Кульминации звезд (Е.Н. Фадеев)

Класс: 9 10 Задача: 1

? Склонение звезды А больше склонения звезды В в два раза. На какой широте верхняя кульминация этих звезд будет происходить на одном альмукантарате, если нижняя кульминация звезды А происходит на горизонте? Рефракцией пренебречь. Наблюдения проводятся в северном полушарии вдали от полюса.

! Пусть δ_A – склонение звезды **А**, а δ_B – склонение звезды **В**, причем $\delta_A=2\delta_B$. Наблюдения проводятся не в полюсе, поэтому склонение звезды **А** не равно нулю. Следовательно, склонения обеих звезд различаются. Очевидно, что для выполнения условия задачи необходимо, чтобы кульминация звезды **А** с большим склонением проходила к северу от зенита, а кульминация звезды **В** – к югу от зенита. Обозначив широту места через φ, а зенитное расстояние звезд **А** и **В** в верхней кульминации через z, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\varphi + z_A = \delta_A \\ \varphi - z_B = \delta_B\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\varphi + z = 2\delta_B \\ \varphi - z = \delta_B\end{cases}$$

Складывая уравнения, получаем:

$$2\varphi = 3\delta_B.$$

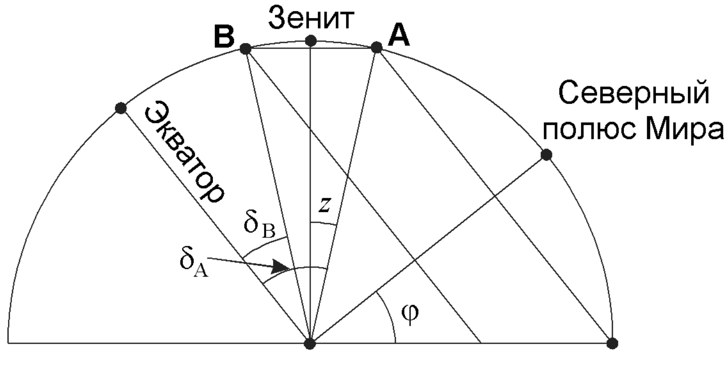
Из условия, что нижняя кульминация звезды **А** происходит на горизонте, имеем:

$$2\delta_B + \varphi = 90°.$$

В результате:

$$\frac{4}{3}\varphi + \varphi = 90°.$$

Широта φ составляет 38.6°.



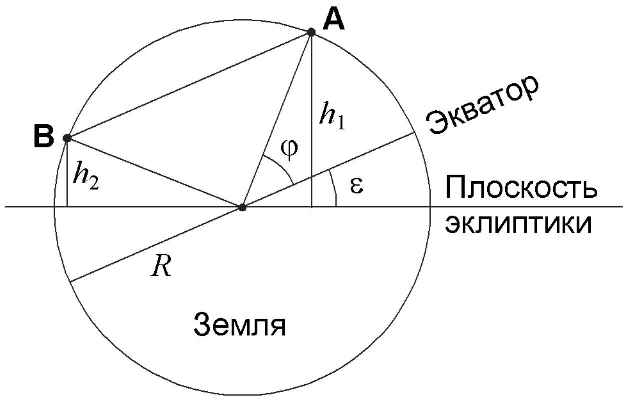
Плоскость эклиптики (О.С. Угольников)

Класс: 9 Задача: 2

? **Определите максимальное и минимальное расстояние (в км) города Анапа (широта +45°) от плоскости эклиптики.**

! На рисунке показано положение Земли относительно плоскости эклиптики. Плоскость земного экватора наклонена к плоскости эклиптики на угол ε, равный 23.4°. Пункт проведения олимпиады, город Анапа, имеет широту φ, составляющую 45°. За счет осевого вращения Земли положение Анапы относительно плоскости эклиптики перемещается вдоль параллели с указанной широтой, которая показана на рисунке в виде отрезка **AB**.

Находясь севернее тропической зоны, Анапа не пересекает плоскость эклиптики, оставаясь всегда севернее нее. Из рисунка видно, что максимальное расстояние пункта проведения олимпиады достигается в точке **A**, минимальное – в точке **B**. Обозначая радиус Земли через *R*, получаем значения этих расстояний:



$$h_1 = R \cdot \sin(\varphi + \varepsilon) = 5920 \text{ км};$$

$$h_2 = R \cdot \sin(\varphi - \varepsilon) = 2345 \text{ км}.$$

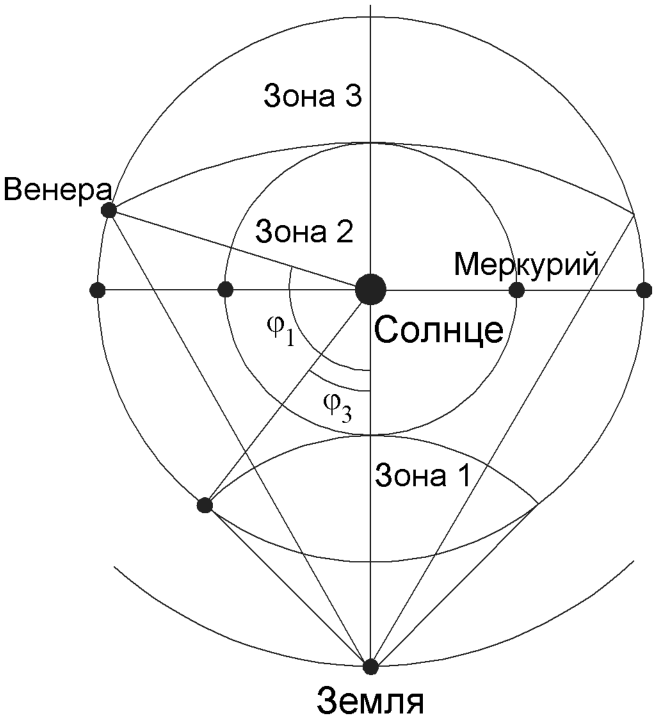
Близкая планета (М.Е. Прохоров)

Класс: 9 10 11 Задача: 3

? **Какая из внутренних планет большую часть времени является ближайшей к Земле? Считать орбиты планет круговыми, лежащими в одной плоскости.**

! Перед тем, как произвести точное решение, приведем некоторые предварительные рассуждения, которые могут достаточно легко привести к правильному ответу, но без строгого доказательства.

Изобразим на рисунке внутреннюю часть Солнечной системы с орбитами первых трех планет. Для удобства перейдем в систему отсчета, вращающуюся вокруг Солнца вместе с Землей, так что сама Земля в ней оказывается неподвижной.



Проведем через центр Солнца линию, перпендикулярную направлению на Землю. Она разделит все орбиты на две половины – более удаленную и менее удаленную от Земли. Назовем расстояние до планеты, когда она находится на этой линии, медианным. Очевидно, что для каждой планеты это расстояние ровно половину времени будет больше медианного, а половину времени – меньше медианного. Само медианное расстояние легко вычислить из теоремы Пифагора, учитывая, что по условию задачи все орбиты круговые.

Медианное расстояние Меркурия меньше медианного расстояния Венеры. Большую часть времени Меркурий оказывается ближе медианного положения Венеры, а значит, с вероятностью более 50% в это время он будет ближе к Земле, чем Венера. Это дает основания предположить, что именно Меркурий чаще всего оказывается самой близкой к Земле планетой. Теперь перейдем к более строгому доказательству этого факта.

Минимальное и максимальное расстояние от i-й внутренней планеты до Земли будет составлять

$$R_{i,\min} = R_0 - a_i, \quad R_{i,\max} = R_0 + a_i ,$$

где R_0 – радиус земной орбиты, a_i – радиус орбиты планеты. Расстояние от Земли до i-й планеты R_i выражается по теореме косинусов:

$$R_i^2 = R_0^2 + a_i^2 - 2R_0 a_i \cos\varphi = A_i - B_i \cos\varphi,$$

здесь φ – разность гелиоцентрических долгот Земли и планеты. Как видно из формулы, вместо расстояния до планет удобнее оперировать с их квадратами. Рассмотрим различные интервалы возможных значений величины R^2. На расстоянии $R^2<0.08$ планет быть не может. В интервале $0.08<R^2<0.37$ может быть только Венера, эта зона помечена на рисунке номером 1. В интервале $0.37<R^2<1.93$ могут быть обе планеты (зона 2). В интервале $1.93<R^2<2.96$ также может быть только Венера (зона 3), еще большие значения R^2 внутренними планетами не достигаются.

Рассмотрим, какую часть времени планета Венера проводит в каждом из трех интервалов. Чтобы Венера оказалась в зоне 1 и была гарантированно ближе Меркурия, разница гелиоцентрических долгот Венеры и Земли по модулю должна быть не больше

$$\varphi_1 = \arccos\frac{R_0^2 + a_2^2 - R_{1,\min}^2}{2R_0a_2} = \arccos\frac{a_2^2 - a_1^2 + 2R_0a_1}{2R_0a_2} = 37.5^\circ.$$

Зона 1 охватывает две таких дуги на орбите Венеры. Деля последнюю величину на 180°, получаем, что Венера проводит в первой зоне 21% времени. Чтобы Венера оказалась в зоне 3 и была гарантированно дальше Меркурия, разница долгот по модулю должна быть не меньше

$$\varphi_3 = \arccos\frac{R_0^2 + a_2^2 - R_{1,\max}^2}{2R_0a_2} = \arccos\frac{a_2^2 - a_1^2 - 2R_0a_1}{2R_0a_2} = 106.1^\circ.$$

Зона 3 вырезает на орбите Венеры 2 симметричные дуги длиной 73.9° каждая, и Венера находится там 41% времени. Оставшиеся 38% времени Венера располагается в зоне 2, в которой всегда находится и Меркурий.

Для решения задачи мы вполне можем предполагать, что из 38% времени, которые Венера располагается в зоне 2, она с равной вероятностью будет ближе или дальше Меркурия. Тогда мы получаем, что Венера находится ближе Меркурия 21% времени, соответствующие зоне 1, а также 19% времени, соответствующие зоне 2. Суммируя эти величины, мы получаем, что лишь 40% времени Венера оказывается ближайшей к Земле внутренней планетой. В оставшихся 60% случаев это будет Меркурий, его и нужно указать в качестве ответа на задачу.

Докажем последнее утверждение еще более строго. Медианное расстояние Меркурия составляет 1.072 а.е, его квадрат R_{1m}^2 равен 1.15. Квадрат расстояния до Меркурия половину времени оказывается больше и половину времени – меньше этого значения. Разделим зону 2 на две части, назовем их ближней и дальней. Граница между ними соответствует модулю разницы гелиоцентрических долгот Венеры и Земли

$$\varphi_m = \arccos\frac{R_0^2 + a_2^2 - R_{1m}^2}{2R_0a_2} = 75.1^\circ.$$

Венера проводит в ближней части зоны 2 (угол φ от 37.5° до 75.1°) 21% времени, а в ее дальней части – 17% времени. В первом случае Венера либо однозначно ближе Меркурия (если последний находится позади медианной линии), либо ближе его с вероятностью около 0.5 (если Меркурий ближе медианной линии). Будем считать, что, находясь в ближней части зоны 2, Венера будет ближе Меркурия с вероятностью 0.75. Соответственно, в ее дальней части вероятность составит 0.25. Тогда общая вероятность для Венеры быть ближе к Земле, чем Меркурий, составит

$$0.21 + (0.21\cdot0.75) + (0.17\cdot0.25) = 0.41,$$

что несильно отличается от предшествующей приближенной оценки и меньше, чем соответствующая вероятность для Меркурия. Итак, Меркурий чаще оказывается ближайшей к Земле внутренней планетой (а также ближайшей планетой вообще), нежели Венера.

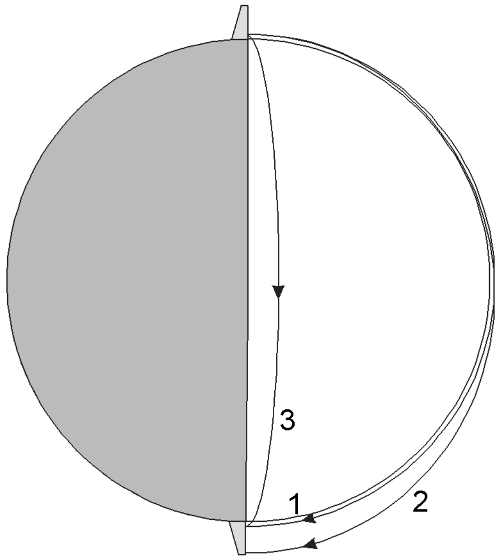
Космический футбол (О.С. Угольников)

Класс: 9 10 Задача: 4

? Половина сферической поверхности астероида с радиусом 1 км и плотностью 3 г/см³ оборудована под большое футбольное поле. Ворота шириной 7 м и высотой 3 м установлены на полюсах астероида. Мяч находится на линии одних ворот точно в ее середине. В каком интервале должны находиться направление и величина скорости, которые нужно задать мячу, чтобы после горизонтального удара он попал в противоположные ворота, не касаясь в полете поверхности астероида? Вращением астероида пренебречь.

! Определим вначале, в каком интервале должна заключаться скорость мяча после горизонтального удара, чтобы он попал в противоположные ворота. Так как мяч не должен касаться поверхности астероида, то он должен пролететь над астероидом по крайней мере половину оборота. А для этого его скорость должна быть не менее первой космической:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = R\sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}} = 0.9157 \text{ м/с}.$$



Здесь M, R и ρ — масса, радиус и плотность астероида. В этом случае мяч пролетит по траектории 1 на рисунке и попадет в нижнюю часть противоположных ворот. Максимальная скорость соответствует траектории 2, попадающей в верхнюю часть ворот. При этом орбита мяча будет эллиптической с расстоянием в перицентре R и расстоянием в апоцентре $(R+h)$, где h — высота ворот. Заметим, что значение h значительно меньше R. С учетом этого эксцентриситет орбиты и скорость в перигелии составят

$$e = \frac{(R+h)-R}{(R+h)+R} \approx \frac{h}{2R},$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{a}\cdot\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{GM}{R}(1+e)} \approx \sqrt{\frac{GM}{R}}(1+\frac{e}{2}) = v_1(1+\frac{h}{4R}) = 0.9163 \text{ м/с}.$$

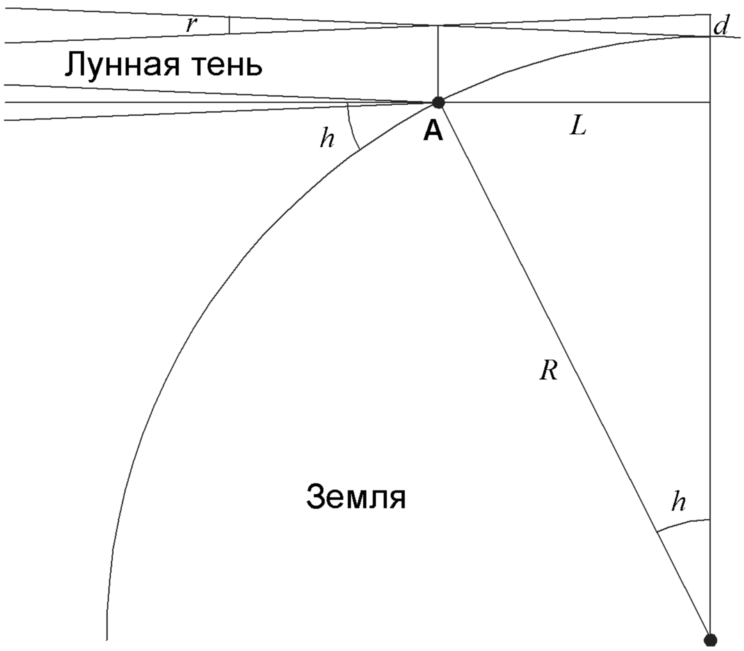
Мы видим, что для попадания в ворота космическим футболистам будет необходимо достичь высокой точности выполнения удара. А вот высокая точность по направлению, по крайней мере, в горизонтальной плоскости, не потребуется. Как видно на рисунке, орбита мяча, близкая к круговой, будет обязательно проходить через противоположный полюс астероида, где находятся ворота, даже если мяч будет лететь по траектории 3. Область возможных направлений удара из центра своих ворот охватывает угол в 180°, то есть все футбольное поле.

Кольцеобразно-полное затмение (О.С. Угольников)

Класс: **9** Задача: **5**

? На Земле начинается кольцеобразно-полное солнечное затмение. В начале полосы центрального затмения на поверхности Земли наблюдается кольцеобразное затмение продолжительностью 20 секунд. На какой высоте над горизонтом на Земле будет наблюдаться начало полного затмения (центральное полное затмение с фазой, в точности равной единице)? Рефракцией пренебречь.

! Как известно, кольцеобразно-полные затмения наступают, когда конус лунной тени не дотягивается до края Земли в начале и конце центрального затмения на нашей планете, но достигает поверхности Земли в середине затмения. Изобразим это на рисунке.



В момент начала центрального затмения на Земле ширина области видимости кольцеобразного затмения d есть произведение орбитальной скорости Луны (1 км/с) и продолжительности кольцеобразного затмения (20 секунд), то есть 20 км. Осевое вращение Земли в этот момент на продолжительность затмения не влияет, так как наблюдатель движется перпендикулярно движению тени. Угол раствора конуса лунной тени равен видимому диаметру Солнца r, что составляет 32′ или 0.0093 радиана. Конус тени не дотягивается до области наблюдения на расстояние L, равное d/r или 2150 км.

Центральное затмение будет наблюдаться как полное, начиная с точки **A**, в которой конец тени вступит на поверхность Земли. Из рисунка видно, что высота Солнца над горизонтом составит

$$h = \arcsin\frac{L}{R} = 20°.$$

Здесь R – радиус Земли. Данный вывод не зависит от того, пересекает ли лунная тень Землю по диаметру (в плоскости рисунка) или по хорде.

Незнакомое небо (О.С. Угольников)

Класс: **9** Задача: **6**

? Астронавты прибыли на поверхность обитаемой планеты. Наблюдая звездное небо, они обнаружили естественный спутник этой планеты, а также еще одну планету, расположенную ближе к центральной звезде. Синодические периоды спутника и планеты совпадали, а сидерический период планеты был вдвое меньше сидерического периода спутника. Во сколько раз внутренняя планета располагалась ближе к звезде, чем планета, с которой велись наблюдения? Все орбиты в системе круговые и лежат в одной плоскости.

! Период обращения внутренней планеты вокруг центральной звезды (ее сидерический период) T_1 меньше периода обращения той планеты, куда прибыли путешественники, T_0. Период обращения спутника вокруг планеты (сидерический период спутника) T_2 также меньше, нежели T_0, иначе спутник потерял бы гравитационную связь с планетой и перешел бы на орбиту вокруг центральной звезды. Величины синодических периодов внутренней планеты и спутника выражаются одинаковыми соотношениями:

$$\frac{1}{S_{1,2}} = \frac{1}{T_{1,2}} \pm \frac{1}{T_0}.$$

Знак "−" берется, если вращение внутренней планеты (спутника) вокруг звезды (планеты) происходит в ту же сторону, что и вращение обитаемой планеты вокруг звезды, а знак "+" в противоположном случае. Если бы все три тела обращались по своим орбитам в одну и ту же сторону, то равенство сидерических периодов $T_{1,2}$ означали бы равенство синодических периодов $S_{1,2}$ и наоборот. Астронавты же зарегистрировали равенство синодических периодов S_1 и S_2, при том, что сидерический период спутника T_2 превосходил сидерический период планеты T_1 ровно вдвое. Такое могло быть только в том случае, если спутник обращался вокруг планеты в направлении, противоположном направлению вращения обеих планет вокруг звезды. В итоге, мы имеем:

$$\frac{1}{S_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}, \qquad \frac{1}{S_2} = \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_0}.$$

Учитывая, что $S_1 = S_2$ и $T_2 = 2T_1$, получаем:

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2T_1} + \frac{1}{T_0}; \quad T_1 = \frac{T_0}{4}.$$

Искомое отношение радиусов орбит получается из III закона Кеплера:

$$\frac{r_1}{r_0} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{2/3} = 0.4.$$

Приближение к тройной системе (А.М. Татарников)

Класс: 10 Задача: 2

? Визуально тройная звезда состоит из звезд с видимыми звездными величинами 6^m, 7^m, 8^m. Расстояния до звезд оставляют 10, 15 и 20 пк соответственно. Наблюдатель пролетел 5 пк в сторону этой тройной звезды. Определите суммарный блеск этой системы для наблюдателя после перелета.

! После перелета расстояния до трех звезд составили 5, 10 и 15 парсек соответственно. Вычислим видимые величины каждой из трех звезд:

$$m_1 = 6 + 5\,(\lg 5 - \lg 10) = 4.50,$$
$$m_2 = 7 + 5\,(\lg 10 - \lg 15) = 6.12,$$
$$m_3 = 8 + 5\,(\lg 15 - \lg 20) = 7.38.$$

В соответствии с формулой Погсона суммарная звездная величина визуальной тройной системы составит

$$m = -2.5\,\lg\left(10^{-0.4\cdot m_1} + 10^{-0.4\cdot m_2} + 10^{-0.4\cdot m_3}\right) = 4.22.$$

Мира Кита (А.М. Татарников)

Класс: 10 11 Задача: 5

? Известно, что в видимом диапазоне длин волн амплитуда изменения блеска звезды Мира Кита составляет 8^m, а в инфракрасной области – около 1.5^m. Считая излучение звезды чернотельным, определите, во сколько раз изменяется радиус звезды, если ее эффективная температура в максимуме и минимуме равна соответственно 2800 и 2300 K.

! Оценим, на какой длине волны находится максимум излучения звезды:

$$\lambda = 2900/T \sim 1\text{-}1.2 \text{ мкм}.$$

Здесь T – эффективная температура звезды. Практически всю свою энергию звезда излучает в инфракрасной области спектра, поэтому для определения радиуса звезды нужно использовать данные измерений блеска в этом электромагнитном диапазоне. По закону Стефана-Больцмана светимость звезды составляет

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Для отношения светимостей в максимуме и минимуме имеем:

$$\frac{R_{\max}^2 T_{\max}^4}{R_{\min}^2 T_{\min}^4} = 10^{0.4\cdot\Delta m}; \quad \frac{R_{\max}}{R_{\min}} = 10^{0.2\cdot\Delta m}\,\frac{T_{\min}^2}{T_{\max}^2} = 1.35.$$

Световое давление Солнца (Е.Н. Фадеев, М.Е. Прохоров)

Класс: 10 11 Задача: 6

? Сравните давление солнечного света и давление солнечного ветра на расстоянии Земли от Солнца. До какой скорости сможет разогнаться сферическая углеродная пылинка плотностью 2 г/см^3 и радиусом 0.2 мкм под действием этих эффектов, если изначально пылинка находилась на расстоянии 1 а.е. от Солнца и была неподвижна? Концентрация частиц солнечного ветра вблизи Земли $8.7\cdot10^6$ м$^{-3}$, их скорость – 450 км/с.

! Световое давление Солнца и давление солнечного ветра сходны: и то, и другое давление создается потоком частиц. Давление света создается потоком фотонов, в то время как солнечный ветер состоит в основном из протонов и электронов с небольшой примесью альфа-частиц (ядер гелия ^{4}He).

Обозначим площадь поперечного сечения пылинки как S. За время Δt в пылинку попадет $nSv_w\Delta t$ частиц, где n – концентрация частиц, v_w – их скорость. Импульс каждой частицы равен mv_w. Суммарный импульс всех частиц, попавших в пылинку за указанный интервал времени, составит $mnSv_w^2\Delta t$. Деля этот импульс на интервал времени, мы получаем силу давления частиц на пылинку, а деля также на площадь – давление потока частиц:

$$P_w = mnv_w^2$$

Подставляя численные данные для солнечного ветра, получаем около $3\cdot10^{-9}$ Па. Газовое давление, обусловленное тепловыми скоростями частиц, значительно меньше, так как тепловые скорости меньше направленной скорости солнечного ветра.

Давление излучения проще посчитать исходя из тех соображений, что количество солнечной энергии приходящейся на единицу поверхности равно солнечной постоянной A, 1367 Вт/м^2. Солнечная постоянная – это полное количество солнечной лучистой энергии проходящей через единицу площади за единицу времени на расстоянии Земли от Солнца. Известно, что энергия фотонов равна

$$\varepsilon = h\nu = mc^2,$$

а их импульс:

$$p = mc = \frac{\varepsilon}{c}.$$

Отсюда видно, что давление излучения равно

$$P = \frac{A}{c} = 4.6\cdot10^{-6}\ \text{Па}.$$

В итоге, давление солнечного излучения в 1500 раз больше давления солнечного ветра.

Для ответа на второй вопрос задачи запишем выражения для двух сил, действующих на пылинку с указанными характеристиками: притяжения

Солнца и давления солнечного излучения (давлением солнечного ветра, как было показано выше, можно пренебречь):

$$F_1 = \frac{GM\mu}{R^2} = \frac{4}{3}\frac{GM\rho\pi r^3}{R^2}; \quad F_2 = -\frac{J\cdot\pi r^2}{4\pi\cdot cR^2} = -\frac{AR_0^2\pi r^2}{cR^2}.$$

Здесь M и μ – массы Солнца и пылинки, ρ и r – плотность и радиус пылинки, R_0 и R – расстояние от Солнца до Земли и пылинки соответственно, J – светимость Солнца. Во втором выражении стоит знак минус, что указывает, что данная сила действует противоположно первой. Равнодействующая двух сил составит

$$F = F_1 + F_2 = \frac{\pi r^2}{R^2}\left(\frac{4GM\rho r}{3} - \frac{AR_0^2}{c}\right) = \frac{4G\pi\rho r^3}{3R^2}\left(M - \frac{3AR_0^2}{4Gc\rho r}\right) = \frac{4G\pi\rho r^3}{3R^2}M^*.$$

Действие силы давления света приводит к тому, что пылинка движется в поле тяжести с уменьшенной эффективной массой Солнца M^*. Если же эффективная масса, стоящая в скобках в последней формуле, окажется меньше нуля, пылинка будет не притягиваться, а отталкиваться от Солнца. Чтобы выяснить, так ли это, подставим численные значения в выражение, стоящее в скобках. В результате мы получаем, что эффективная масса составляет $-0.44M$, и пылинка действительно будет отталкиваться от Солнца.

Так как результирующая сила пропорциональна R^{-2}, то аналогичный вид сохранит и выражение для потенциальной энергии взаимодействия пылинки с Солнцем:

$$E = -\frac{GM^*\mu}{R} = +0.44\frac{GM\mu}{R}.$$

По закону сохранения энергии, пылинка, неподвижная на расстоянии R_0 от Солнца, вылетит из Солнечной системы со скоростью

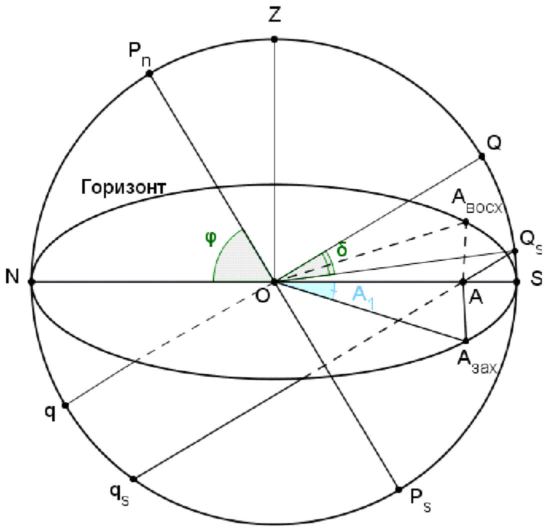
$$v = \sqrt{\frac{-2GM^*}{R_0}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0.44\cdot GM}{R_0}} = v_0\sqrt{0.44},$$

где v_0 – средняя орбитальная скорость Земли. В итоге, мы получаем значение скорости, до которой действие Солнца разгонит пылинку: 19.8 км/с.

Заходящая звезда (Е.Н. Фадеев)

Класс: 11 Задача: 1

? Астрономический азимут захода звезды на широте +60° равен 20°. На какое минимальное расстояние и в каком направлении нужно уехать, чтобы в течение последующих суток можно было увидеть эту звезду в зените?



! Поскольку азимут захода звезды меньше 90°, она находится в южной полусфере, то есть в зените она может быть только в южном полушарии. Звезда проходит через зенит, если широта места наблюдения равна склонению звезды. Найдем его. Обозначим радиус небесной сферы как R. Длина отрезка $\mathbf{OA_{зах}}$ равна этой же величине R. Тогда длина отрезка **OA** составляет $R\cdot\cos A_1$, где A_1 есть азимут точки захода звезды, составляющий 20°.

В треугольнике $\mathbf{OQ_sA}$ угол $\mathbf{OQ_sA}$ с точностью до знака есть искомое склонение звезды δ, угол $\mathbf{OAQ_s}$ равен 90°+φ, где φ — широта места наблюдения. Из теоремы синусов получаем:

$$\frac{R\cos A}{-\sin\delta}=\frac{R}{\sin(90°+\varphi)},$$

$$\delta=-\arcsin(\cos A\cos\varphi)=-28°.$$

Значит, данная звезда проходит через зенит на широте −28° ю.ш. Нужно уехать на юг на 88° или, принимая радиус Земли равным 6370 км, на

$$6370\cdot\frac{\pi}{180°}88°=9783\,\text{км}.$$

Компенсатор рефракции (О.С. Угольников)

Класс: 11 Задача: 2

? **С каким периодом должен вращать телескоп часовой механизм, чтобы удерживать точечный источник (звезду) со склонением 0, находящийся высоко над горизонтом, на экваторе в центре поля зрения с учетом атмосферной рефракции? Наблюдатель находится на уровне моря при стандартных атмосферных условиях (температура +20°С, давление 760 мм рт. ст.)**

! Звезда со склонением 0 движется по небесной сфере на экваторе вертикально, восходя на востоке, проходя через зенит и заходя на западе. Рефракция смещает положение звезды вдоль ее же суточного пути, и ее вполне можно компенсировать изменением угловой скорости, придаваемой телескопу часовым механизмом.

Пусть t_0 — время очередного прохода указанной звезды через зенит. Тогда в течение последующих 6 часов до захода звезды ее истинное зенитное расстояние будет зависеть от времени t как

$$z=\omega_0(t-t_0),$$

где ω_0 – угловая скорость суточного вращения небесной сферы (или, что правильнее, угловая скорость осевого вращения Земли). Эту же формулу можно распространить и на период до кульминации звезды, условно считая ее зенитное расстояние отрицательным.

Если зенитное расстояние не очень велико (меньше 50-60°), то величина астрономической рефракции при указанных условиях составляет

$$r = 56.0'' \operatorname{tg} z = 2.7 \cdot 10^{-4} \operatorname{tg} z.$$

При зенитных расстояниях меньше 20-30° эта формула выглядит еще проще:

$$r = 2.7 \cdot 10^{-4} \cdot z,$$

причем z в ней выражается в радианах. Зависимость видимого зенитного расстояния звезды z_V от времени будет выражаться как

$$z_V = z - r = z - 2.7 \cdot 10^{-4} z = \omega_0 (1 - 2.7 \cdot 10^{-4}) \cdot (t - t_0).$$

Эту формулу также можно распространить на период времени до кульминации звезды. В результате, если уменьшить угловую скорость телескопа на $2.7 \cdot 10^{-4}$ часть, то он в течение достаточно длительного времени будет очень хорошо отслеживать положение звезды. Период вращения небесной сферы T_0, как известно, составляет 23 часа 56 минут и 4 секунды. Для решения поставленной задачи его нужно умножить на 1.00027. В результате, мы получаем 23 часа 56 минут 27 секунд.

Взрыв в звездном трио (О.С. Угольников)

Класс: **11** Задача: **4**

? Три звезды с равной массой обращаются вокруг общего центра тяжести по одинаковой круговой траектории, находясь в вершинах равностороннего треугольника. В один момент одна из звезд взрывается как сверхновая, и ее масса без остатка быстро покидает систему. Найдите эксцентриситет новых орбит оставшихся двух звезд.

! Обозначим расстояние между звездами попарно (сторону равностороннего треугольника) как R, а массу каждой звезды как M.

Рассмотрим движение каждой звезды. По свойствам равностороннего треугольника, радиус орбит звезд составляет

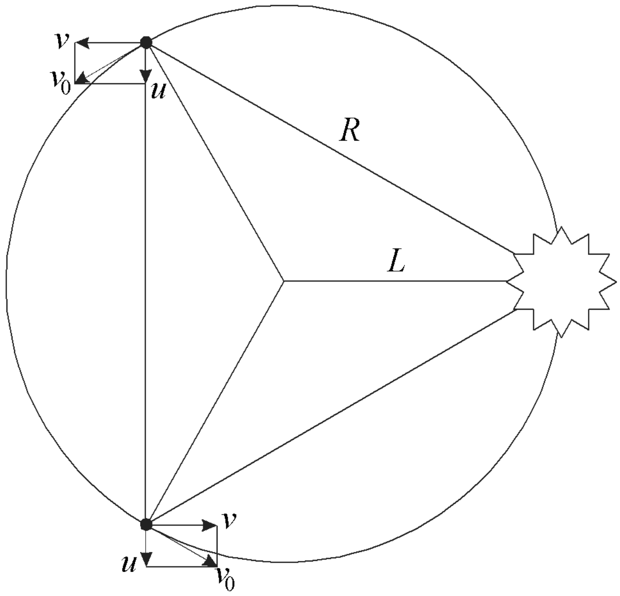
$$L = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Центростремительное ускорение каждой звезде придает равнодействующая сил притяжения двух других звезд:

$$M \cdot a = \frac{2GM^2 \cos 30°}{R^2}; \quad a = \frac{\sqrt{3}GM}{R^2}.$$

Скорость движения каждой из звезд составляет

$$v_0 = \sqrt{a \cdot L} = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$



После взрыва одной из звезд две остальные продолжают двигаться со скоростями v_0, как показано на рисунке. Компонента этой скорости, направленная вдоль прямой, соединяющей звезды, u, одинакова для обеих звезд и является скоростью центра масс системы, образованной двумя звездами; она в дальнейшем не изменяется. А вот перпендикулярная компонента v у двух звезд совпадает по модулю, но противоположна по направлению. Она становится орбитальной скоростью звезд. Ее величина составляет

$$v = v_0 \cos 30° = \sqrt{\frac{3GM}{4R}}.$$

Орбитальная скорость перпендикулярна радиусу-вектору, следовательно, положения звезд сразу после взрыва соответствуют либо перицентрам, либо апоцентрам новых орбит. Пусть через половину орбитального периода, в апоцентре или перицентре соответственно, расстояние между звездами будет равно D, а скорости каждой будут равны v_1. Запишем законы сохранения момента импульса и энергии:

$$2 \cdot \frac{v \cdot R}{2} = 2 \cdot \frac{v_1 \cdot D}{2}; \quad 2 \cdot \frac{M \cdot v^2}{2} - \frac{GM^2}{R} = 2 \cdot \frac{M \cdot v_1^2}{2} - \frac{GM^2}{D}.$$

Делая подстановки

$$v_1 = \frac{v \cdot R}{D}; \quad \frac{GM}{R} = \frac{4v^2}{3},$$

получаем уравнение

$$v^2 - \frac{4v^2}{3} = v^2 \frac{R^2}{D^2} - \frac{4v^2}{3} \frac{R}{D}$$

и далее:

$$3(R/D)^2 - 4(R/D) + 1 = 0$$

Это уравнение имеет два корня, соответствующие двум точкам на орбитах звезд. Первое решение ($D=R$) связано с положением звезд сразу после взрыва, а второе ($D=3R$) – через половину нового орбитального периода. Мы видим, что сразу после взрыва звезды оказываются в перицентрах своих новых орбит, а в апоцентрах они будут втрое дальше друг от друга. Эксцентриситет новых орбит составит

$$e = (D-R)/(D+R) = 0.5.$$