

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР



9 класс



IX. 1

ПОЛНОЧНЫЙ ЗАКАТ

О.С. Угольников

? В некотором пункте с долготой $+30^\circ$ Солнце зашло 22 июня в полночь по московскому времени. Какова долгота светового дня в этом пункте в этот день? Уравнением времени пренебречь.

! Московское время T_M , выраженное в часах, связано со Всемирным временем UT простым соотношением:

$$T_M = UT + 4.$$

Среднее солнечное (местное) время на долготе λ составляет:

$$T_S = UT + \lambda.$$

Из данных формул получим местное время захода Солнца в данном пункте:

$$T_S = T_M + \lambda - 4$$

или 22 часа. Верхняя кульминация Солнца происходит в 12 часов по местному времени (уравнением времени мы пренебрегаем), за 10 часов до захода. Следовательно, долгота светового дня составляет 20 часов.

IX. 2

БЫСТРЫЙ ОБЛЕТ

О.С. Угольников

? Вокруг какого из известных Вам больших тел Солнечной системы (размером более 1000 км) можно быстрее всего сделать один полный оборот без включенных двигателей? Осевое вращение больших тел не учитывать.

! Из обобщенного III закона Кеплера получаем выражение для орбитального периода:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}}.$$

Здесь M – масса объекта, вокруг которого обращается спутник, a – большая полуось его орбиты. Если сферическое центральное тело (Солнце, планета, спутник планеты или астероид) лишен атмосферы, то минимальный период будет достигнут, если орбита круговая, а величина a близка к радиусу тела:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}.$$

Здесь ρ – средняя плотность центрального тела. Отсюда мы сразу видим, что быстрее всего оборот можно сделать вокруг наиболее плотного тела. Однако, если это тело обладает атмосферой, то движение вблизи поверхности без включения двигателей невозможно – атмосфера затормозит движение, и аппарат сгорит в ней или упадет на поверхность. Минимальный радиус орбиты составит $R+h$, где h – характерная высота плотных слоев атмосферы. Тогда минимальный период будет равен

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (R+h)^3}{GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho} \cdot \frac{(R+h)^3}{R^3}}.$$

Из справочных таблиц мы можем видеть, что два самых плотных больших тела Солнечной системы – это планеты Земля и Меркурий, за ними следует планета Венера. Плотность других тел, особенно на окраинах Солнечной системы, существенно ниже. Если бы у Земли не было атмосферы, то минимальный период ее облета был бы самым маленьким. Но атмосфера у Земли есть. Найдем высоту h_E , на которой период оборота вокруг Земли сравнится с периодом оборота вокруг Меркурия, у которого атмосферы нет:

$$\frac{R_E + h_E}{R_E} = \left(\frac{\rho_E}{\rho_M} \right)^{1/3}.$$

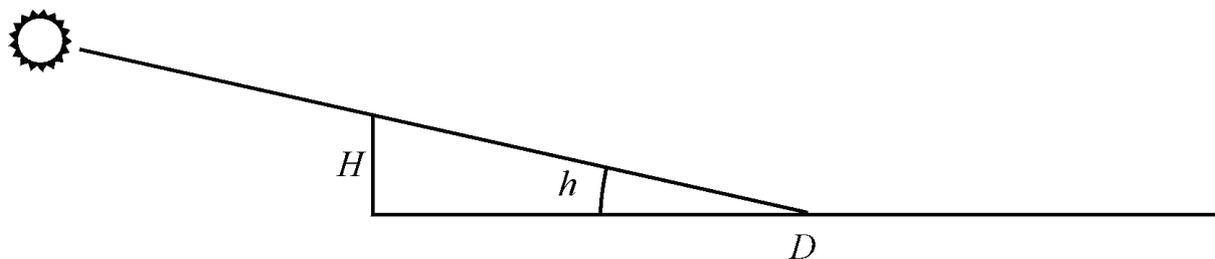
Здесь индекс “Е” относится к Земле, “М” – к Меркурию. В результате мы получаем значение h_E , равное 40 км. Очевидно, что орбитальные полеты на такой высоте над Землей невозможны. Итак, быстрее всего по орбите можно облететь Меркурий.

IX. 3 КРАТЕР КАБЕУС

О.С. Угольников

? Объект исследования и место падения космического аппарата LCROSS – лунный кратер Кабеус диаметром 98 км имеет селенографические координаты 85° ю.ш., 35° з.д. Его глубина составляет 4 км. Может ли Солнце хотя бы иногда частично освещать центр этого кратера?

! Определим, на какой высоте над математическим горизонтом виден гребень стен кратера из его центра:



$$h = \arcsin \frac{2H}{D} = 4.7^\circ.$$

Если Солнце располагается на небесном экваторе Луны, то его центр будет проходить точку верхней кульминации на высоте около 5° , и Солнце в течение короткого времени все же будет слабо освещать центр кратера. В реальности, благодаря небольшому наклону плоскости экватора Луны к плоскости эклиптики (около 1.5°) Солнце в «летний период» изредка поднимается почти на 2° над гребнем, но по этой же причине «зимой» (в течение половины земного года) вообще не освещает центр кратера. Именно поэтому данная область Луны была выбрана для поиска водяного льда вблизи поверхности Луны.

IX. 4 ВЗОР ВДОЛЬ ЛИНИИ АПСИД

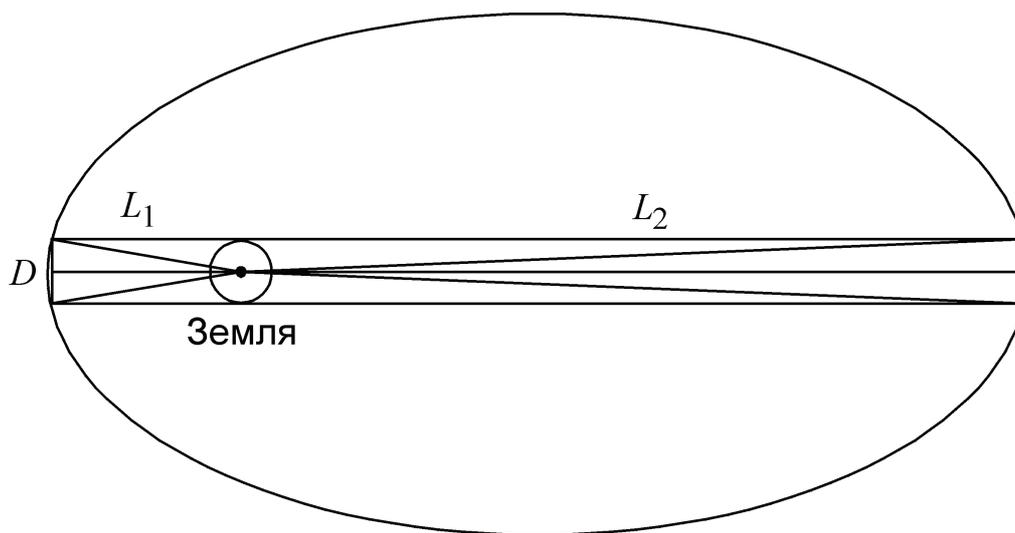
О.С. Угольников

? На спутнике Земли установлены два одинаковых телескопа, направленные в противоположные стороны вдоль линии апсид орбиты спутника. Диск Земли проходит через центр поля зрения одного телескопа в 3 раза быстрее, чем через центр поля зрения другого телескопа. Размеры орбиты спутника значительно больше размеров Земли, спутник не вращается вокруг собственной оси. Найдите эксцентриситет орбиты спутника.

! Изобразим Землю и орбиту спутника. Начертим линию апсид этой орбиты. Спутник не вращается вокруг собственной оси, и телескопы всегда направлены параллельно этой линии. В один из них Земля будет видна в перигее, в другой – в апогее орбиты. Земля будет занимать центр поля зрения одного из телескопов до момента, пока ось телескопов не станет касательной к Земле. Эти положения также показаны на рисунке.

По условию задачи, размеры орбиты существенно больше диаметра Земли. Поэтому участки орбиты, с которых Земля будет видна в центре поля зрения телескопов, можно считать отрезками прямой линии. Соединим концы этих отрезков с центром Земли и рассчитаем отношение площадей полученных двух треугольников:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{DL_1 / 2}{DL_2 / 2} = \frac{L_1}{L_2}.$$



Здесь L_1 и L_2 – расстояния спутника от центра Земли в перигее и апогее соответственно, D – диаметр Земли. По II закону Кеплера, соотношение времен, за которое спутник проходит указанные отрезки, T_1/T_2 , будет таким же и составит $1/3$. Отсюда мы получаем $L_2 = 3L_1$. Эксцентриситет орбиты спутника равен

$$e = \frac{L_2 - L_1}{L_2 + L_1} = 0.5.$$

IX. 5

ПРОХОЖДЕНИЕ ВЕНЕРЫ - XVII ВЕК

О.С. Угольников

? В декабре 1639 года английский астроном Джереми Хоррокс впервые в истории наблюдал прохождение Венеры по диску Солнца. Ему были известны размеры Земли и величина радиуса орбиты Венеры в астрономических единицах (0.723 а.е.). Сделав предположение, что горизонтальный параллакс Солнца при наблюдении с Венеры и Земли одинаков, он определил значение самой астрономической единицы – расстояния от Земли до Солнца, тогда еще неизвестное. Какое значение он мог получить в результате при условии точности проведенных наблюдений и расчетов?

! Во время наблюдений прохождения Венеры по диску Солнца Джереми Хоррокс мог измерить видимый диаметр Венеры d , сравнив его с видимыми размерами Солнца. Выражая его в радианной мере, получаем

$$d = \frac{D}{L_0(1-q)},$$

где D – пространственный диаметр Венеры, L_0 – значение астрономической единицы, q – радиус орбиты Венеры в астрономических единицах (или отношение радиусов орбит Венеры и Земли). Величина горизонтального параллакса Солнца ρ есть отношение радиуса планеты к расстоянию от нее до Солнца. Равенство параллаксов Солнца на Земле и Венере можно записать как

$$\rho = \frac{D}{2L_0q} = \frac{D_0}{2L_0}.$$

Здесь D и D_0 – диаметры Венеры и Земли. Из последней формулы мы получаем $D = D_0q$. В итоге, астрономическая единица равна

$$L_0 = \frac{D_0q}{d(1-q)}.$$

Учитывая, что видимый диаметр Венеры во время прохождения по диску Солнца составляет $60''$ или 0.00029 радиан, получаем значение L_0 : 115 млн км. Как видим, несмотря на ошибочность предположения, полученное значение астрономической единицы отличается от истинного всего на 25%. В реальности, Хоррокс во время наблюдений переоценил видимые размеры Венеры, что привело к еще меньшему значению астрономической единицы: 95 млн км.

IX. 6 ОЧЕРКИ О ВСЕЛЕННОЙ

Е.Н. Фадеев

? Вам предложены некоторые высказывания из книги Б. А. Воронцова-Вельяминова «Очерки о Вселенной», изданной в 1959 году. Укажите, какие данные устарели и не соответствуют современной картине мира. Объясните, почему в то время общепринятой была именно такая точка зрения. Как это должно быть описано с современной научной точки зрения?

1. Планета Меркурий, как кролик, зачарованный змеиным взглядом, не может повернуться по отношению к Солнцу и обращена к нему всегда одной и той же стороной. Так Меркурий (в прошлом – символ греческого бога торговли и путешествий) и обращается вокруг Солнца, как бы не смея отвести от него своего лица.

2. У нашей прекрасной соседки Венеры существование атмосферы, почти такой же плотной, как у Земли, было впервые установлено из наблюдений гениальным русским ученым М. В. Ломоносовым в 1761г.

3. Большое пятно красноватого цвета, наблюдающееся по крайней мере 80 лет неизменно в одном и том же месте на Юпитере, когда-то считалось озером раскаленной лавы на его твердой поверхности. Предполагалось, что идущие от него воздушные течения разгоняют над ним облака и делают его видимым. Теперь можно думать, что оно состоит из какого-то крайне легкого вещества, но твердого, а не жидкого, и поддерживаемого достаточно плотной атмосферой Юпитера на большой высоте над его поверхностью. Его размер 10×45 тыс.км. На его твердость указывает то, что оно как нечто целое перемещается на планете по долготе.

4. Если случайно в той области, где образовалась планета, метеориты с орбитами мало вытянутыми и мало наклоненными к средней плоскости солнечной системы, не были в достаточной мере преобладающими, могло возникнуть вра-

щение планеты в обратном направлении, что и объясняет единственный известный случай такого рода – вращение Урана.

5. Одиночество среди звезд не столь распространено, как думали после первых открытий двойных звезд. Далеко не все звезды живут бобылями, как наше Солнце (если, конечно, не иметь в виду планеты).

6. Самыми рядовыми жильцами в нашей кубатуре (окрестности Солнца) являются красные карлики, более холодные и маленькие, чем Солнце, с гораздо более низкой светимостью.

7. Вероятнее всего, подавляющее большинство комет родилось внутри Солнечной системы неизвестно когда и до сих пор продолжают оставаться ее членами, но большинство из них имеет периоды обращения тысячи лет и более.

8. В телескоп мы видим даже их диски [планет], и, например, Юпитер при увеличении всего около 50 раз виден таким, какой Луна кажется невооруженному глазу.

9. Юпитер и Сатурн также вращаются зонами подобно Солнцу и быстрее на экваторе.

10. Столкновение [Земли] с головой или хвостом кометы может происходить. Но не можем ли мы отравиться ядовитыми газами – цианом или окисью углерода? Зная ничтожно малую, почти неосуществимую искусственно в лаборатории плотность комет, мы убеждены, что примесь кометных газов к нашему воздуху будет неощутима.

11. Открытие кратеров метеоритного происхождения на Земле во многих умах возродило идею о том, что лунные кольцевые горы – эти оспины на лике Луны – образованы падением метеоритов. Наличие метеоритных кратеров на Земле и сходство их профиля с профилем лунных кратеров придают этой версии добавочную правдоподобность, но, хотя поклонников такого взгляда и сейчас немало, мы не можем к ним присоединиться.

12. Блеск кометы (исправленный с учетом влияния расстояния от Земли) в зависимости от ее расстояния до Солнца меняется по-разному, но обычно гораздо быстрее, чем обратно пропорционально квадрату расстояния.

! 1. Меркурий успевает совершить 3 оборота вокруг своей оси за два сидерических периода обращения вокруг Солнца. В то время период обращения Меркурия вокруг своей оси был неизвестен, но теория приливов указывала на то, что Меркурий должен быть синхронизован с Солнцем, как Луна с Землей. Тем не менее, утверждение все равно не вполне верное. Поскольку орбита Луны немного вытянута, мы наблюдаем ее либрацию (покачивание), благодаря чему можем видеть больше половины поверхности. Эксцентриситет орбиты Меркурия больше лунного, так что, даже если бы осевое вращение Меркурия было синхронизовано с Солнцем, он бы все равно несколько покачивался относительно среднего направления на Солнце.

2. Ломоносов действительно наблюдал прохождение Венеры по диску Солнца, в результате чего сделал вывод, что атмосфера на Венере есть. Однако она не «почти такая же плотная», а гораздо плотнее, чем земная атмосфера. О реальных

свойствах атмосферы Венеры ученые узнали только после первых полетов к Венере (хотя Ломоносов допускал, что атмосфера Венеры по плотности может превосходить земную). До этого предполагалось, что раз Венера лишь чуть-чуть уступает в размере Земле, то и атмосфера ее должна быть немного менее плотная.

3. На самом деле Большое Красное Пятно – это вихрь в атмосфере планеты (антициклон). Окончательно это удалось установить только после полета космических аппаратов «Вояджер-1,2». До этого разрешающей способности телескопов не хватало для детального анализа этого феномена. В то же время, трудно было предположить, что атмосферное образование может существовать несколько столетий.

4. Обратное направление вращения вокруг своей оси имеет также и Венера. Однако, обнаружить это удалось только в начале 60-х годов по данным радиолокации, поскольку в видимом диапазоне поверхность планеты скрыта под толстой непрозрачной атмосферой.

5. По различным оценкам от 50% до 70% звезд входят в двойные и кратные системы.

6. Утверждение верное, если не принимать во внимание гипотезу, что бурых карликов может быть еще больше, чем красных. Современное развитие наблюдательной техники пока не позволяет проверить эту гипотезу.

7. Согласно современным представлениям о формировании Солнечной системы, кометы – это «строительный мусор», оставшийся после формирования «больших» тел. Основной резервуар комет, как принято считать, находится на дальних окраинах Солнечной системы и называется облаком Оорта.

8. Радиус Юпитера, как указано в справочных таблицах, равен примерно $7 \cdot 10^4$ км. Расстояние до Юпитера в противостоянии $4.2 \text{ а.е.} \approx 6 \cdot 10^8$ км. Поделив радиус на расстояние, получаем угловой размер радиуса Юпитера в радианах. Домножив на 50 (увеличение), получаем $5.6 \cdot 10^3 \text{ рад} \approx 0.32^\circ$. Эта величина несколько больше углового радиуса Луны (0.25°). Если мы сделаем такие же расчеты для соединения, то получим значение видимого радиуса Юпитера 0.23° . Так что, данная цитата из книги абсолютно верна.

9. Совершенно верно.

10. Совершенно верно. Около 100 лет назад Земля прошла через хвост кометы Галлея, что никак не отразилось на нашей атмосфере. Космический аппарат Stardust, специально сконструированный для ловли частиц кометных хвостов, смог поймать всего несколько десятков таких частиц во время сближения с кометой.

11. Во-первых, в то время было известно не очень много ударных кратеров на Земле. В настоящее время геологическими методами удается выделить много мест падения крупных метеоритов даже тогда, когда сами кратеры уничтожены эрозией. Кроме того, со времени написания книги кратеры были найдены на всех планетах, имеющих достаточно старую твердую поверхность, спутниках планет и астероидах. Общепринято, что кратеры в большинстве своем имеют ударное происхождение. По плотности кратеров на поверхности небесных тел определяют возраст этой поверхности.

12. Совершенно верно. По мере подлета кометы к Солнцу у нее появляется кома (голова кометы) и хвост, которые хорошо рассеивают свет Солнца, увеличивая видимую яркость кометы.

X. 1 СКВОЗЬ КУПОЛ

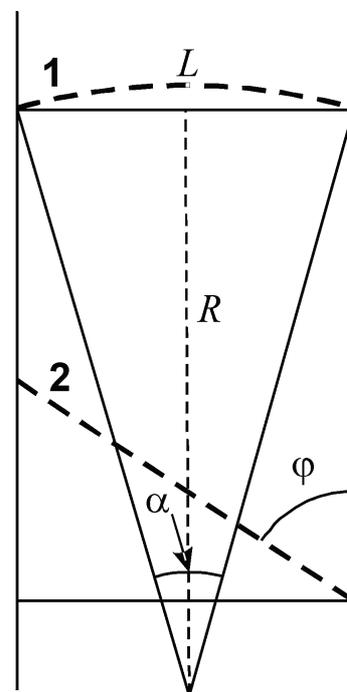
А.М. Татарников

? Астроном наблюдает на обсерватории в городе Орел из центра купола с маленьким телескопом (диаметр объектива много меньше размеров щели купола). Оцените, какое максимальное время он может наблюдать околоэкваториальные объекты, не вращая купол? В какой стороне горизонта это достижимо? Диаметр купола 10 м, ширина щели купола 1 м, широта Орла равна $+53^\circ$.

! Определим угловую ширину купола при наблюдении из его центра:

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{L}{2R} \approx \frac{L}{R} = 0.2$$

или 11.4° . Здесь R – радиус купола, L – ширина его щели. Если астроном наблюдает светило на небесном экваторе вблизи его верхней кульминации, то длина видимого участка суточного пути светила (линия 1 на рисунке) будет примерно равна углу α . Но этот участок может быть длиннее, если светило движется не перпендикулярно створкам купола. Максимальный угол наклона для небесного экватора будет на восходе или заходе светила. Поэтому продолжительность наблюдений с неподвижным куполом будет максимальна, если светило наблюдается сразу после восхода или перед заходом (линия 2 на рисунке) на востоке или западе соответственно. Длина видимого пути составит:



$$\beta = \frac{\alpha}{\sin \varphi} = \frac{L}{R \sin \varphi} = 0.25$$

или 14.3° . Время, за которая звезда пройдет этот путь, составляет:

$$T = \frac{\beta \cdot S}{2\pi} = \frac{LS}{2\pi R \sin \varphi} = 57 \text{ мин.}$$

Здесь S – продолжительность звездных суток.

X. 2

ЗВЕЗДНЫЙ КВАДРАТ

А.Н. Акинъчиков

? Звездная система состоит из 4 звезд одинаковой массы M , расположенных в вершинах квадрата со стороной a и движущихся по общей окружности относительно общего центра масс. Найдите скорости звезд относительно центра масс и период обращения этой системы.

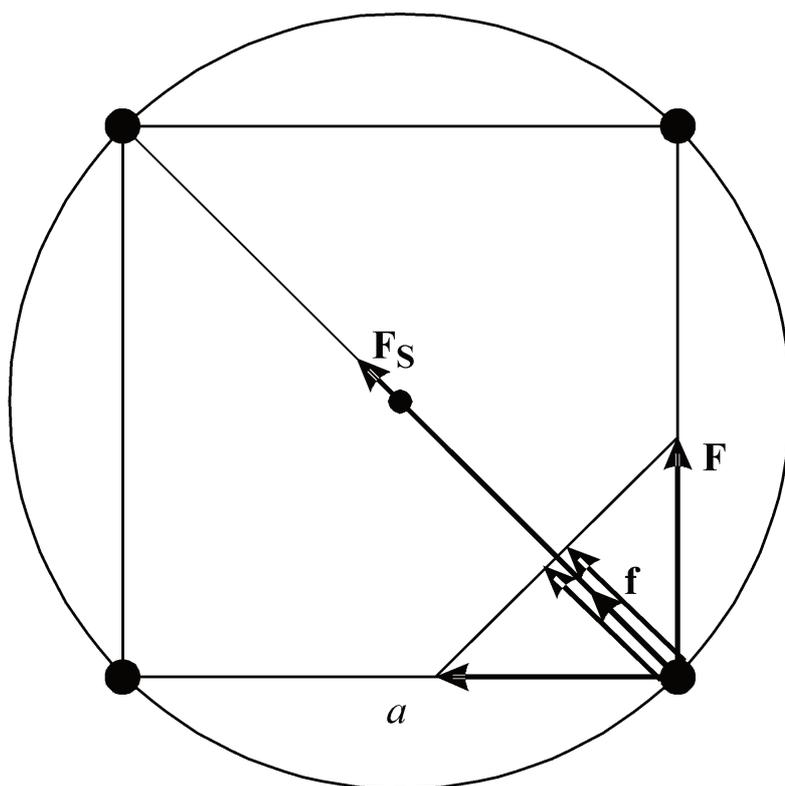
! Изобразим конфигурацию из четырех звезд в вершинах квадрата со стороной a .

На каждую из звезд действуют взаимно-перпендикулярные и равные по модулю силы притяжения от двух соседних звезд:

$$F = \frac{GM^2}{a^2}.$$

На звезду действует также сила притяжения со стороны противоположной звезды. Расстояние до нее равно $a\sqrt{2}$, а сила равна:

$$f = \frac{GM^2}{2a^2}.$$



Равнодействующая всех трех сил будет направлена к центру масс и составит:

$$F_s = \frac{2F}{\sqrt{2}} + f = \frac{GM^2}{a^2} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right).$$

По условию задачи, звезды движутся по окружности. Центр этой окружности находится в центре квадрата, а радиус равен $a/\sqrt{2}$. Из соотношения углового ускорения и радиуса траектории получаем значение скорости:

$$v = \sqrt{\frac{F_s}{M} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)}.$$

Период обращения составляет:

$$T = \frac{2\pi(a/\sqrt{2})}{v} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}} = \frac{2\pi a^{3/2} \sqrt{4 - \sqrt{2}}}{\sqrt{7GM}}.$$

X. 3 РАСТУЩИЙ ДЕНЬ

О.С. Угольников

? В некотором пункте Земли долгота светового дня увеличилась на 7 минут 52 секунды по сравнению с предыдущими сутками. Найти широту этого пункта. Рефракцией, уравнением времени и угловыми размерами Солнца пренебречь.

! Если пренебречь уравнением времени, то момент верхней кульминации Солнца каждый день приходится на один и тот же момент по местному времени – 12ч00м. Если в результате суточного изменения склонения Солнца $\Delta\delta$ долгота светового дня увеличилась за сутки на величину ΔT , это означает, что местное время восхода Солнца уменьшилось на $\Delta T/2$, а местное время захода Солнца – увеличилось на ту же величину. Величина $\Delta T/2$ составляет 3 минуты 56 секунд, а интервал времени между двумя последующими восходами Солнца – 23 часа 56 минут 04 секунды, то есть ровно звездные сутки.

По условию задачи, мы пренебрегаем рефракцией и угловыми размерами Солнца. В этом случае в момент восхода центр Солнца располагается на горизонте. В момент обоих восходов звездное время одинаково, расположение всех звезд, а также эклиптики относительно горизонта совпадает. Два последовательных положения Солнца, расположенных в разных и не противоположных точках эклиптики, оказываются на горизонте. Следовательно, в эти моменты эклиптика совпадает с горизонтом, а один из двух полюсов эклиптики – с зенитом. Это может быть только на северном или южном полярном круге, с широтой $\pm 66.6^\circ$, равной склонению того или иного полюса эклиптики.

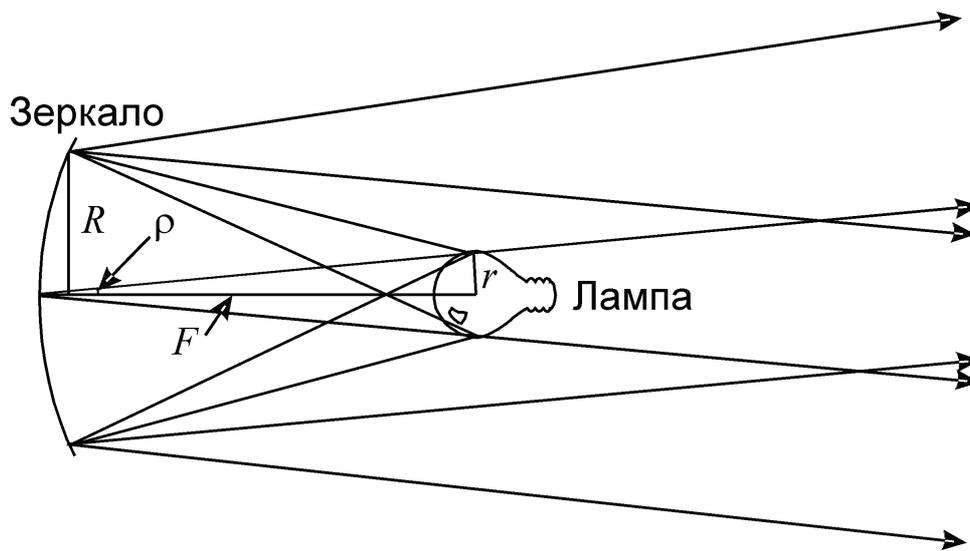
X. 4 ФАРА ДАЛЬНОГО СВЕТА

О.С. Угольников

? Фара дальнего света представляет собой матовую лампу мощностью 40 Вт и диаметром 2 см, установленную в фокусе отражателя диаметром 20 см. С какого максимального расстояния свет одной фары можно увидеть невооруженным глазом? Аберрации оптики, рассеяние света в воздухе и помехи для распространения света (в том числе горизонт) не учитывать. Считать, что спектральный состав света лампы аналогичен солнечному.

! Изобразим оптическую схему фары. Обозначим мощность лампы через J_0 , радиус ее матовой колбы – через r . Световая энергия, попадающая от лампы на отражатель в единицу времени, с достаточной для оценки точностью составляет

$$J = J_0 \frac{\pi R^2}{4\pi F^2} = J_0 \frac{R^2}{4F^2}.$$



Здесь F – расстояние от лампы до отражателя, оно же – фокусное расстояние отражателя. Лампа располагается в фокусе отражателя, и каждая часть лампы создает на выходе параллельный пучок света. За счет того, что лампа имеет конечные размеры, весь выходящий поток света будет иметь вид расходящегося конуса, стороны которого будут образовывать угол с осью, равный угловому радиусу лампы, видимой от отражателя:

$$\rho = r / F.$$

На расстоянии D от фары (существенно большем размеров самой фары) радиус светового пятна составит

$$L = D \rho = D r / F.$$

Поток энергии на единицу площади будет равен

$$j = \frac{J}{\pi L^2} = J_0 \frac{R^2}{4\pi D^2 r^2}.$$

Обратим внимание, что эта величина не зависит от фокусного расстояния. Для того, чтобы фара была заметна невооруженным глазом, поток энергии j должен соответствовать звезде 6^m (или быть большим). Определим это значение, сравнив фару с Солнцем (спектральный состав излучения по условию задачи одинаков). Поток энергии от Солнца на Земле равен

$$j_s = \frac{J_s}{4\pi L_E^2} = 1.37 \cdot 10^3 \text{ Вт / м}^2.$$

Здесь J_s – светимость Солнца, L_E – расстояние от Солнца до Земли. С учетом блеска Солнца (-26.8^m) по формуле Погсона получаем значение минимального потока энергии, заметного глазом:

$$j = j_s \cdot 10^{0.4 \cdot (-26.8 - 6)} = 10^{-10} \text{ Вт / м}^2.$$

Максимальное расстояние, с которого можно будет увидеть фару, составит

$$D = \frac{R}{r} \sqrt{\frac{J_0}{4\pi j}} = 1800 \text{ км.}$$

Столь большое значение не должно вводить в заблуждение – на Земле включенные фары автомобилей легко видны с больших расстояний, ограниченных, прежде всего, потерями света в фаре и условиями видимости (горизонт, земные объекты и т.д.) и поглощением света в атмосферном воздухе.

X. 5

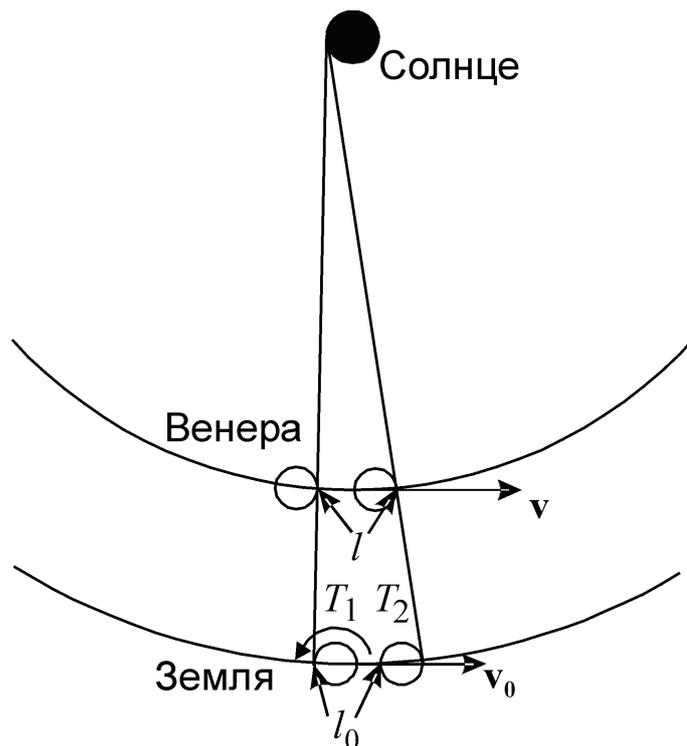
ПРОХОЖДЕНИЕ ВЕНЕРЫ - XVIII ВЕК

О.С. Угольников

? Шел XVIII век. Две экспедиции направились к противоположным точкам экватора, чтобы зафиксировать момент вступления Венеры на диск Солнца на его восходе и заходе соответственно и определить из этого величину астрономической единицы. Радиус орбиты Венеры в астрономических единицах (0.723 а.е.) был к тому времени хорошо известен. И если хронометр, взятый с собой первой экспедицией, работал точно, то у второй экспедиции (наблюдавшей вход Венеры на заходе Солнца) он спешил на одну минуту. Какое значение астрономической единицы будет получено в результате работы экспедиций? Наклон орбиты Венеры и экватора Земли к эклиптике не учитывать, орбиты обеих планет считать круговыми.

! При наблюдении из разных точек Земли Венера вступает на диск Солнца в разное время, и этот эффект может служить основой для определения параллакса Солнца или расстояния от Солнца до Земли. Предположим для простоты, что Венера и Земля обращаются вокруг Солнца в одной плоскости, содержащей также экватор Земли. Рассмотрим картину со стороны северного полюса эклиптики.

Пусть в некоторый момент T_1 прохождение Венеры по диску Солнца стало видно из одной точки Земли. Венера движется по орбите быстрее Земли, и прохождение будет в начале видно из восточной точки Земли, задней по отношению к ее орбитальному движению. При наблюдении из этой точки Солнце и Венера будут заходить за горизонт. В эту точку прибыла вторая экспедиция, описанная в условии задачи. Через некоторое



время, в момент T_2 , прохождение станет видимым со всей дневной части поверхности Земли. Последними вступление Венеры на диск Солнца увидят наблюдатели с передней, западной окраины Земли, где Солнце и Венера будут восходить над горизонтом.

Пусть a_0 – искомое расстояние между Солнцем и Землей, а q – радиус орбиты Венеры в астрономических единицах. Расстояние между Солнцем и Венерой составляет qa_0 . Из III закона Кеплера можно получить соотношение орбитальных скоростей Венеры (v) и Земли (v_0):

$$v^2 q = v_0^2.$$

Обозначим перемещение Земли за интервал времени $(T_2 - T_1)$ как l_0 . Как видно из рисунка, Венера за это время переместится на расстояние

$$l = (l_0 + 2R) q.$$

Здесь R – радиус Земли. Учитывая соотношение скоростей, получаем:

$$\frac{l_0}{v_0} = \frac{l}{v} = \frac{q^{3/2}(l_0 + 2R)}{v_0}.$$

Отсюда

$$l_0 = \frac{2R q^{3/2}}{(1 - q^{3/2})}.$$

Зная моменты времени T_1 и T_2 , можно определить величину орбитальной скорости Земли и далее – радиуса ее орбиты:

$$v_0 = \frac{l_0}{T_2 - T_1};$$

$$a_0 = \frac{v_0 T_E}{2\pi} = \frac{l_0 T_E}{2\pi(T_2 - T_1)} = \frac{R q^{3/2} T_E}{\pi(1 - q^{3/2})(T_2 - T_1)}.$$

Здесь T_E – период обращения Земли вокруг Солнца. Из последней формулы можно вычислить, что истинный промежуток времени $(T_2 - T_1)$ составляет 11.4 минуты. Однако, из-за ошибки хода часов экспедиции, работавшей на заходе Солнца, вместо момента времени T_1 был зафиксирован момент $T_1 + \Delta T_1$. В результате, ошибочное значение величины астрономической единицы получится равным:

$$a' = \frac{R q^{3/2} T_E}{\pi(1 - q^{3/2})(T_2 - T_1 - \Delta T_1)} = a_0 \frac{T_2 - T_1}{T_2 - T_1 - \Delta T_1} = 164 \text{ млн км.}$$

X. 6

ШАРОВОЕ СКОПЛЕНИЕ

О.С. Угольников

? Шаровое звездное скопление имеет угловой диаметр $30'$ и блеск 6^m . Измерение лучевых скоростей звезд скопления показали, что они варьируют в пределах ± 10 км/с относительно лучевой скорости центра скопления. Оцените расстояние до скопления, считая, что оно состоит только из звезд, подобных Солнцу. Межзвездным поглощением пренебречь.

! Шаровое звездное скопление – гравитационно-связанная система. Характерные лучевые скорости звезд скопления относительно его центра близки к значению первой космической скорости на краю скопления:

$$v = \sqrt{\frac{GM \cdot N}{R}}.$$

Здесь M – характерная масса звезды в скоплении (масса Солнца), N – количество звезд в скоплении, R – радиус скопления. Далее, все скопление имеет блеск 6^m . Найдем расстояние, с которого такой блеск имело бы одно Солнце с абсолютной величиной 4.7^m :

$$\lg D_0 = \frac{6 - 4.7}{5} + 1 = 1.26.$$

Это расстояние составляет примерно 18 пк или $5.4 \cdot 10^{17}$ м. Для скопления, состоящего из N таких же звезд, блеск 6^m соответствует расстоянию:

$$D = D_0 \sqrt{N}.$$

Наконец, видимый радиус скопления ρ составляет $15'$ или 0.0044 радиан. Для него справедливо соотношение:

$$\rho = \frac{R}{D}.$$

Мы получили систему из трех уравнений относительно неизвестных величин N , R и D . Выразим первые две величины через третью:

$$R = D \rho; \quad N = \frac{v^2 R}{GM} = \frac{v^2 D \rho}{GM}.$$

Подставляя это в выражение для расстояния D , получаем:

$$D^2 = D_0^2 N = \frac{v^2 D_0^2 D \rho}{GM}; \quad D = \frac{v^2 D_0^2 \rho}{GM}.$$

Расстояние составляет 10^{21} м или 30 кпк.



XI. 1

ВЕРХНЯЯ КУЛЬМИНАЦИЯ ВЕГИ

О.С. Угольников

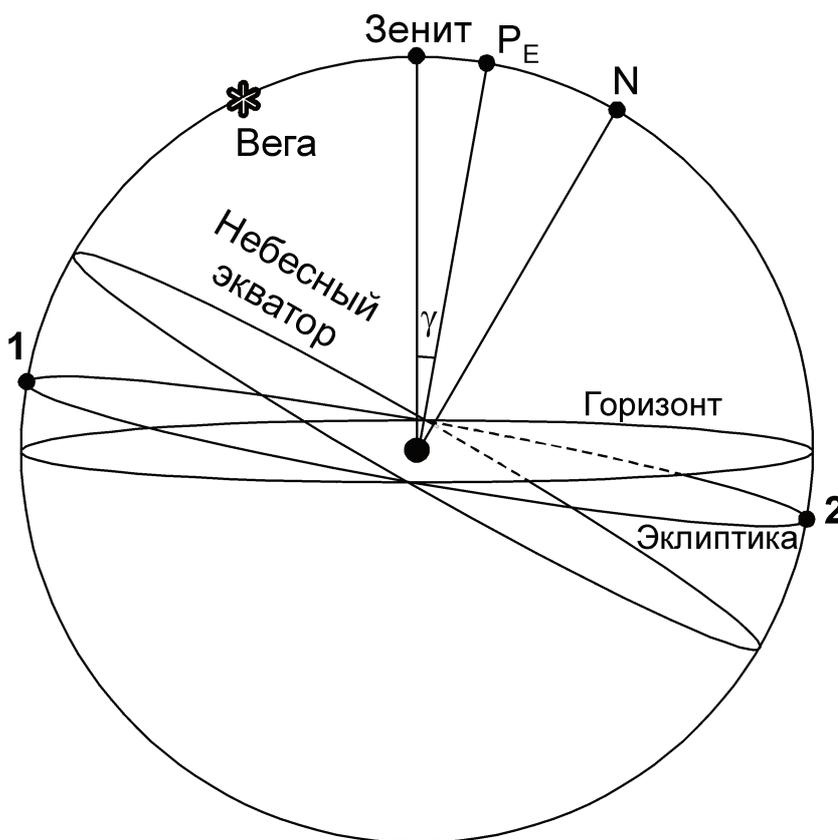
? На каких широтах на Земле можно (хотя бы раз в год) увидеть звезду Вега в верхней кульминации на темном небе, при погружении центра Солнца под горизонт более 6 градусов? Координаты Веге считать равными $\alpha=18^h$, $\delta=+39^\circ$, рефракцией пренебречь.

! Заданное в условии задачи прямое восхождение Веге (18 часов) совпадает с прямым восхождением точки зимнего солнцестояния (точки **1**). Следовательно, верхняя кульминация Веге и данной точки происходят одновременно. Рассмотрим положение Веге и эклиптики на небесной сфере в этот момент.

Обозначим цифрой **2** точку летнего солнцестояния с прямым восхождением 6 часов. Эта точка в настоящий момент находится в нижней кульминации. Точки весеннего и осеннего равноденствия, имеющие прямые восхождения 0 и 12 часов, совпадают с точками востока и запада соответственно и находятся на горизонте. Следовательно, одна из двух точек (**1** или **2**) является наивысшей точкой эклиптики, а другая – ее самой низкой точкой.

Вне зависимости от сезона года Солнце находится на эклиптике. Чтобы хоть раз в году увидеть Вегу в верхней кульминации на темном небе, у эклиптики должна существовать зона, погруженная под горизонт глубже, чем на 6° . Иными словами, одна из точек – **1** или **2** – должна располагаться на зенитном расстоянии, большем 96° (обозначим эту величину z_T).

Склонение точки **1** равно $-\varepsilon$, склонение точки **2** составляет $+\varepsilon$, где ε – величина наклона экватора к эклиптике (около 23.4°). Запишем выражения для зенитных расстояний точки **1** в верхней кульминации и точки **2** в нижней кульминации:



$$z_1 = |\varphi - \delta| = |\varphi + \varepsilon| > z_T,$$

$$z_2 = 180^\circ - |\varphi + \delta| = 180^\circ - |\varphi + \varepsilon| > z_T.$$

Для выполнения условия задачи должно выполняться любое одно из этих неравенств. Решая их, получаем:

$$\varphi > 72.6^\circ \text{ или } \varphi < 60.6^\circ.$$

Здесь мы учли, что значение широты по модулю не может превышать 90° . К данному выводу можно было прийти другим, более простым способом. Обозначим на рисунке северный полюс эклиптики как P_E . Его прямое восхождение совпадает с прямым восхождением Веги, а склонение составляет $90^\circ - \varepsilon$ или 66.6° . Если в момент верхней кульминации полюс эклиптики будет отстоять от зенита не более, чем на 6° (угол γ на рисунке), то все точки самой эклиптики будут располагаться не дальше, чем 6° от горизонта, и Вега не будет видна в верхней кульминации на темном небе. Считая, что зенитное расстояние полюса эклиптики более 6° , получаем те же интервалы значения широты.

Для получения окончательного ответа мы должны учесть, что Вега сама должна быть видна на небе в верхней кульминации, то есть не быть невосходящей звездой. Обозначив склонение Веги как δ_V , запишем условие для ее зенитного расстояния в верхней кульминации:

$$z_V = |\varphi - \delta_V| < 90^\circ.$$

Отсюда получаем, что широта должна быть севернее -51° . Итак, условие задачи выполняется на интервалах широты $(-51^\circ, 60.6^\circ)$, $(72.6^\circ, 90^\circ]$.

XI. 2 **ТЕЛЕСКОП И СОЛНЦЕ**

Е.Н. Фадеев

? Телескоп с объективом диаметром 20 см навели на Солнце. Безопасно ли в него смотреть, если в фокальную плоскость телескопа ввели диафрагму, которая закрывает все Солнце, кроме одного солнечного пятна поперечником 20000 км? Диаметр выходного зрачка окуляра равен диаметру зрачка наблюдателя, который решил посмотреть в этот телескоп. Сравните освещенность, создаваемую солнечным пятном через этот телескоп, с освещенностью от других небесных объектов.

! Наблюдение Солнца без защитных средств опасно для зрения сразу по ряду причин. Даже при наблюдении без телескопа это, в конце концов, плачевно отразится на зрении. Самым быстрым поражающим фактором будет ультрафиолетовое излучение Солнца, которое негативно влияет на сетчатку глаза. Через оптическую схему обычного телескопа ультрафиолетовое излучение не проходит, но телескоп собирает значительно больше света, чем невооруженный глаз, что усиливает негативное влияние других факторов.

На те части глаза, которые находятся до хрусталика, падает пучок света, толщина которого равна диаметру зрачка. Если в этом пучке будет заключена большая энергия, то может пострадать роговица или хрусталик. Сам же хрусталик действует как собирающая линза, и собираемый им свет станет «выжигать» сетчатку.

Известно, что диаметр зрачка меняется в зависимости от освещенности. При ночных наблюдениях почти в полной темноте диаметр зрачка становится около 6-8 мм, а на ярком свете – уменьшается до 1-2 мм. Если принять диаметр зрачка и выходного зрачка телескопа за 1 мм, то увеличение телескопа составляет 200 крат. Если бы этот телескоп собирал свет со всего диска Солнца, то освещенность зрачка возросла бы в 40000 раз.

Вставим в схему диафрагму, пропускающую свет только одного участка поверхности Солнца, по радиусу в 70 раз меньшего всего диска. Тогда до глаза наблюдателя будет проходить только $(1/70)^2$ света полного Солнца. Если бы в данной части Солнца не находилось пятно, в глаз наблюдателя попало бы в 8 раз больше света, чем от полного Солнца без использования телескопа.

Но нам необходимо учесть, что температура солнечных пятен на 1500 градусов меньше температуры солнечной фотосферы. По закону Стефана-Больцмана отношение величин интенсивности (яркости единицы угловой площади) равно отношению температур в четвертой степени. То есть, светимость пятна примерно в 4 раза меньше.

Следовательно, в глаз наблюдателя, который захочет посмотреть на солнечное пятно в наш телескоп, попадет примерно в 2 раз больше света, чем если бы он смотрел на Солнце без телескопа. Угловой диаметр пятна при наблюдении в телескоп составит примерно 1.5° , т.е. пятно будет выглядеть по радиусу втрое больше, чем Солнце невооруженным глазом, но при этом его поверхностная яркость будет в 4 раза слабее.

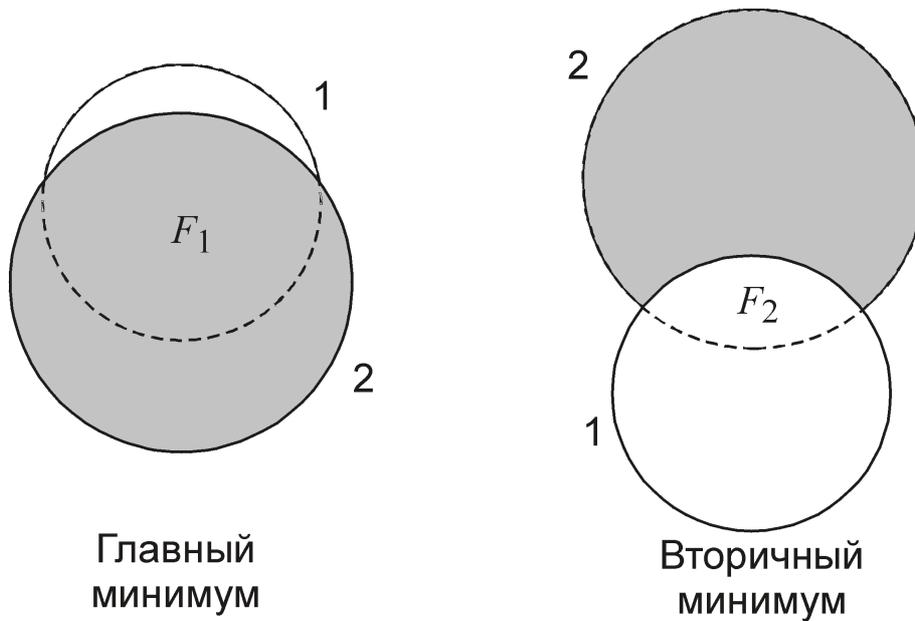
Из всего сказанного делаем вывод, что при взгляде в окуляр наблюдатель увидит солнечное пятно, по общей (но не поверхностной) яркости превосходящее Солнце при наблюдении глазом. Это не приведет к мгновенному поражению зрения, но смотреть на такой объект все же нельзя.

XI. 3 МИНИМУМЫ ЗАТМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

О.С. Угольников

? Главный минимум затменной переменной двойной звезды имеет глубину 1^m . Какой может быть величина вторичного минимума этой звезды? Звезды считать сферическими, эффектами отражения света от поверхности звезд и потемнением их дисков к краю пренебречь.

! Как известно, затменная переменная звезда – двойная система, в которой звезды в ходе орбитального движения периодически затмевают друг друга. Если звезды сферические и удалены от Солнца на расстояние, значительно превышающее размеры системы, а орбиты звезд круговые, то звезды по очереди будут закрывать одну и ту же угловую площадь поверхности друг друга. Однако в случае эллиптических орбит эта площадь может различаться.



Во время главного минимума общая яркость системы уменьшается в K раз:

$$K = 10^{-0.4\Delta m_1} = 0.4.$$

Обозначим величины яркости двух звезд как J_1 и J_2 . Пусть во время главного минимума закрылась часть первой звезды. Обозначим эту часть («площадную фазу» затмения) как F_1 . Тогда

$$K = \frac{(1 - F_1) \cdot J_1 + J_2}{J_1 + J_2} = 1 - \frac{F_1 \cdot J_1}{J_1 + J_2}.$$

Отсюда запишем выражение для яркости второй звезды

$$J_2 = \frac{(F_1 - (1 - K))}{1 - K} J_1 \leq \frac{K}{1 - K} J_1 \approx \frac{2}{3} J_1 = \frac{2}{5} (J_1 + J_2).$$

В неравенстве было учтено, что величина F_1 не превышает единицу. Данный верхний предел достигается при равных размерах звезд и поверхностных яркостях, относящихся как 3:2. Тогда в случае центрального затмения более яркой звезды падение блеска составит 1^m . Во время вторичного минимума затмевается уже вторая звезда. Обозначим площадную фазу затмения как F_2 . Яркость пары будет относиться к аналогичной величине вне затмения как

$$k = \frac{J_1 + (1 - F_2) \cdot J_2}{J_1 + J_2} = 1 - \frac{F_2 \cdot J_2}{J_1 + J_2} \geq 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Максимально возможное падение блеска во время вторичного минимума составит

$$\Delta m_2 = -2.5 \lg k \leq -2.5 \lg \frac{3}{5} = 0.55.$$

Итак, глубина вторичного минимума может составлять от 0^m (если вторая звезда темная или второе затмение не происходит из-за эллиптичности орбит) до 0.55^m (при полных затмениях звезд с одинаковыми размерами и яркостями в отношении 3:2).

XI. 4 АЛЮМИНИЕВЫЙ ПАРУС

А.Н. Акинъчиков

? Идеально отражающий плоский алюминиевый солнечный парус обращается вокруг Солнца по круговой орбите с радиусом 1 а.е. и периодом 1.5 года. Парус всегда расположен перпендикулярно направлению на Солнце. Найдите толщину паруса. Плотность алюминия составляет 2.7 г/см³. Взаимодействие паруса и планет не учитывать.

! Обозначим плотность паруса ρ , его толщину – d , а его площадь – S . На парус будут действовать две силы – притяжение Солнца и световое давление. Они направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны. Сила притяжения, направленная к Солнцу, составляет

$$F_G = \frac{GMSd\rho}{R^2}.$$

Здесь M – масса Солнца, R – расстояние от Солнца до паруса. Сила светового давления в случае идеального отражения равна удвоенному импульсу солнечных фотонов, попадающих в парус в единицу времени. Импульс каждого фотона p равен E/c , где E – его энергия, а c – скорость света. Отсюда получаем величину силы светового давления:

$$F_E = \frac{LS}{2\pi cR^2}.$$

Здесь L – светимость Солнца. Под действием этих двух сил парус движется со скоростью v по окружности радиуса R :

$$Sd\rho \frac{v^2}{R} = \frac{GMSd\rho}{R^2} - \frac{LS}{2\pi cR^2}.$$

Отсюда получаем выражение для скорости:

$$v^2 = \frac{GM}{R} - \frac{L}{2\pi cd\rho R} = v_0^2 - \frac{L}{2\pi cd\rho R}.$$

Здесь v_0 – круговая скорость движения под действием только силы тяготения (орбитальная скорость Земли). Толщина паруса равна

$$d = \frac{L}{2\pi c\rho R(v_0^2 - v^2)} = \frac{Lv_0^2}{2\pi GMc\rho(v_0^2 - v^2)}.$$

Выражая скорости через орбитальные периоды, получаем:

$$d = \frac{LT^2T_0^2}{8\pi^3 c\rho R^3(T^2 - T_0^2)} = \frac{LT^2}{2\pi GMc\rho(T^2 - T_0^2)}.$$

Здесь T – период обращения паруса, T_0 – период обращения Земли вокруг Солнца. Толщина паруса составляет 1 микрону.

XI. 5

ПРОХОЖДЕНИЕ ВЕНЕРЫ - СКВОЗЬ ВЕКА

О.С. Угольников

? 4 июня 1769 года в Санкт-Петербурге на специально построенной обсерватории российская императрица Екатерина II сначала наблюдала прохождение Венеры по диску Солнца, а затем (в тот же день!) частное солнечное затмение. Оцените, через сколько лет на нашей планете вновь можно будет наблюдать прохождение Венеры по диску Солнца и солнечное затмение с интервалом менее одних суток.

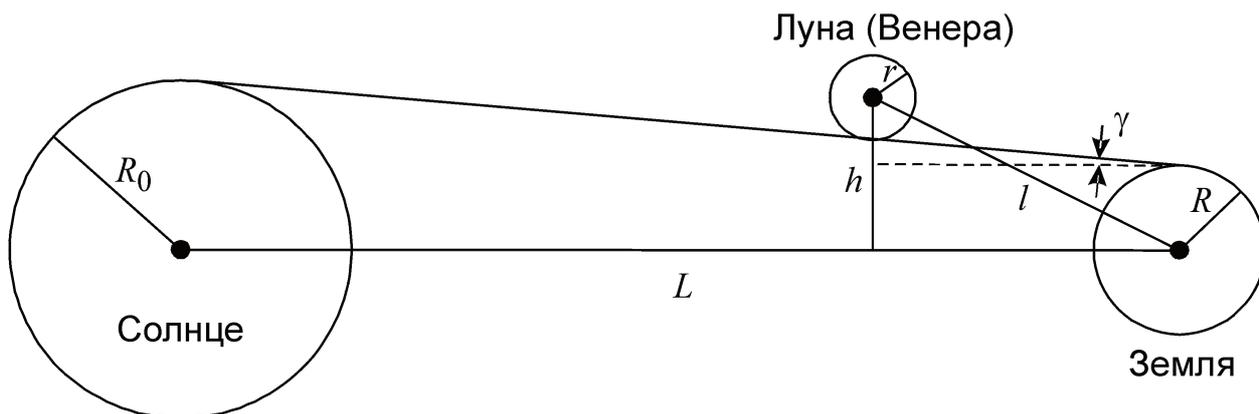
! Для решения задания нужно определить условие, при котором Венера в нижнем соединении или Луна в новолунии будут проецироваться на диск Солнца при наблюдении хотя бы из одной точки Земли. Задача имеет оценочный характер и связана с анализом больших интервалов времени. Поэтому орбиты Венеры, Земли и Луны могут считаться круговыми.

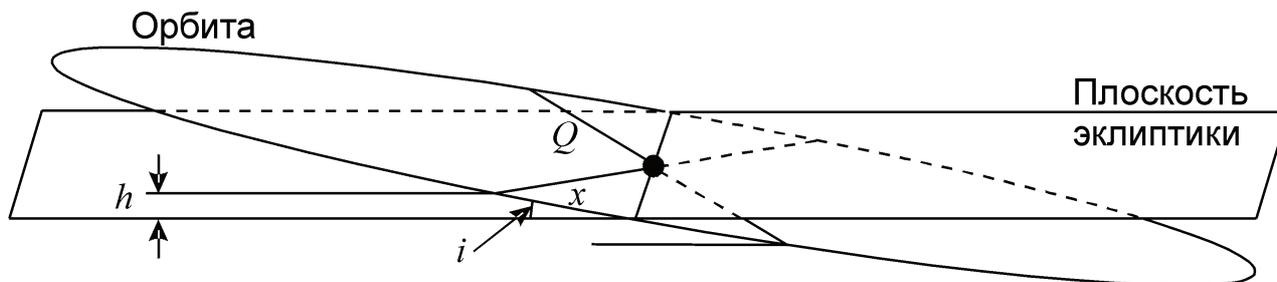
На рисунке изображен предельный случай, при котором касательное явление (затмение или прохождение Венеры) видно в одной точке Земли. Обозначим расстояние от Земли до Солнца через L , а расстояние от Земли до затмевающего объекта (Венеры либо Луны) через l . С учетом малости угловых размеров Солнца, Луны и Венеры можно записать выражение для максимального удаления Луны или Венеры от линии «Солнце-Земля», при котором происходит явление:

$$h = R + l\gamma + r = R + r + \frac{R_0 - R}{L}l = R_0 \frac{l}{L} + R \frac{L-l}{L} + r.$$

Здесь R_0 , R и r – радиусы Солнца, Земли и Луны (Венеры) соответственно. Угол γ показан на рисунке. Движение Луны и Венеры происходит под небольшими углами к плоскости эклиптики, и величина h есть максимальное расстояние центра Луны (Венеры) от плоскости эклиптики в момент новолуния (нижнего соединения), при котором может произойти затмение (прохождение Венеры по диску Солнца). Значение этой величины составляет примерно 9900 км для Луны и 203000 км для Венеры.

Определим, какая доля новолуний (нижних соединений Венеры) удовлетворяет данному условию. Для этого изобразим орбиту Луны (Венеры) и плоскость эклиптики (справа):





Обозначим угол наклона плоскости орбиты к эклиптике через i , радиус орбиты – через Q . Величина h существенно меньше максимального удаления точки орбиты от плоскости эклиптики Qi (равного 35000 км для Луны и 6.5 млн км для Венеры). Для того, чтобы точка орбиты находилась не далее расстояния h от плоскости эклиптики, она должна быть удалена от узла орбиты не далее, чем на расстояние:

$$x = \frac{h}{i}.$$

Здесь мы учли, что наклонение орбит Луны и Венеры не очень велико. Данная точка орбиты может находиться с двух сторон от каждого из двух узлов этой орбиты. В итоге, доля всей длины орбиты, расположенная не далее расстояния h от плоскости эклиптики, составляет:

$$P = \frac{2 \cdot 2x}{2\pi Q} = \frac{2h}{\pi Qi}.$$

Учтем, что для Луны (далее – индекс «L») величина Q равна расстоянию от Земли до Луны l_L , а для Венеры (индекс «V») она равна $(L - l_V)$. В итоге получаем:

$$P_L = \frac{2}{\pi i_L} \left(\frac{R_0}{L} + R \frac{L - l_L}{L l_L} + \frac{r_L}{l_L} \right) = \frac{2}{\pi i_L} \left(\rho_0 + \rho_L + R \frac{L - l_L}{L l_L} \right) = 0.182 \approx \frac{1}{5.5}.$$

$$P_V = \frac{2}{\pi i_V} \left(R_0 \frac{l_V}{L(L - l_V)} + \frac{R}{L} + \frac{r_V}{L - l_V} \right) = \frac{2}{\pi i_V} \left(R_0 \frac{L - Q_V}{L Q_V} + p_0 + p_V \right) = 0.0202 \approx \frac{1}{50}.$$

Здесь ρ_0 и ρ_L – видимые радиусы Солнца и Луны при наблюдении с Земли, а p_0 и p_V – экваториальные параллаксы Солнца при наблюдении с Земли и Венеры. Эти параллаксы значительно меньше другого слагаемого во второй формуле и могут не приниматься в расчет. Данные значения показывают, что в среднем только одно из 5.5 новолуний сопровождается солнечным затмением (для упрощения число 5.5 можно заменить на 6 и считать, что затмения происходят раз в полгода), а прохождение Венеры по диску Солнца происходит лишь однажды из 50 ее нижних соединений.

Обозначим синодические периоды Луны и Венеры как S_L и S_V . Средний промежуток времени между солнечными затмениями равен

$$T_L = \frac{S_L}{P_L} \approx 162 \text{ сут.}$$

Средний промежуток времени между двумя прохождениями Венеры по диску Солнца составляет

$$T_V = \frac{S_V}{P_V} \approx 80 \text{ лет}.$$

Вероятность того, что за время t (одни сутки) до прохождения Венеры или за то же время после него произойдет солнечное затмение, составляет

$$q_t = \frac{2t}{T_L} = \frac{2tP_L}{S_L} \approx \frac{1}{81}.$$

Поэтому, в среднем лишь каждое 81-е прохождение Венеры по диску Солнца может сопровождаться солнечным затмением в интервале ± 1 суток. Среднее время между такими событиями составляет

$$T = \frac{T_V}{q_t} = \frac{S_V S_L}{2t P_V P_L} \approx 6400 \text{ лет}.$$

Мы получили лишь характерное значение между подобными явлениями. В реальности, после 1769 года солнечные затмения и прохождения Венеры по диску Солнца не совпадут ни разу в течение 8000 ближайших лет. Трижды за этот период солнечное затмение и прохождение Венеры будут разделены промежутком в два дня (затмение 20 июня и прохождение Венеры 22 июня 3462 года, затмение 22 июня и прохождение Венеры 24 июня 3956 года, затмение 26 июля и прохождение Венеры 28 июля 7844 года). Еще в одну дату, 8 июля 5657 года, состоится прохождение Венеры по диску Солнца и новолуние, при котором солнечное затмение будет наблюдаться в ближайших окрестностях Земли.

XI. 6 АККРЕЦИЯ НА НЕЙТРОННУЮ ЗВЕЗДУ

Е.Н. Фадеев

? Нейтронная звезда движется со скоростью 100 км/с через облако молекулярного водорода с температурой 10 К и плотностью 10^3 см^{-3} . Оцените скорость, с которой нейтронная звезда будет набирать массу вследствие аккреции. Столкновения между частицами облака не учитывать.

! Движущаяся через облако звезда будет захватывать вещество, как непосредственно оказавшееся перед ней, так и притянутое со стороны. Зная температуру облака, можно оценить среднюю скорость молекул водорода:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{5kT}{m}} \approx 450 \text{ м/с}.$$

Здесь k – постоянная Больцмана, T – температура облака, m – масса молекулы водорода. Средняя скорость молекул оказалась на два с лишним порядка меньше скорости нейтронной звезды. Мы пренебрегаем столкновениями между частицами и будем считать, что изначально они неподвижны относительно звезды.

Будем также считать, что нейтронная звезда аккрецирует на себя все частицы облака, которые окажутся ближе некоторого расстояния b к ее траектории. За время t на звезду упадет масса цилиндра радиусом b и длиной стороны vt . Тогда



за это время нейтронная звезда, движущаяся со скоростью v , притянет массу

$$M_t = mnvt\pi b^2.$$

Здесь n – концентрация молекул водорода. Скорость поступления массы на нейтронную звезду составляет

$$\dot{M} = mnv \cdot \pi b^2.$$

Если предположить, что нейтронная звезда поглотит только те частицы, которые располагаются непосредственно на ее траектории, и расстояние b равно ее собственному радиусу (10 км), то мы получаем весьма небольшое значение темпа аккреции в 10^{-4} кг/с.

Рассмотрим более правдоподобный вариант. Совместим начало координат с центром нейтронной звезды. В этой системе координат молекулы водорода будут налетать на нейтронную звезду с одного направления, двигаясь по гиперболическим орбитам. При этом на звезду будут падать только частицы, у которых перигелий орбиты находится ниже поверхности нейтронной звезды.

Нас интересует граничный случай, при котором частица в перигелии коснется поверхности нейтронной звезды. Скорость частицы на удалении от нейтронной звезды (в этой системе координат) равна v , прицельный параметр равен b . Пусть перигелийское расстояние (или радиус нейтронной звезды) равно r_p , а перигелийская скорость – v_p . Тогда из II закона Кеплера (равенства площадей закрашенных треугольников на рисунке) можно получить простое соотношение:

$$v b = v_p r_p.$$

Из закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{v_p^2}{2} = \frac{v^2}{2} + \frac{GM}{r_p}.$$

Здесь M – масса нейтронной звезды (будем считать ее равной массе Солнца). Подставляя первую формулу во вторую, получаем:

$$\frac{v^2 b^2}{2r_p^2} = \frac{v^2}{2} + \frac{GM}{r_p}.$$

Отсюда получаем выражение для прицельного параметра:

$$b^2 = r_p^2 + \frac{2GM r_p}{v^2} \approx \frac{2GM r_p}{v^2}.$$

Темп аккреции составит:

$$\dot{M} = \frac{2\pi GM m n r_p}{v} = 280 \text{ кг / с.}$$