11 класс

1. Спутать фонарь со звездой можно, если по яркости фонарь не превзойдет самые яркие из звезд. Оценим, на каком расстоянии от наблюдателя фонарь будет выглядеть как звезда 0^m. Для этого сравним его с Солнцем, имеющим звездную величину -26.8^m. Как известно, на площадку площадью 1м^2, перпендикулярную направлению на Солнце за одну секунду попадает 1360 Дж солнечной энергии (эта величина известна как солнечная постоянная, обозначим ее J_0). Количество энергии, попадающей ежесекундно на ту же площадку от фонаря, равно

$$J = J_0 \cdot 10^{-0.4\cdot 26.8} = 2.59\cdot 10^{-8}\ \text{Дж/с}\cdot\text{м}^2.$$

Примем мощность фонаря P равной 300 Вт. Последние две величины связаны соотношением

$$J = \frac{P}{4\pi R^2},$$

где R – расстояние от фонаря для наблюдателя (поглощением света в атмосфере пренебрегаем). Подставляя численные данные, получаем, что это расстояние равно 30 км. Это больше, чем радиус видимости в обычной равнинной местности. Поэтому все видимые нами уличные фонари на равнине выглядят ярче звезд. Увидеть столь далекий фонарь и спутать его со звездой можно лишь в горах.

2. Расстояние между двумя звездами в тесной паре определяется из обобщенного III закона Кеплера:

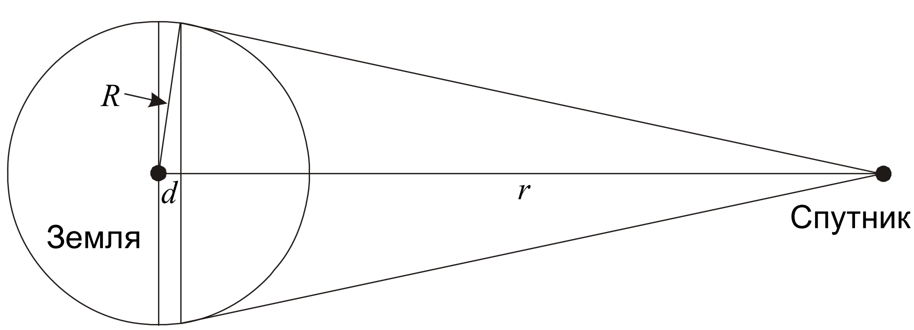
$$a = \left(\frac{G\cdot 2MT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

и составляет 0.21 а.е. Здесь M – масса Солнца, T – период обращения звезд. Третья звезда обращается на расстоянии b = 21 а.е. от данной пары. Период ее обращения можно также найти по III закону Кеплера, однако при этом нужно учесть, что суммарная масса системы составляет уже 3 массы Солнца:

$$t = \left(\frac{4\pi^2 b^3}{G\cdot 3M}\right)^{1/2}.$$

Период получается равным 55.9 лет. Система устойчива, так как разность гравитационных ускорений, придаваемых третьей звездой двум первым звездам, значительно меньше ускорения взаимодействия этих двух звезд.

3. Определим вначале, какую часть поверхности Земли можно увидеть со спутника, находящегося на расстоянии r от ее центра, существенно превышающим радиус Земли (см. рисунок).



Мы видим, что со спутника будет видно меньше половины поверхности Земли. Кроме задней полусферы, в область невидимости попадет узкая полоса вокруг лимба, которую мы можем считать цилиндрической с радиусом, равным радиусу Земли R и шириной d. Из подобия прямоугольных треугольников мы можем записать:

$$\frac{d}{R} = \frac{R}{r}.$$

Доля площади поверхности Земли, видимая со спутника, составит

$$S = \frac{2\pi R^2 - 2\pi Rd}{4\pi R^2} = \frac{1-(R/r)}{2}.$$

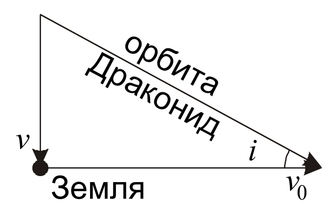
В условии задачи Земля наблюдается с двух спутников, находящихся в перигее и апогее общей орбиты с большой полуосью a и эксцентриситетом e. Области Земли, видимые с этих спутников, не перекрываются, и общая часть поверхности Земли, видимой со спутников, равна сумме частей, видимых с каждого из них. Таким образом,

$$S = \frac{1-\dfrac{R}{a(1+e)}}{2} + \frac{1-\dfrac{R}{a(1-e)}}{2} = 1 - \frac{R}{a}\cdot\frac{1}{1-e^2}.$$

4. Данная в условии задачи скорость Драконид u – это скорость их влета в атмосферу Земли. До сближения с Землей и ускорения в ее поле тяготения скорость метеоров можно определить по закону сохранения энергии:

$$v = \sqrt{u^2 - v_2^2}.$$

Здесь v_2 – вторая космическая скорость для Земли (11.2 км/с). В итоге, геоцентрическая скорость Драконид до сближения с Землей составляет 16.6 км/с и направлена перпендикулярно плоскости орбиты Земли. В свою очередь Земля движется по орбите вокруг Солнца со скоростью v_0, равной 29.8 км/с.



Как видно из рисунка, угол наклона орбиты метеоров равен

$$i = \operatorname{arctg}\frac{v}{v_0} = 29^\circ.$$

5. Пусть в некоторый момент, через время t_0 после старта корабля с Земли отправляется один из импульсов на космический корабль. В системе отсчета, связанной с Землей, этот импульс будет принят на корабле в момент времени

$$t_1 = t_0 + \frac{v\cdot t_0}{c-v} = t_0\cdot\left(1+\frac{v}{c-v}\right) \approx t_0\cdot\left(1+\frac{v}{c}\right),$$

где v – скорость корабля, значительно меньшая скорости света. Ответный импульс будет послан через время τ после приема. Расстояние корабля от Земли в это время составит

$$L = v \cdot (t_1 + \tau) = v t_0 \,(1 + \frac{v}{c}) + v\tau.$$

Ответный импульс будет принят на Земле в момент

$$t_2 = t_1 + \tau + \frac{L}{c} \approx t_0 + 2t_0 \frac{v}{c} + \tau\,(1 + \frac{v}{c}).$$

Следующий импульс будет отправлен в момент времени t_0+Δt_0, а принят в момент t_2+Δt_2. Из последней формулы можно получить

$$\Delta t_2 = \Delta t_0 (1 + \frac{2v}{c}).$$

Подставляя численные значения, получаем, что интервал приема импульсов составит 1020 секунд.

6. По закону Стефана-Больцмана светимость звезды пропорциональна $R^2 T^4$, где R и T – ее радиус и температура. Равенство светимостей при температурах, отличных в два раза, означает, что более холодная звезда имеет радиус, в 4 раза больший, чем у горячей звезды. А при равенстве масс это означает, что плотность более холодной звезды в 64 раза меньше, чем у горячей звезды.