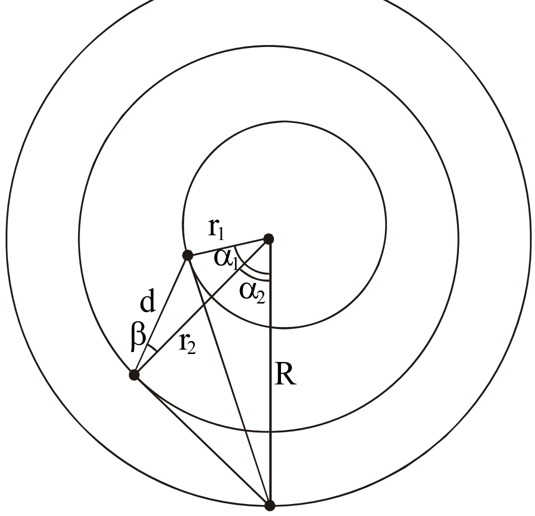
Примечание: справедливости ради надо отметить, что в данном решении для того, чтобы климат на планете был такой же, как на Земле, необходимо, необходимо, чтобы и альбедо Земли и планеты были одинаковы.

На второй вопрос задачи ответить труднее. Стадия красного гиганта в эволюции звезды следует после стадии главной последовательности. На главной последовательности светимость нашей звезды примерно в 3 раза меньше. Соответственно и поток энергии, падающий на планету во столько же раз меньше. Температура (абсолютная) пропорциональна корню четвертой степени из потока излучения, то есть меньше в 1,3 раза. Если считать, что на Земле средняя температура 287 К, то на нашей планете , когда звезда проходит на стадию главной последовательности, температура была равной 218 К или –55 С. При такой температуре планета покрыта льдом и появление жизни на ней представляется мало вероятной.

С другой стороны, парниковый эффект может значительно поднять температуру на поверхности планеты. В этом случае, вероятность появления жизни становится достаточно большой. То есть, ответ на второй вопрос задачи зависит от химического состава атмосферы планеты. Второй вариант ответа (жизнь на планете возможна) представляется более вероятным.

5. Меркурий и Венера. ***(Н.Е. Шатовская, обработка и дополнения – О.С. Угольников, М.Г. Гаврилов, 2004.)***

Орбита Венеры практически круглая, и ее наибольшая элонгация наступает, когда угол с вершиной в Венере между направлениями на Солнце и Землю составляет 90°. Для Меркурия, чья орбита сильно вытянута, такое выполняется, только если наибольшая элонгация наступает вблизи его перигелия или афелия. Именно первый из этих двух случаев реализуется 29 марта 2004 года. Точные расстояния Меркурия и Венеры от Солнца можно вычислить, зная их угловые расстояния от Солнца (расстояние Земли от Солнца в этот день очень близко к 1 а.е.):



r_1 = R · sin 19° = 0.326 а.е.,

r_2 = R · sin 46° = 0.719 а.е.

Разности гелиоцентрических долгот Земли и Меркурия (Венеры) $\alpha_{1,2}$ вычисляются в данном случае очень просто:

α_1 = 90° – 19° = 71°

α_2 = 90° – 46° = 44°

Расстояние между Меркурием и Венерой:

$$d = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2))^{1/2} = 0.453 \text{ а.е.}$$

Косинус угла β с вершиной в Венере между направлениями на Солнце и Меркурий равен

$$\cos\beta = ((r_2^2 + d^2 - r_1^2)/(2*r_2*d)) = 0.945.$$

Фаза Венеры, видимая с Меркурия, равна Ф = (1 + cos β)/2 = 0.973.

6. Приливная гравитация. ***(М.Г. Гаврилов, 1999)***

Первая и главная часть решения задачи фактически представляет собой вывод формулы для приливных сил. Центр аппарата обращается вокруг чёрной дыры по круговой траектории с угловой скоростью ω, определяемой из условия нахождения на орбите:

$$\omega^2 R = \frac{GM}{R^2},$$

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3},$$

Точки A и B обращаются с этой же угловой скоростью, но силы притяжения со стороны чёрной дыры, действующие на тела в этих точках, иные:

$$\frac{GM}{(R-L/2)^2} \text{ и } \frac{GM}{(R+L/2)^2} \text{ соответственно.}$$

В результате в точке A тела будут как бы испытывать искусственное тяготение (ускорение силы тяжести), направленное по направлению к чёрной дыре и равное

$$g_{иск} = \frac{GM}{(R-L/2)^2} - \omega^2(R-L/2),$$

а в точке B – искусственное тяготение, направленное по направлению от чёрной дыры и равное

$$g_{иск} = \omega^2(R+L/2) - \frac{GM}{(R+L/2)^2}.$$

Подставляя значение ω^2, получаем для первого случая:

$$g_{иск} = GM\left(\frac{1}{(R-L/2)^2} - \frac{R-L/2}{R^3}\right),$$

$$g_{иск} = GM\,\frac{R^3-(R-L/2)^3}{R^3(R-L/2)^2} = GM\,\frac{\left(R^3-R^3+3R^2\,L/2+3R(L/2)^2-(L/2)^3\right)}{R^3(R-L/2)^2} \approx GM\,\frac{3R^2L}{2R^5} \approx \frac{3}{2}GM\,\frac{L}{R^3}.$$

Аналогично для второго случая получаем эту же величину (только направление её, напомним, от чёрной дыры).

Таким образом, ответ будет одинаковым для пунктов а) и б) задачи. Учитывая, что нам необходимо $g_{иск} = g_{земн} = 9{,}81$ м/с^2, получаем

$$R^3 = \frac{3}{2}GM\,\frac{L}{g},$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{2}GM\,\frac{L}{g}} \approx 1{,}83\cdot 10^7\,м = 18{,}3\,тыс.км.$$