10 класс

1. Условие. Спутник, движущийся по круговой экваториальной орбите в направлении вращения планеты, проходит над станцией слежения 5 раз в звездные сутки. Над станцией слежения проходит также спутник, движущийся по круговой полярной орбите такого же радиуса, что и орбита первого спутника. Как часто он проходит над этой станцией? Форма планеты – сферическая, действием на спутники всех других тел, кроме этой планеты, пренебречь.

1. Решение. Обозначим звездные сутки как T_E. Синодический период обращения спутника составляет $S = T_E / 5$. Из уравнения синодического движения можем вычислить период обращения спутника:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_E},$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T_E} = \frac{T_E + S}{T_E S},$$

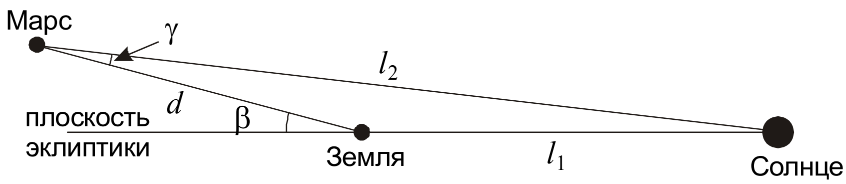
$$T = \frac{T_E S}{T_E + S} = \frac{1}{6} T_E.$$

Этот период будет одинаковым для обоих спутников, поскольку радиус орбит у них совпадает. Полярный спутник может пройти над станцией слежения только тогда, когда он пересекает плоскость экватора. Причем это может произойти только в два момента звездных суток, когда сама станция слежения проходит через плоскость полярной орбиты спутника.

Известно, что в некоторый момент времени полярный спутник проходил над станцией слежения. Через половину звездных суток станция слежения вновь пройдет в плоскости орбиты полярного спутника, но с противоположной стороны. За это же время спутник совершит три полных оборота и окажется в «начальной» точке, не над текущим положением станции слежения. Вообще, поскольку период спутника в четное число раз меньше периода обращения планеты, он не сможет пройти над станцией слежения в точке, противоположной начальной. Через звездные сутки после начального момента спутник совершит точно 6 оборотов и вновь окажется в исходной позиции над станцией. Значит, он будет проходить над станцией 1 раз в звездные сутки.

2. Условие. 4 марта 2012 года наступит противостояние Марса, при котором он будет располагаться на небе в 4.6° севернее эклиптики и иметь угловой диаметр 13.9″. Каким будет угловое расстояние между Солнцем и Землей при наблюдении с Марса в этот день?

2. Решение. Марс находится в противостоянии с Солнцем, следовательно, он проходит через плоскость, перпендикулярную эклиптике и содержащую Солнце и Землю. Изобразим все три тела в данной плоскости:



Зная угловой диаметр Марса δ, можно найти расстояние между Землей и Марсом:

$$d = D / \delta.$$

Здесь D – диаметр Марса. Расстояние получается равным 0.67 а.е. Обозначим угловое расстояние между Марсом и линией эклиптики на небе Земли как β. Расстояние между Солнцем и Марсом l_2, строго говоря, вычисляется по теореме косинусов

$$l_2^2 = l_1^2 + d^2 + 2 l_1 d \cos\beta,$$

но с учетом малости угла β и близости его косинуса к единице:

$$l_2 = l_1 + d = 1.67 \text{ а.е.}$$

Здесь l_1 – радиус орбиты Земли, которую можно считать круговой. Искомое угловое расстояние между Солнцем и Землей на небе Марса вычисляется из теоремы синусов:

$$\sin\gamma = \sin\beta\ (l_1/l_2).$$

Угол γ составляет 2.8°.

3. Условие. В октябре 2007 года комета Холмса с ядром радиусом 3.3 км, имеющая блеск около 16^m, в результате взрыва резко разгорелась до 2^m. Считая, что при взрыве все ядро распалось на одинаковые осколки, определите радиус этих осколков. Вклад частиц вне ядра в яркость кометы до вспышки не учитывать.

3. Решение. Обозначим через R первоначальный радиус кометы, а через r – радиус осколков. Пусть m_0 и m – звездные величины до и после взрыва. Изначальная яркость кометы пропорциональна видимой площади ее поверхности:

$$J_0 = C\,\pi\,R^2.$$

Здесь C – некая постоянная величина. Объем ядра кометы составлял

$$V = 4/3\ \pi\ R^3.$$

После взрыва комета распалась на N осколков с радиусом r и объемом V/N:

$$V/N = 4/3\ \pi\ r^3.$$

Отсюда получаем:

$$r/R = (1/N)^{1/3}.$$

Яркость кометы вновь пропорциональна видимой суммарной площади осколков с той же постоянной, так как взрыв кометы произошел быстро, и она фактически осталась в той же точке пространства:

$$J = N\,C\,\pi\,r^2 = J_0\,N^{1/3}.$$

Из последних двух уравнений с учетом формулы Погсона имеем:

$$\frac{r}{R} = \frac{J_0}{J} = 10^{0.4\,(m - m_0)} = 2.5 \cdot 10^{-6}.$$

Характерный радиус осколков ядра кометы составляет 8 мм.

4. Условие. Два космических аппарата улетают от Земли в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями относительно Земли. На одном из них расположен источник излучения, а на втором приемник. Приемник фиксирует то, что излучение до него доходит на другой длине волны. Изменение длины волны $\Delta\lambda$ составляет 0.1 от самой длины волны λ. Найдите скорости аппаратов относительно Земли.

4. Решение. Изменение длины волны достаточно большое, но все же заметно меньше самой длины волны. Поэтому мы можем использовать классические формулы для эффекта Доплера, считая скорости существенно меньшими скорости света. Скорость удаления аппарата с приемником от аппарата с источником равна

$$u = c\ \Delta\lambda / \lambda.$$

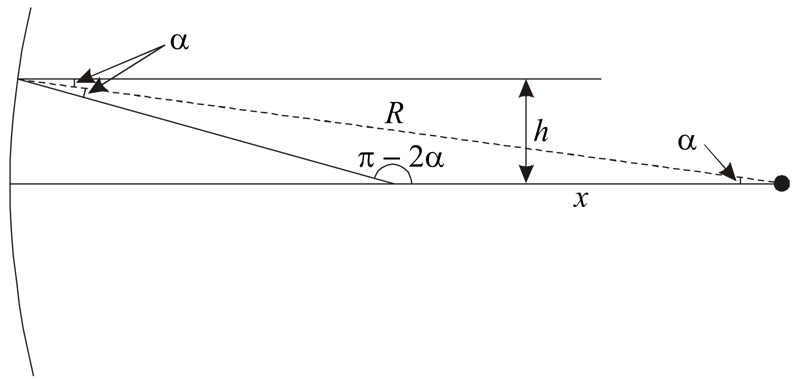
Так как скорости аппаратов относительно Земли равны и направлены в противоположные стороны, их величины составляют

$$v = u/2 = c\ \Delta\lambda / 2\ \lambda = 15\ 000 \text{ км/с}.$$

5. Условие. Световой пучок падает вдоль оптической оси на сферическое зеркало диаметром d с радиусом кривизны R. Определите расстояние фокуса зеркала от центра кривизны, если $d << R$.

5. Решение. Рассмотрим луч, идущий вдоль оптической оси на расстоянии h от нее. Этот луч отразившись от зеркала пересечет оптическую ось на искомом расстоянии x от центра кривизны. Пусть угол отражения равен α. Тогда

$$\sin\alpha = h/R.$$



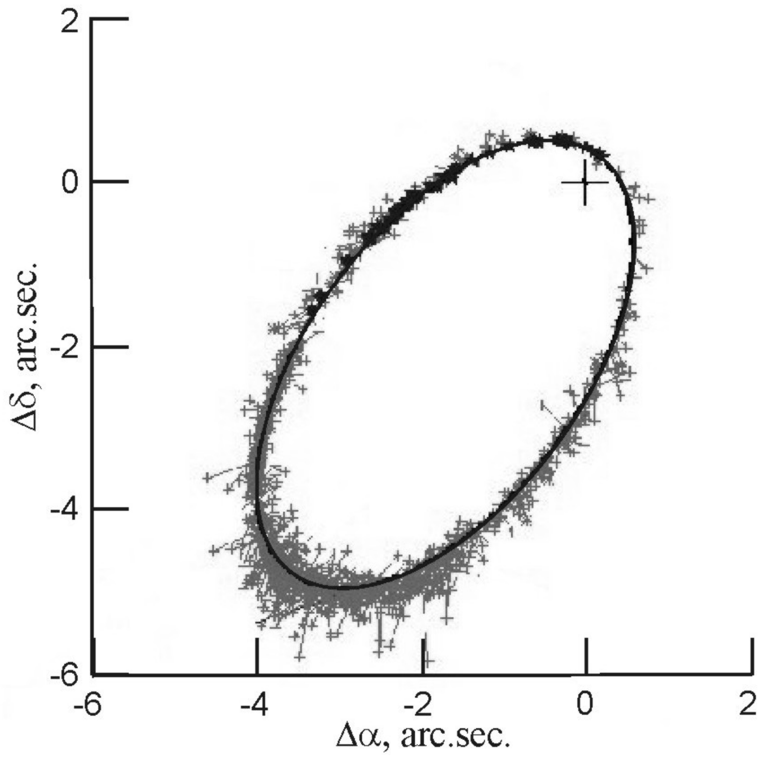
Обратим внимание, что угол между оптической осью зеркала и радиусом в точке касания также равен α. Воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\pi - 2\alpha)},$$

$$x = R\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{2\cos\alpha} = \frac{R}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}.$$

Таким образом, если диаметр зеркала много меньше, чем его радиус кривизны, то синус будет равен нулю, вторая дробь обратится в единицу, и лучи, параллельные оптической оси, будут собираться на расстоянии $R/2$ от центра кривизны зеркала.

6. Условие. Двойная звезда Поррима (γ Девы) состоит из двух одинаковых компонент. На рисунке приведены измеренные положения одной из звезд (маленькие крестики) относительно другой, которая считалась неподвижной и помечена большим крестом. Измерения производились в течение орбитального периода (169 лет). Усредненные положения показаны в виде линии эллипса. Считая, что малая ось орбит звезд в пространстве лежит в плоскости рисунка, найдите наклон самой плоскости орбит к плоскости рисунка.



6. Решение. На рисунке показан видимый путь одной звезды относительно другой. В реальности обе звезды движутся вокруг центра масс по орбитам одинаковой формы в одной плоскости, одновременно проходя перицентр. При этом эксцентриситет каждой из орбит будет равен эксцентриситету эллипса, который одна звезда описывает вокруг другой. Поэтому мы можем рассматривать данный эллипс в задаче и считать одну из звезд неподвижной.

Из рисунка, данного в условии задачи, мы можем определить три параметра: видимую большую полуось эллипса a – 3.12″, видимую малую полуось эллипса b – 1.65″, видимое перицентрическое расстояние p – 0.36″.

По условию задачи, малая ось орбит звезд лежит в плоскости наблюдения (перпендикулярна направлению на наблюдателя), и ее видимые размеры соответствуют пространственным. Большая ось эллипса образует с картинной плоскостью угол i, и ее видимые размеры уменьшаются из-за эффекта проекции:

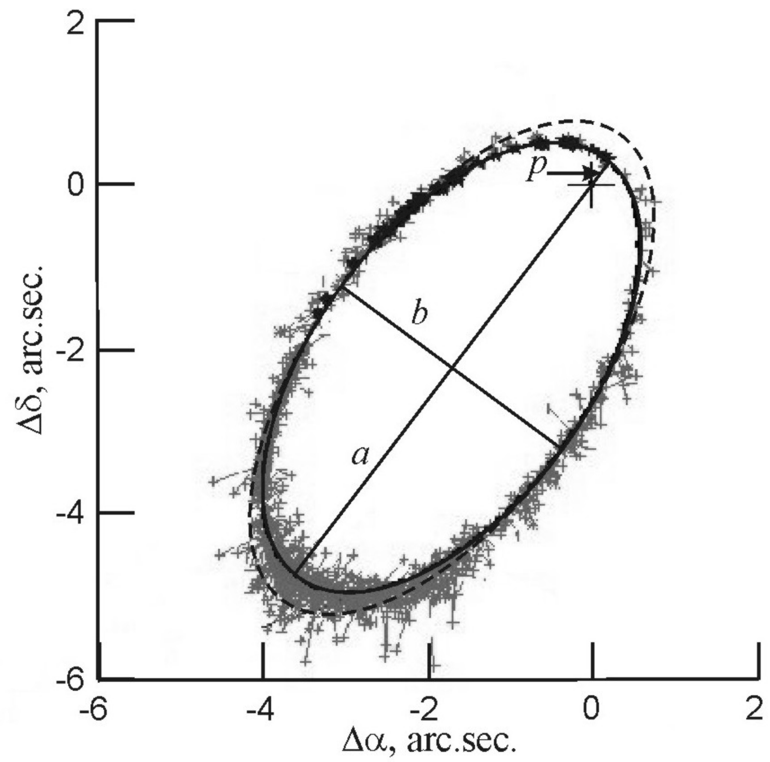
$$a = a_0 \cos i.$$

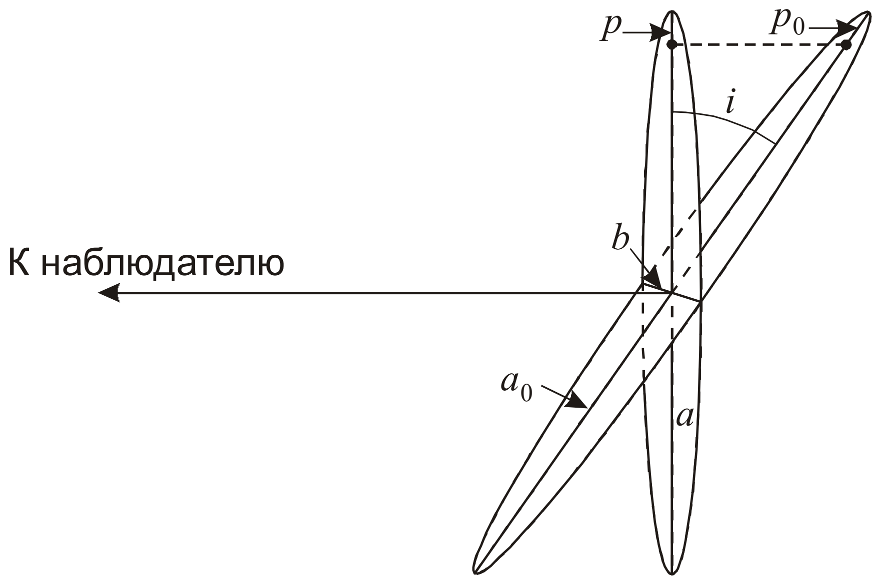
То же самое относится и к перицентрическому расстоянию:

$$p = p_0 \cos i.$$

Отсюда мы можем определить эксцентриситет орбит звезд:

$$e = \frac{a_0 - p_0}{a_0} = \frac{a - p}{a} = 0.88.$$





С другой стороны, большая полуось эллипса выражается из малой с помощью формулы:

$$a_0 = \frac{b}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Отсюда мы получаем искомый угол наклона:

$$i = \arccos\frac{a}{a_0} = \arccos\frac{a\sqrt{1-e^2}}{b} = 26^\circ.$$

Если бы орбиты компонент Порримы лежали в плоскости неба, видимая траектория одной звезды относительно другой представляла бы более вытянутый эллипс, показанный на рисунке пунктирной линией. В реальности, линия узлов орбит спутников несколько отличается от малой оси, и наклон орбит звезд γ Девы к плоскости неба немного превышает полученное значение.