

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР



9 класс



## IX. 1

### ВОСТОЧНЫЙ ЭКСПРЕСС

О.С. Угольников

**?** Поезд движется равномерно на восток со скоростью 50 км/ч. Его пассажиры наблюдают верхнюю кульминацию Луны один раз в сутки в один и тот же момент по Всемирному времени. На какой широте находится поезд? Эксцентриситетом орбиты Луны и ее наклоном к плоскости экватора, а также сжатием Земли пренебречь.

**!** Если пренебречь эксцентриситетом орбиты Луны и ее наклоном к плоскости экватора, то можно считать, что она равномерно движется по орбите с запада на восток с периодом  $T_L = 27.32$  суток. За 24 часа ( $t$ ) она пройдет дугу величиной

$$\lambda_L = 360^\circ \frac{t}{T_L} = 13.18^\circ.$$

Сама Земля, обращаясь вокруг своей оси с периодом  $T_E$  (23 часа 56 минут и 4 секунды), сделает за сутки целый оборот (так же, с запада на восток) и дополнительно повернется на угол

$$\lambda_E = 360^\circ \frac{t - T_E}{T_E} = 0.986^\circ.$$

В итоге, через 24 часа Луна окажется в верхней кульминации на другом меридиане Земли, смещенном к востоку на величину

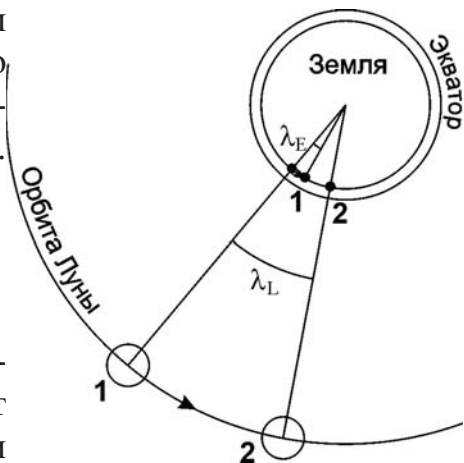
$$\lambda_L - \lambda_E = 12.2^\circ = 0.213 \text{ радиан.}$$

Поезд движется на восток, а верхняя кульминация Луны наблюдается один раз в сутки. Поэтому мы можем не рассматривать случаи совершения поездом более одного оборота вокруг оси Земли за день. Длина окружности параллели Земли с широтой  $\varphi$  равна  $R \cos \varphi$ , где  $R$  – радиус Земли. Путь, который прошел поезд, составляет

$$L = vt = R \cos \varphi (\lambda_L - \lambda_E).$$

Отсюда

$$\varphi = \pm \arccos \frac{vt}{R \cdot (\lambda_L - \lambda_E)} = \pm 28^\circ.$$



## IX. 2

## УДИВИТЕЛЬНАЯ ЗВЕЗДА

О.С. Угольников

**?** Во время проведения олимпиады, 9 апреля 2015 года, максимума блеска достигает самая известная долгопериодическая переменная звезда Миры ("Удивительная") Кита (прямое восхождение  $02^{\text{h}}19^{\text{m}}$ , склонение  $-3.0^\circ$ ). На какой максимальной северной широте на Земле ее можно будет увидеть в этот день при погружении Солнца под горизонт не менее  $12^\circ$ ? Атмосферное поглощение и рефракцию не учитывать. Орбиту Земли считать круговой.

**!** Максимум Миры Кита произойдет через время  $t$  (20 дней) после дня весеннего равноденствия. Считая орбиту Земли круговой, определим, какой путь за это время преодолело Солнце в своем видимом движении по эклиптике:

$$l = 360^\circ \frac{t}{T} \approx 20^\circ.$$

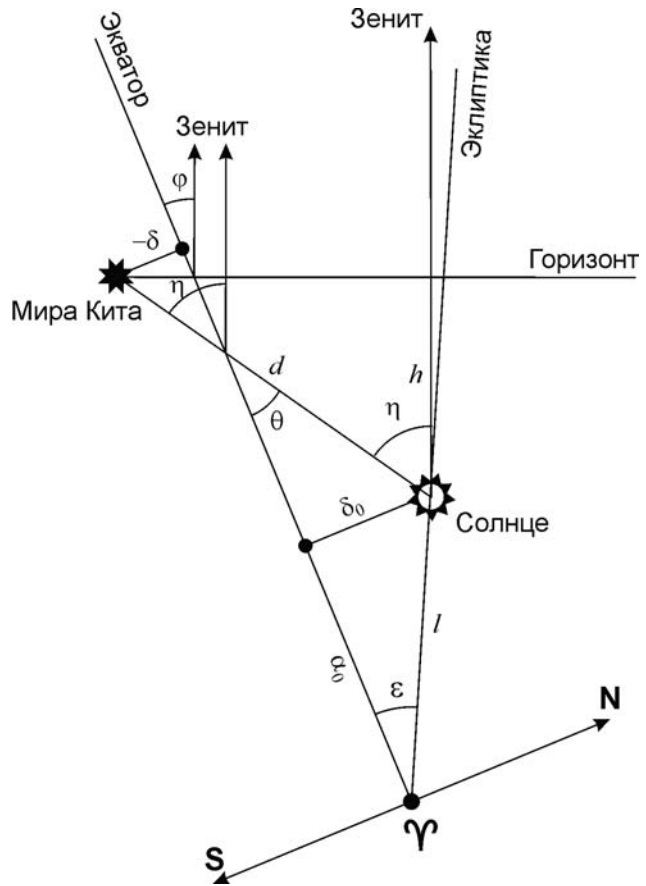
Здесь  $T$  – продолжительность года. Солнце сместилось за это время по эклиптике к востоку и к северу. Учитывая, что дуга  $l$  невелика, координаты Солнца можно вычислить следующим образом:

$$\alpha_0 = l \cos \varepsilon = 360^\circ \frac{t}{T} \cos \varepsilon = 18^\circ;$$

$$\delta_0 = l \sin \varepsilon = 360^\circ \frac{t}{T} \sin \varepsilon = +8^\circ.$$

Звезда Миры Кита, как видно по координатам, также располагается восточней точки весеннего равноденствия на несколько большем угловом расстоянии. При этом звезда находится южнее Солнца по склонению, и можно ожидать, что наиболее благоприятные условия для ее наблюдения сложатся в южном полушарии Земли, а в северном полушарии она будет видна только до некоторой параллели, широту которой нам и нужно найти. Рассмотрим предельный случай – заход Миры Кита при погружении Солнца под горизонт  $h=12^\circ$ . Отметим на рисунке положение Солнца, Миры Кита и точки весеннего равноденствия. Все три точки располагаются на небе сравнительно недалеко друг от друга, и соответствующую часть небесной сферы можно изобразить на плоскости (рисунок).

Обозначим прямое восхождение Миры Кита как  $\alpha$ , а ее склонение как  $\delta$ . Переведем прямое восхождение Миры в градусную меру (около  $35^\circ$ ). Учитывая, что Солнце и Миры Кита располагаются недалеко от небесного экватора, причем по



разные стороны от него, угловое расстояние между ними можно вычислить по теореме Пифагора:

$$d = \sqrt{(\alpha - \alpha_0)^2 + (\delta - \delta_0)^2} = 20^\circ.$$

Эта величина больше  $12^\circ$ , поэтому Мира Кита может быть видна хотя бы где-нибудь на Земле. Угол между направлением на зенит и линией "Солнце – Мира Кита" равен

$$\eta = \arccos \frac{h}{d} = 53^\circ.$$

Учитывая, что картина наблюдается вблизи экватора, угол между линией "Солнце – Мира Кита" и экватором можно вычислить как

$$\theta = \arctg \frac{\delta_0 - \delta}{\alpha - \alpha_0} = 33^\circ.$$

Угол между направлением на зенит и экватором равен

$$\varphi = \eta - \theta = 20^\circ.$$

Это и есть максимальная северная широта, где Мира Кита может быть видна при погружении Солнца под горизонт не менее  $12^\circ$ .

## IX. 3 ТРАНЗИТ ДЛИНОЮ В ДЕНЬ

О.С. Угольников

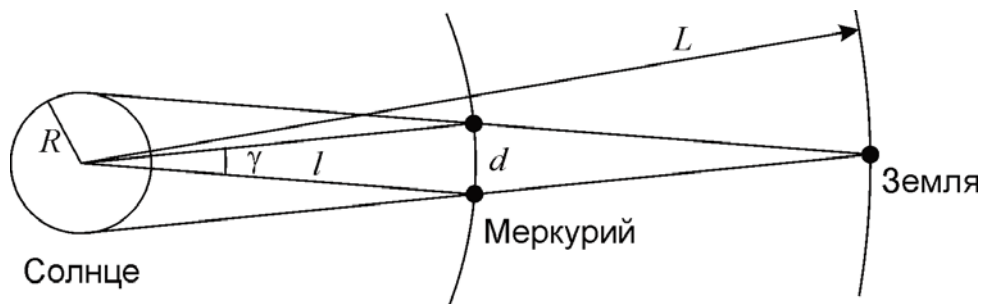
**?** При наблюдении из некоторого пункта в России прохождение Меркурия по диску Солнца началось на восходе Солнца, а закончилось на его заходе. В какой месяц года это произошло? Орбиту Меркурия считать круговой.

**!** Определим, какую продолжительность могут иметь прохождения Меркурия по диску Солнца. Для простоты будем считать размеры Меркурия и Земли много меньшими размеров Солнца. Перейдем в систему отсчета, вращающуюся вокруг Солнца вместе с Землей. В этой системе Меркурий будет обращаться вокруг Солнца с синодическим периодом  $S$ . По ходу прохождения Меркурий преодолевает расстояние  $d$ , равное

$$d = \frac{2R \cdot (L - l)}{L}.$$

Здесь  $R$  – радиус Солнца,  $l$  и  $L$  – расстояния от Солнца до Меркурия и Земли. Дуга, которую при этом Меркурий пройдет по орбите (в данной системе), составляет

$$\gamma = \frac{d}{l} = \frac{2R \cdot (L - l)}{Ll}.$$



Продолжительность центрального прохождения Меркурия по диску Солнца составит

$$t = \frac{S \cdot \gamma}{2\pi} = \frac{S \cdot R \cdot (L - l)}{\pi L l} = 6.5 \text{ час.}$$

Это существенно меньше 12 часов. Даже если мы учтем эллиптичность орбиты Меркурия, это не изменит ситуацию. Как известно, прохождение Меркурия по диску Солнца может наступить только вблизи двух узлов его орбиты в мае и ноябре. Из этих двух месяцев, столь коротким световой день в России может быть только в ноябре.

Ситуация, близкая к описанной в условии задачи, случится 13 ноября 2032 года на востоке Мурманской области России. Данное прохождение Меркурия не будет центральным и продлится еще меньше: около 4.5 часов.

## IX. 4 НАВИГАЦИЯ В ДРЕВНЕМ МИРЕ

Е.Н. Фадеев

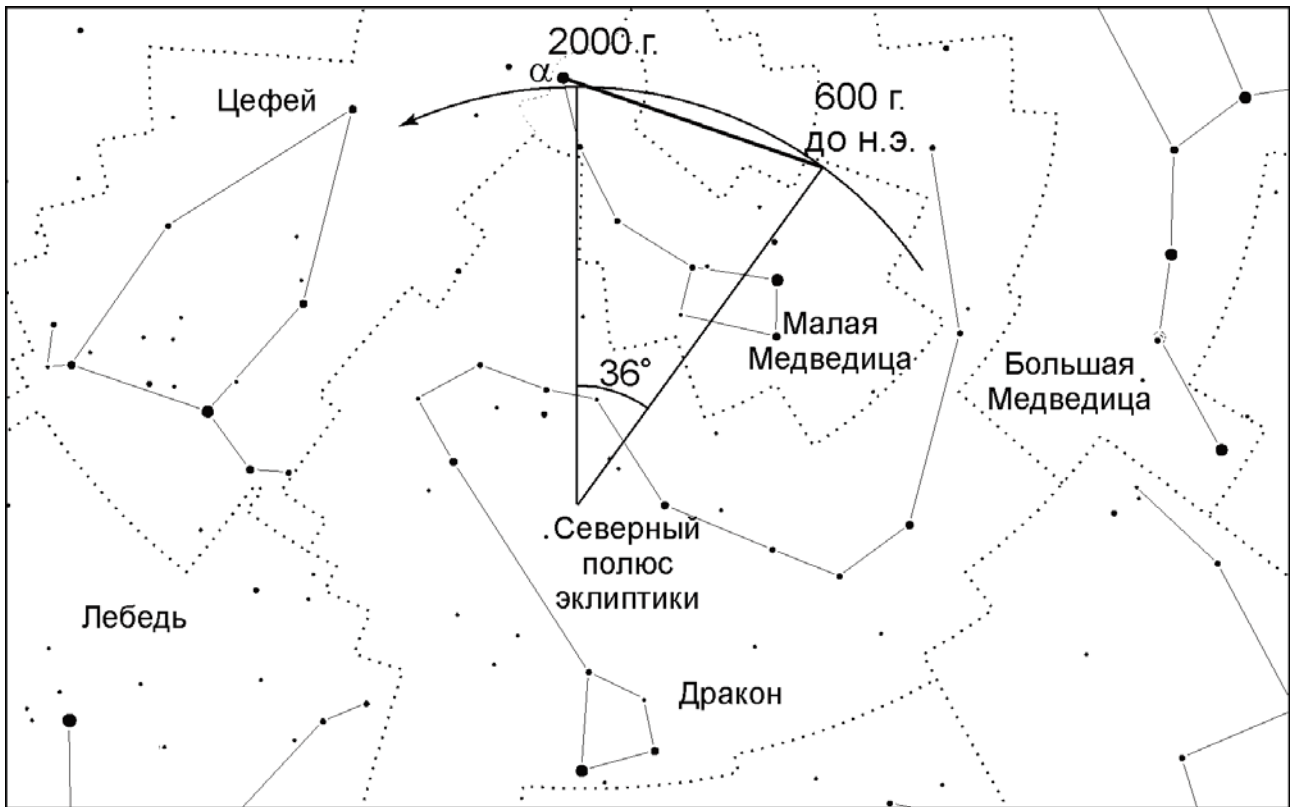
**?** На сколько градусов отстояла от северного полюса мира звезда  $\alpha$  Малой Медведицы во времена плавания финикийцев вокруг Африки (около 600 г. до н. э.)?

**!** В данный момент  $\alpha$  Малой Медведицы, или Полярная звезда, располагается менее чем в  $1^\circ$  от северного полюса мира. Собственное движение Полярной очень мало и на решение задачи не влияет. Единственное явление, значимо меняющее положение Полярной звезды относительно полюса мира – это прецессия земной оси.

В результате явления прецессии северный полюс мира движется среди звезд по малому кругу на расстоянии  $\varepsilon = 23.4^\circ$  от полюса эклиптики с периодом, примерно равным 26000 лет. Плавание финикийцев состоялось 2600 лет назад, что составляет 1/10 от периода прецессии. За это время полюс мира переместился на  $36^\circ$  по эклиптической долготе. Данная величина измеряется вдоль эклиптики, а полюс мира находится на угловом расстоянии  $90^\circ - \varepsilon = 66.6^\circ$  от нее. Поэтому длина дуги малого круга, по которой за 2600 лет переместился полюс мира, равна

$$\gamma = 36^\circ \cos 66.6^\circ \approx 14^\circ.$$

Расстояние на сфере измеряется вдоль дуг больших кругов, а мы нашли длину малого круга. Но, поскольку искомая величина, как и сама дуга, невелика, разли-



чие между длиной дуг большого и малого кругов мало, и наше приближение верно. Воспользовавшись формулами сферической тригонометрии, мы можем уточнить наше значение лишь на доли градуса.

Тот факт, что Полярная не совпадает с полюсом мира, а находится на некотором расстоянии от него, также особо не влияет на решение задачи, поскольку это расстояние в 10 с лишним раз меньше найденной величины.

## IX. 5 ЧЕТЫРЕ ЗВЕЗДЫ

О.С. Угольников

**?** Звезды 1, 2, 3 и 4 имеют видимый блеск ровно  $1^m$ ,  $2^m$ ,  $3^m$  и  $4^m$  соответственно. Расстояния до них составляют ровно 1, 2, 3 и 4 пк. Расположите эти звезды в порядке убывания светимости. Межзвездным поглощением света пренебречь.

**!** Так как нас интересует соотношение светимостей звезд, мы можем использовать относительные величины. Обозначим яркость звезды  $0^m$  за единицу. Тогда яркость звезды с величиной  $m$  будет равна

$$J_m = \frac{1}{2.512^m}.$$

Видимая яркость обратно пропорциональна квадрату расстояния до звезды. Поэтому светимость звезды пропорциональна видимой яркости, умноженной на квадрат расстояния:

$$B \sim \frac{r^2}{2.512^m}.$$

Звезда	$B_m$
1	0.398
2	0.634
3	0.568
4	0.402

В нашем случае для четырех звезд  $r$  (пк) =  $m$ , и для выяснения соотношения светимостей нужно рассчитать значения

$$B_m = \frac{m^2}{2.512^m}.$$

Занесем результаты в таблицу (справа). Мы видим, что светимость самая высокая у звезды 2, затем идут звезды 3, 4 и, наконец, 1.

## IX. 6 ЗВЕЗДНЫЙ ДОМ

А.Н. Акинъщиков

**?** Наша Галактика состоит из 100 миллиардов звезд, большая часть которых расположена в диске радиусом 20 кпк и толщиной 500 пк. Считая, что физические двойные системы могут существовать, если расстояние между компонентами не больше 1/10 от среднего расстояния между соседними звездами в диске Галактики, определите максимальное расстояние до физической пары, разрешимой невооруженным глазом. Считать распределение звезд в диске Галактики равномерным.

**!** Определим концентрацию звезд в диске Галактики:

$$n = \frac{N}{\pi R^2 d} = 0.16 \text{ пк}^{-3}.$$

Здесь  $N$  – число звезд в Галактике,  $R$  – радиус ее диска,  $d$  – его толщина. Среднее расстояние между звездами равно

$$l = n^{-1/3} = 1.8 \text{ пк}.$$

Получается, что максимальное расстояние между компонентами двойной системы составляет 0.18 пк. Угловое разрешение человеческого глаза равно 1' (0.0003 радиан), поэтому максимальное расстояние до двойной системы есть

$$0.18/0.0003 = 600 \text{ пк}.$$

Яркие звезды-гиганты вполне могут быть заметны глазом с такого расстояния.

# X. 1

## СИНХРОННЫЕ СПУТНИКИ

О.С. Угольников

**?** Два искусственных спутника Земли при наблюдении из определенной точки экватора нашей планеты всегда одновременно восходят, проходят через зенит и заходят за горизонт. Орбиты спутников круговые, расположены в экваториальной плоскости, спутники движутся по ним вокруг Земли в одном направлении. При этом радиусы орбит отличаются ровно вдвое. Найдите эти радиусы орбит. Суточным параллаксом спутников пренебречь.

**!** Спутники обращаются вокруг Земли в той же плоскости, что и сам наблюдатель за счет осевого вращения Земли. Одновременный восход, кульминация в зените и заход спутников в пренебрежении параллаксом означает равенство их синодических периодов  $S$ . Для этих периодов справедливо соотношение:

$$\frac{1}{S_{1,2}} = \left| \frac{1}{T_0} \pm \frac{1}{T_{1,2}} \right|; \quad \left| \frac{1}{T_0} \pm \frac{1}{T_1} \right| = \left| \frac{1}{T_0} \pm \frac{1}{T_2} \right|.$$

Здесь  $T_{1,2}$  – орбитальные периоды спутников,  $T_0$  – период осевого вращения Земли (23.934 часа). Знак "+" соответствует встречному вращению спутника по отношению к вращению Земли, знак "-" будет иметь место в случае одного направления вращения Земли и спутника. Коль скоро известно, что спутники движутся вокруг Земли в одном направлении, эти знаки для них должны быть одинаковы. В случае знака "+" выражения под модулем положительны, и равенство выполняется только для одинаковых орбит ( $T_1=T_2$ ), что противоречит условию задачи. Итак, мы должны рассмотреть случай со знаками "-":

$$\left| \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right| = \left| \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_2} \right|.$$

Мы вновь не рассматриваем тривиальный случай  $T_1=T_2$ . Пусть  $T_2>T_1$ , тогда  $(1/T_1)>(1/T_2)$ . Равенство может быть выполнено, если выражение под модулем в левой части будет отрицательным, в правой части – положительным, то есть:

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_2}.$$

Это выражение можно переписать как

$$\frac{T_1 T_0}{T_0 - T_1} = \frac{T_2 T_0}{T_2 - T_0}.$$

Отсюда

$$T_1(T_2 - T_0) = T_2(T_0 - T_1).$$

Вспомним, что  $T_2 > T_1$ , а радиусы орбит спутников отличаются в 2 раза. По III закону Кеплера

$$\frac{T_2}{T_1} = K = 2^{3/2}.$$

Подставляя это в соотношение периодов, имеем:

$$KT_1^2 - T_1T_0 = KT_1T_0 - KT_1^2.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$T_1 = \frac{(K+1)T_0}{2K}; \quad T_2 = KT_1 = \frac{(K+1)T_0}{2}.$$

Численные значения периодов равны 16.20 и 45.82 часа. Радиусы орбит спутников составляют

$$R_{1,2} = \left( \frac{GMT_{1,2}^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}.$$

Здесь  $M$  – масса Земли. Радиусы орбит равны 32.4 и 64.8 тысячи километров.

## X. 2

### ЗАТМЕНИЕ НА ПОЛЮСЕ

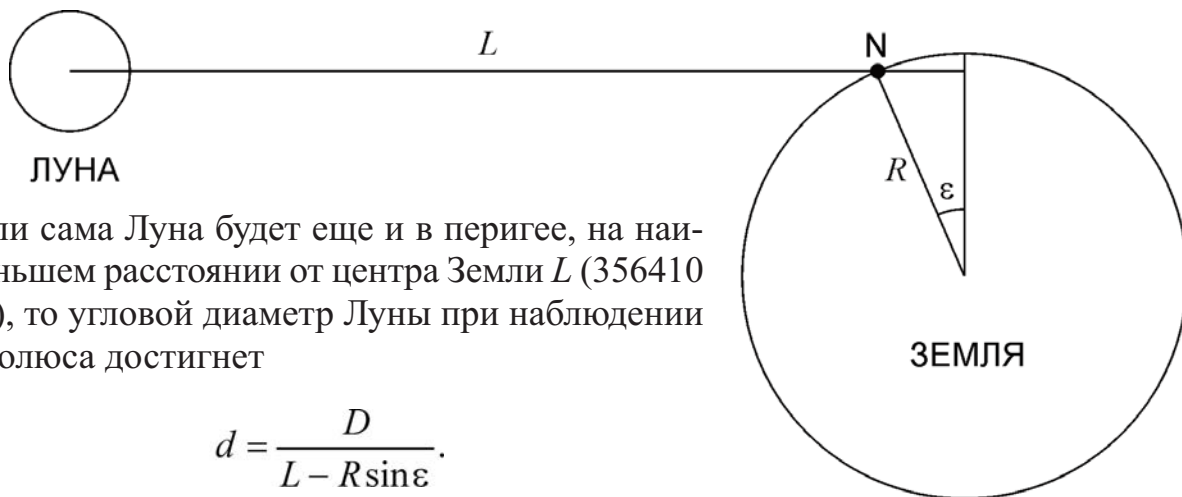
А.Н. Акинъщиков

**?** 20 марта 2015 года произошло полное солнечное затмение, которое было видно на северном полюсе Земли. Продолжительность полной фазы там составила около 2 минут. Определите, какая максимальная продолжительность полной фазы может вообще быть у солнечного затмения на северном полюсе Земли.

**!** Очевидно, двухминутное полное солнечное затмение – не самое продолжительное, которое может случиться на северном полюсе Земли. Затмение 2015 года наступило в весеннее равноденствие, и Солнце и Луна едва появились над горизонтом за счет явления атмосферной рефракции. В это время расстояние до Луны не было минимально возможным. Солнце, в свою очередь, не было в своей самой удаленной точке от Земли.

Затмение с наибольшей продолжительностью может наступить на северном полюсе в конце июня – начале июля. В это время Солнце и Луна будут располагаться на высоте  $\epsilon$  (около  $23.4^\circ$ ), и точка наблюдения будет приближена к Луне (см. рисунок):





Если сама Луна будет еще и в перигее, на наименьшем расстоянии от центра Земли  $L$  (356410 км), то угловой диаметр Луны при наблюдении с полюса достигнет

$$d = \frac{D}{L - R \sin \varepsilon}.$$

Здесь  $R$  – полярный радиус Земли. В угловой мере величина  $d$  составит  $33'46''$ . Солнце в июне – начале июля, напротив, находится дальше всего от Земли, и его угловой диаметр  $d_0$  уменьшается до  $31'31''$ . Полное солнечное затмение может продолжаться, пока Луна преодолевает на небе относительно Солнца угловое расстояние  $d - d_0$ , равное  $2'15''$ . Северный полюс не движется за счет осевого вращения Земли, и перемещение Луны будет происходить с той же угловой скоростью, с какой она движется по орбите (с очень малой параллактической поправкой на приближенное положение наблюдателя, необязательной для учета). В соответствии со II законом Кеплера, тангенциальная скорость тела по ходу движения по орбите пропорциональна  $(1/L)$ , а угловая скорость –  $(1/L)^2$ , где  $L$  – расстояние до него. Во время затмения в перигее при наблюдении с полюса данная угловая скорость составляет

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \left( \frac{L_0}{L} \right)^2 \cdot \frac{L}{L - R \sin \varepsilon}.$$

Здесь  $L$  и  $L_0$  – наименьшее и среднее расстояние Луны от Земли,  $T$  – орбитальный период Луны. Данная угловая скорость составляет  $0.643'$  в минуту. Практически в том же направлении перемещается относительно звезд и Солнце, угловая скорость в случае малого эксцентриситета орбиты Земли  $e$  равна

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} (1 - e)^2.$$

Здесь  $T_0$  – орбитальный период Земли. Угловая скорость составляет  $0.040'$  в минуту. Максимальная продолжительность полного солнечного затмения на северном полюсе Земли составит

$$t = \frac{d - d_0}{\omega - \omega_0} = 3^{\text{м}} 44^{\text{с}}.$$

Полное солнечное затмение длительностью в  $3^{\text{м}} 13^{\text{с}}$  произошло в непосредственной близости от северного полюса ровно 200 лет назад, 6 июля 1815 года.

**Х. 3****ДАЛЕКИЙ РАДИОИСТОЧНИК**

О.С. Угольников

**?** Короткий одиночный импульс от далекого ради источника был принят 21 марта в  $06^{\circ}00'00.0000^{\circ}$  по всемирному времени радиотелескопами вблизи Мурманска ( $69^{\circ}$  с.ш.,  $30^{\circ}$  в.д.), в Индонезии ( $0^{\circ}$  ш.,  $99^{\circ}$  в.д.) и Антарктиде ( $69^{\circ}$  ю.ш.,  $30^{\circ}$  в.д.). Определите экваториальные координаты источника на небе. Уравнением времени и сжатием Земли пренебречь.

**!** Коль скоро импульс от ради источника был принят в данных трех пунктах одновременно со столь высокой точностью, можно сделать вывод, что расстояние от источника до всех трех пунктов одинаково. Иными словами, плоскость, содержащая три пункта, перпендикулярна направлению на источник. А это означает, что высота источника над горизонтом в этих пунктах также одинакова, а сами пункты равноудалены от той точки поверхности Земли, где источник находился в зените.

По координатам можно увидеть, что все три пункта удалены на  $69^{\circ}$  по поверхности Земли от точки ( $0^{\circ}$  ш.,  $30^{\circ}$  в.д.). Очевидно, что именно при наблюдении из нее указанный источник находился в зените. Есть и другая точка ( $0^{\circ}$  ш.,  $150^{\circ}$  з.д.), также равноудаленная от всех пунктов, но уже на  $121^{\circ}$ . Источник не мог находиться там в зените, так как в этом случае он не был бы виден из указанных трех наблюдательных пунктов.

Источник находится в зените на экваторе, следовательно, его склонение равно нулю. Чтобы определить его прямое восхождение, учтем, что в день весеннего равноденствия в любом наблюдательном пункте звездное время отличается от местного времени на 12 часов. Всемирное время есть местное время на нулевом меридиане, и в 6 часов утра звездное время там составляет 18 часов. На долготе  $\lambda$ , равной  $+30^{\circ}$  или  $+2$  часам, звездное время составит 20 часов. Источник, находящийся в этот момент в зените (в верхней кульминации), должен иметь такое же прямое восхождение. Итак, координаты источника:  $\alpha = 20^{\text{ч}}$ ,  $\delta = 0$ .

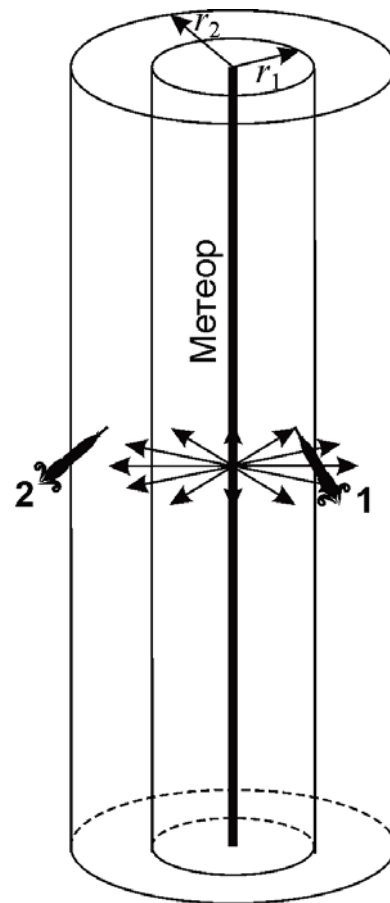
**Х. 4****ВБЛИЗИ МЕТЕОРА**

О.С. Угольников

**?** Метеор загорелся на высоте 100 км и погас на высоте 60 км, двигаясь строго вертикально и имея постоянную скорость и светимость. Геофизическая ракета, расположенная в 2 км от траектории метеора на высоте 80 км, измерила суммарный поток энергии от метеора за время полета, который оказался равен потоку от звезды  $-5.0^{\text{м}}$  (за то же время). Какой результат дадут аналогичные измерения с другой геофизической ракетой на той же высоте в 4 км от траектории метеора?

**!** С первого взгляда может показаться, что вторая геофизическая ракета, расположенная вдвое дальше от метеора, чем первая, должна зафиксировать вчетверо меньшую яркость. Это было бы так, будь метеор точечным объектом. Однако, как сказано в условии, метеор имел длину 40 км, что существенно больше расстояния от обеих ракет до середины его траектории. И если расстояния от ракеты до средней точки метеора будут различаться в 2 раза, то для более далеких частей траектории это отношение будет меньшим.

Считая длину метеора много большей расстояния до аппаратов, изобразим цилиндры, осью которых будет траектория метеора, а поверхности проходят через геофизические ракеты. Высота цилиндров значительно больше их радиусов, и практически вся световая энергия от метеоров будет проходить через боковые поверхности цилиндров. Для второй ракеты их площадь вдвое больше, чем для первого. Поэтому и суммарный энергетический поток от метеора, зафиксированный этой ракетой, будет вдвое, а не вчетверо меньшим, чем для первой ракеты. Общая звездная величина метеора для второй ракеты составит



$$m_2 = m_1 - 2.5 \lg \frac{r_2}{r_1} = -4.25.$$

Точный анализ (не требуемый для решения задачи) показывает, что вторая геофизическая ракета зафиксирует яркость метеора, соответствующую звезде  $-4.18^m$ , что мало отличается от полученного ответа.

## Х. 5

### СОЛНЦЕ СКВОЗЬ ДУРШЛАГ

А.Н. Акинъщиков

**?** Как известно, обычный дуршлаг можно использовать для наблюдений Солнца, в частности, во время частных солнечных затмений, проецируя изображения Солнца на светлый экран. Каким должно быть расстояние от дуршлага до экрана, чтобы условия для наблюдений были наилучшими? Какое угловое разрешение при этом может быть достигнуто? Считать, что наблюдатель находится рядом с дуршлагом, на том же расстоянии от экрана. Параметры дуршлага: диаметр – 20 см, диаметр отверстий – 2 мм, расстояние между центрами отверстий – 10 мм.

! При таких наблюдениях каждое отверстие дуршлага играет роль камеры-обскуры, формируя изображение яркого объекта на экране. Максимальное угловое разрешение будет ограничено несколькими факторами. Первое и самое простое ограничение связано с тем, что для наблюдателя, находящегося рядом с дуршлагом, угловой размер изображения будет равен реальному угловому диаметру Солнца. Соответственно, при таком масштабе (1:1) человеческий глаз не сможет превысить разрешения  $\rho_E = 1'$  независимо от расстояния между дуршлагом и экраном  $L$ .

Следующее ограничение связано с явлением дифракции, которое будет происходить на отверстиях дуршлага. Для видимого света (длина волны 550 нм) угловой размер дифракционного кружка от точечного источника составит

$$\rho_D = 1.22 \frac{\lambda}{d} \approx 1'.$$

Здесь  $d$  – диаметр отверстия. Полученная величина также не зависит от расстояния между дуршлагом и экраном. Получается, что дифракция не накладывает дополнительных ограничений на разрешение, но при этом лишает наблюдателя смысла приближаться к экрану ближе, чем дуршлаг.

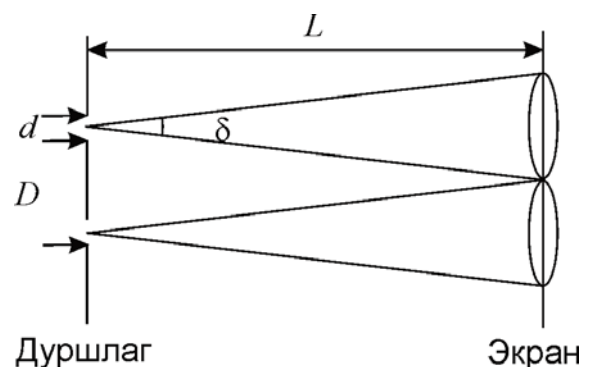
Если наблюдать со стороны экрана, то отверстия дуршлага будут иметь заметные размеры, и в определенную точку экрана будет попадать свет от разных участков Солнца. Можно считать, что разрешение в этом случае ограничено величиной

$$\rho_R = \frac{r}{L} = \frac{d}{2L} \approx \frac{3'}{L(\text{м})}.$$

Здесь  $r$  – радиус отверстий. Детали с такими угловыми размерами будут видны с сильным размытием, для большей четкости они должны быть вдвое большими (соответствуя не радиусу, а диаметру отверстий). Это ограничение ослабляется, если увеличить расстояние до экрана. Однако тогда размер изображений Солнца (угловой диаметр  $\delta$ ) на экране будет возрастать, и в какой-то момент эти изображения начнут накладываться друг на друга. Это произойдет, когда размер изображения станет равным расстоянию между отверстиями  $D$ . Определим соответствующее расстояние до экрана:

$$L_0 = \frac{D}{\delta} \sim 1 \text{ м.}$$

Можно сделать вывод, что именно такое расстояние будет оптимальным, и предельное разрешение составит  $3'$  или чуть хуже. Может показаться, что ситуацию можно улучшить, закрыв часть отверстий дуршлага и еще увеличив расстояние. Но в реальности это приведет к ослаблению яркости изображений Солнца на экране, и они потеряются на фоне постороннего дневного света.



**Х. 6****ЮЖНАЯ ЗВЕЗДА**

Е.Н. Фадеев

**?** Прямое восхождение одиночной звезды равно  $18^{\text{ч}}$ , а ее склонение  $-23^{\circ}26'$ . Собственное движение по склонению у этой звезды в настоящий момент отсутствует, а по прямому восхождению оно равно  $1''/\text{год}$  и направлено на запад. Будет ли видно эту звезду на северном полюсе Земли, и если будет, то через сколько лет? Лучевой скоростью звезды, атмосферной рефракцией и ослаблением света пренебречь.

**!** Как видно по координатам, звезда находится в точке зимнего солнцестояния, которая на северном полюсе Земли наблюдаться не может. Для того, чтобы понять, когда звезда сможет появиться на небе северного полюса, обратим внимание, что ее собственное движение направлено на запад, то есть вдоль большого круга небесной сферы – эклиптики.

На северном полюсе можно наблюдать только северную часть эклиптики. Чтобы появиться над горизонтом, звезда должна оказаться в точке весеннего или осеннего равноденствия. Звезда движется вдоль эклиптики навстречу годичному движению Солнца со скоростью  $1''/\text{год}$ , которую можно считать постоянной (так как у звезды в настоящий момент нет лучевой скорости).

Известно, что в результате прецессии точка весеннего равноденствия также смещается относительно звезд навстречу годичному движению Солнца и обходит всю эклиптику примерно за 26000 лет, что соответствует скорости

$$360 \cdot 3600'' / 26000 \sim 50''/\text{год}.$$

Таким образом, точка весеннего равноденствия догоняет нашу звезду. Поскольку изначально собственное движение было направлено вдоль эклиптики, а сама плоскость эклиптики не меняет своего положения, звезда все время остается в этой плоскости. Примерно через 6500 лет звезда появится над горизонтом на северном полюсе Земли. Учет собственного движения особо не влияет на ответ, поскольку его вклад меньше, чем погрешность используемой простейшей модели прецессии.

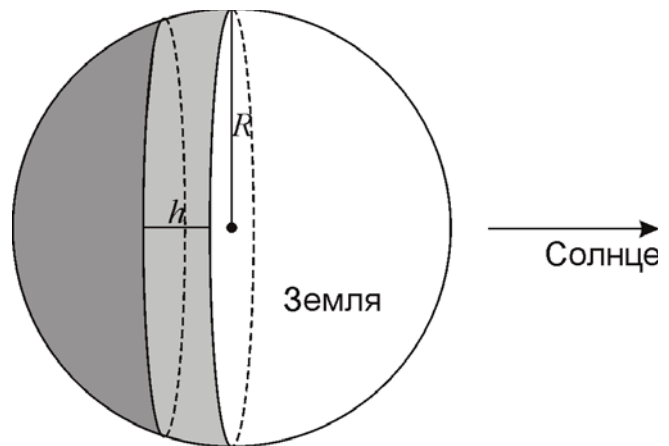
# XI. 1 СУМЕРКИ

Е.Н. Фадеев

**?** Определите, на какой части поверхности Земли сейчас наблюдаются сумерки (в любой их стадии)? Угловыми размерами Солнца и рефракцией пренебречь. Решение дополните рисунком.

**!** По определению, сумерки продолжаются, пока Солнце находится в пределах высот от  $0^\circ$  до  $-18^\circ$ . Будем считать Землю шаром. Тогда сумерки наблюдаются на сферической части поверхности шарового слоя, заключенного между полушарием, где в данный момент день, и сегментом, где ночь. Высота этого шарового слоя равна

$$h = R \sin 18^\circ.$$



Площадь сферической поверхности шарового слоя равна  $2\pi Rh$ . Сравнивая её с площадью всего земного шара, получаем величину части, погруженной в сумерки:

$$S_T = \frac{2\pi Rh}{4\pi R^2} = \frac{\sin 18^\circ}{2} \approx 0.15.$$

Площадь поверхности шарового сегмента может быть оценена, если мы заменим сегмент, например, цилиндром или усеченным конусом. В случае цилиндра ответ получается фактически таким же, поскольку площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по той же формуле, что и площадь сферической части шарового слоя.

# XI. 2 ЗВЕЗДА НА МАТОВОМ СТЕКЛЕ

О.С. Угольников

**?** Телескоп-рефрактор с относительным отверстием 1:5 и прямой каркасной трубой навели на звезду  $0^m$ . Затем с него сняли окуляр и поставили в фокальную плоскость матовую стеклянную пластинку. Какую звездную величину будет иметь изображение звезды на пластинке, если наблюдатель находится рядом с объективом (сбоку от него, не затеняя ход лучей звезды в телескопе)? Считать, что матовое стекло рассеивает весь свет в обе стороны от себя, причем равномерно во всех направлениях.

**!** Обозначим поток энергии от звезды через  $J$ . Количество энергии, которое за единицу времени попадет в телескоп с диаметром объектива  $D$  и соберется в изображении звезды в фокальной плоскости, составит

$$E = J \frac{\pi D^2}{4}.$$

Матовое стекло отразит этот свет равномерно во всех направлениях. Если наблюдатель находится рядом с объективом, на фокусном расстоянии  $F$  от пластинки, то поток энергии от изображения звезды около него будет равен

$$j = \frac{E}{4\pi F^2} = \frac{J}{16} \left(\frac{D}{F}\right)^2.$$

Диаметр объектива  $D$  и его фокусное расстояние  $F$  неизвестны, но задано их отношение, равное 1:5. Звездная величина изображения звезды с блеском  $m_0$  на матовом стекле будет равна

$$m = m_0 - 2.5 \lg \frac{j}{J} = m_0 - 5 \lg \frac{D}{4F} = m_0 - 5 \lg \frac{1}{20} = 6.5.$$

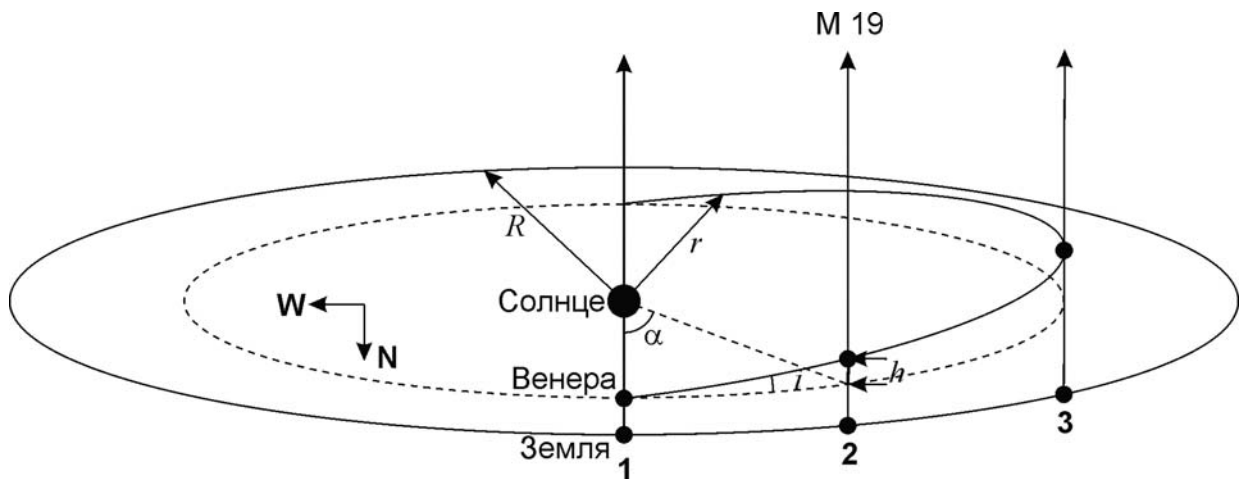
## **XI. 3 ПЛАНЕТА И СКОПЛЕНИЕ**

О.С. Угольников

**?** Орбита планеты Венера наклонена к плоскости эклиптики на угол  $3.4^\circ$ , долгота восходящего узла равна  $77^\circ$ . Шаровое звездное скопление М19 в созвездии Змееносца имеет эклиптические координаты: долгота  $257^\circ$ , широта  $-3.5^\circ$ , угловой диаметр  $14'$ . Может ли Венера (при наблюдении с Земли) пройти по этому скоплению? Орбиты планет считать круговыми.

**!** Близость угла наклона орбиты Венеры к эклиптике и эклиптической широты скопления (по модулю) может наводить на мысль, что планета может в пределе пройти по скоплению, находясь на максимальном удалении от эклиптики. Однако, реальная ситуация сложнее, и для решения задачи нам необходимо учесть ориентацию орбиты Венеры в пространстве.

Известно, что в нижнем соединении, находясь на минимальном расстоянии от Земли, Венера может удаляться на небе на  $8^\circ$  от эклиптики. Но заметим, что эклиптическая долгота скопления на  $180^\circ$  отличается от долготы восходящего узла орбиты Венеры. То есть, если бы Венера и Земля одновременно оказались на гелиоцентрической долготы  $77^\circ$  (такое могло бы случиться в нижнем соединении в начале декабря), то мы бы стали свидетелями прохождения Венеры по диску Солнца, а скопление М19 оказалось позади Солнца и Венеры, находясь в  $3.5^\circ$  южнее них на небе. В этом случае говорить о возможном прохождении Венеры по скоплению не приходится. Рассмотрим другие возможные взаимные положения Венеры и Земли, при которых Венера окажется на небе рядом со скоплением (на той же эклиптической долготы). Для этого изобразим орбиты обеих планет, при-



чем расположим сверху рисунка южный полюс эклиптики (так как скопление имеет отрицательную эклиптическую широту). Очевидно, что нас будет интересовать южная (по отношению к эклиптике) половина орбиты Венеры, так как именно на ней планета может подойти к М19 при наблюдении с Земли.

Так как угол наклона орбиты Венеры к эклиптике невелик, то проекцию орбиты на плоскость эклиптики можно считать окружностью с тем же радиусом. Пусть Земля и Венера находятся в каком-либо из положений 1, 2 или 3 так, что проекция отрезка между ними параллельна линии узлов орбиты. Продолжение этого отрезка за Венеру указывает на точку эклиптики с долготой  $257^\circ$ , находящуюся рядом с шаровым скоплением. Пусть Венера отстоит от узла орбиты на угол  $\alpha$ . Тогда ее расстояние от плоскости эклиптики составит

$$h = r i \sin \alpha.$$

Здесь  $r$  – радиус орбиты Венеры,  $i$  – угол ее наклона к эклиптике, выраженный в радианах, мы вновь учли малость этого угла. Теперь определим расстояние между Землей и проекцией Венеры на плоскость эклиптики, для чего построим рисунок в плоскости эклиптики (вновь со стороны юга, внизу страницы).

В треугольнике «Солнце-Венера-Земля» нам известны две стороны и угол, не лежащий между ними (с вершиной в проекции Венеры, он равен  $\pi - \alpha$ ). Запишем выражение теоремы косинусов:

$$R^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos(\pi - \alpha) = r^2 + d^2 + 2rd \cos \alpha.$$

Это квадратное уравнение имеет один положительный корень:

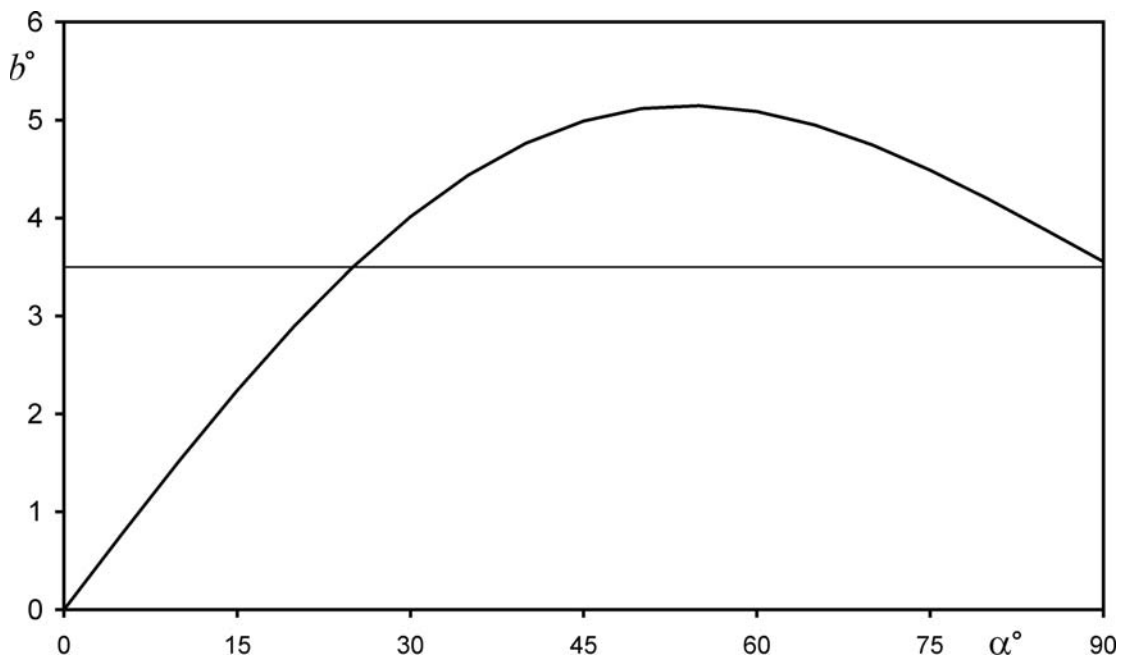
$$d = -r \cos \alpha + \sqrt{r^2 \cos^2 \alpha - r^2 + R^2} = \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} - r \cos \alpha.$$

Модуль эклиптической широты Венеры при наблюдении с Земли составит

$$b = \frac{h}{d} = \frac{r i \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} - r \cos \alpha}.$$







Можно построить график величины  $b$  для углов  $\alpha$  от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  (то есть для положений Венеры между нижним соединением и наибольшей восточной элонгацией).

Подробный анализ (не требующийся от участников олимпиады) показывает, что максимальная (по модулю) эклиптическая широта Венеры в этой области неба будет достигнута при

$$\alpha = \arccos \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} \approx 54^\circ$$

и составит

$$b_0 = \frac{irR}{R^2 - r^2} \approx 5.1^\circ.$$

Мы видим, что величина  $b$  может значительно превосходить по модулю эклиптическую широту скопления M19, и Венера может пройти по этому скоплению.

Приведенное выше решение является полным. Однако ответить на вопрос касательно конкретного скопления M19 можно проще. Для этого достаточно рассмотреть только случай наибольшей восточной элонгации (положение 3 на рисунке слева сверху). Тогда угол  $\alpha$  равен  $90^\circ$ , расстояние между Землей и Венерой вычисляется по теореме Пифагора:

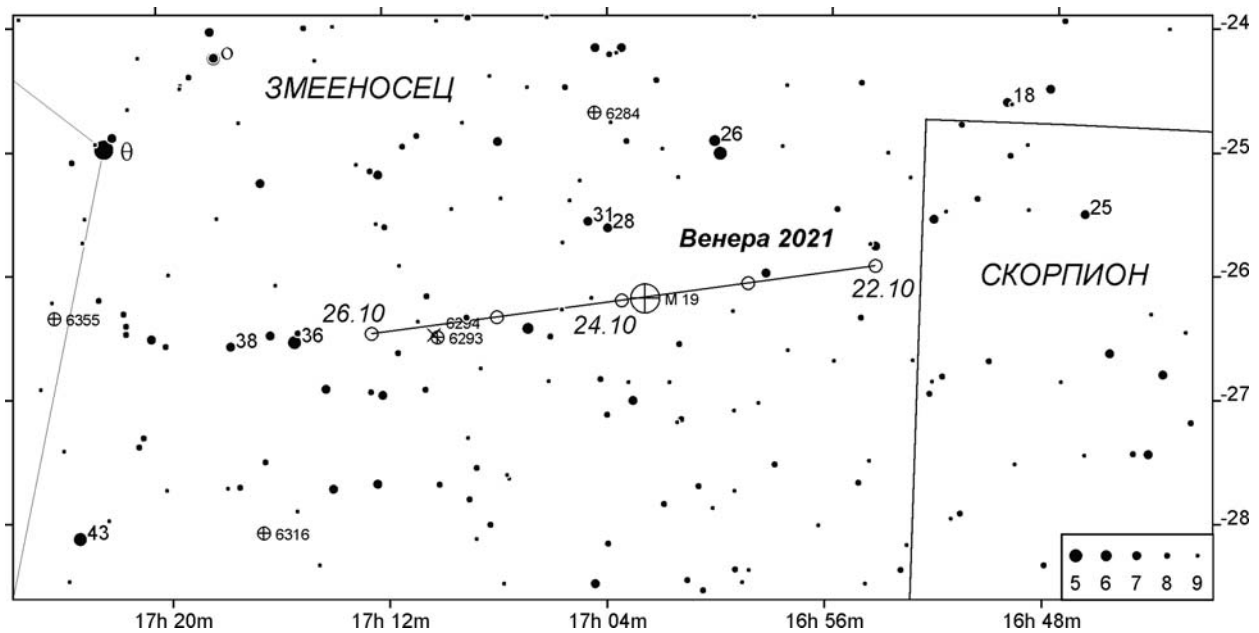
$$d = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Модуль эклиптической широты Венеры будет равен

$$b = \frac{h}{d} = \frac{ri}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 3.55^\circ.$$

Учитывая угловой размер скопления (около  $0.2^\circ$ ) сразу делаем вывод, что в случае наибольшей восточной элонга-





ции на данной эклиптической долготе (это соответствует 20-м числам октября) прохождение Венеры по М19 обязательно произойдет. Более того, именно сейчас такие явления случаются регулярно. Венера прошла по краю М19 23 октября 2013 года, а еще через 8 лет, вечером 23 октября 2021 года, пройдет по его центру.

## XI. 4 МЕЖПЛАНЕТНЫЙ ПАРУСНИК

О.С. Угольников

**?** Космический аппарат вывели на круговую околосолнечную орбиту с радиусом 1 а.е. После этого на нем был развернут солнечный парус, постоянно обращенный к Солнцу и уменьшающий эффективную силу его притяжения на 4%. В ходе дальнейшего движения этот парус мгновенно сворачивался, как только аппарат достигал афелия своей текущей орбиты, но вновь раскрывался в каждом перигелии. Сколько целых оборотов вокруг Солнца сделает этот аппарат? Какова его дальнейшая судьба? Взаимодействием аппарата со всеми телами, кроме Солнца и его фотонов, пренебречь.

**!** Как известно, сила фотонного давления на солнечный парус, как и сила притяжения Солнца, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до него. Поэтому отношение двух сил при постоянной ориентации паруса к Солнцу будет постоянно, и эффективная сила притяжения при раскрытом парусе будет всегда составлять 24/25 от истинной силы притяжения Солнца.

Пусть после  $n$  оборотов, на каждом из которых парус сначала разворачивался в перигелии, а затем сворачивался в афелии, аппарат движется по орбите с большой полуосью  $a_n$  и эксцентриситетом  $e_n$  (до первого раскрытия паруса  $a_0=1$  а.е. и  $e_0=0$ ). В точке перигелия расстояние аппарата от Солнца и его скорость составят

$$r_n = a_n (1 - e_n);$$

## Теоретический тур – 11 класс

$$V_n = \sqrt{\frac{GM}{a_n} \cdot \frac{1+e_n}{1-e_n}} = \sqrt{\frac{GM}{r_n} \cdot (1+e_n)}.$$

В данной точке аппарат раскрывает парус, и его дальнейшее движение будет таким же, как оно было бы в поле тяжести звезды с массой  $24M/25$  ( $M$  – масса Солнца). Очевидно, что данная точка будет перигелием и этой орбиты. Для новых параметров орбиты  $A_{n+1}$  и  $E_{n+1}$  справедливы соотношения:

$$r_n = A_{n+1} (1 - E_{n+1});$$

$$V_n = \sqrt{\frac{24GM}{25A_{n+1}} \cdot \frac{1+E_{n+1}}{1-E_{n+1}}} = \sqrt{\frac{24GM}{25r_n} \cdot (1+E_{n+1})}.$$

Сопоставляя все формулы, мы получаем:

$$\frac{24}{25} \cdot (1 + E_{n+1}) = 1 + e_n; \quad E_{n+1} = \frac{25e_n + 1}{24}.$$

По новой траектории аппарату предстоит сделать половину оборота. Когда он достигнет афелия, его расстояние от Солнца и скорость будут равны:

$$R_{n+1} = A_{n+1} (1 + E_{n+1});$$

$$v_{n+1} = \sqrt{\frac{24GM}{25A_{n+1}} \cdot \frac{1-E_{n+1}}{1+E_{n+1}}} = \sqrt{\frac{24GM}{25R_{n+1}} \cdot (1-E_{n+1})}.$$

В афелии парус сворачивается, и аппарат оказывается в обычном поле тяжести Солнца на орбите с большой полуосью  $a_{n+1}$  и эксцентриситетом  $e_{n+1}$ . Для них справедливы соотношения:

$$R_{n+1} = a_{n+1}(1+e_{n+1});$$

$$v_{n+1} = \sqrt{\frac{GM}{a_{n+1}} \cdot \frac{1-e_{n+1}}{1+e_{n+1}}} = \sqrt{\frac{GM}{R_{n+1}} \cdot (1-e_{n+1})}.$$

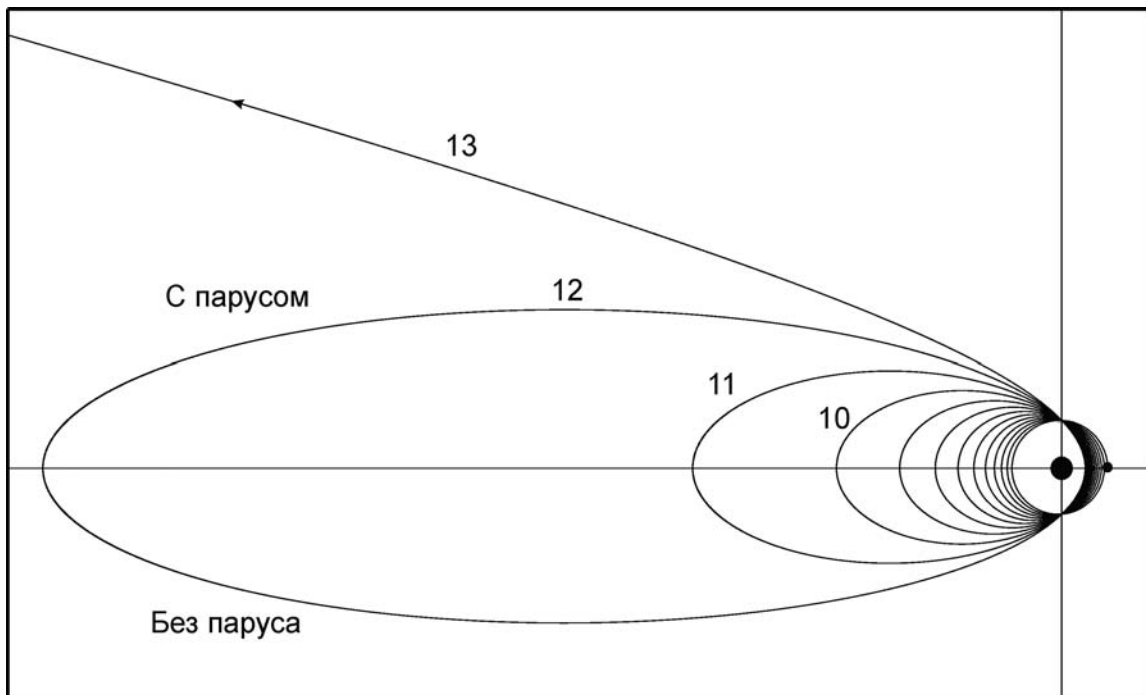
Отсюда мы можем получить:

$$\frac{24}{25} \cdot (1 - E_{n+1}) = 1 - e_{n+1}; \quad e_{n+1} = \frac{24E_{n+1} + 1}{25} = \frac{25e_n + 2}{25} = e_n + \frac{2}{25} = e_n + 0.08.$$

Приращение эксцентриситета постоянно и не зависит от номера витка. С учетом  $e_0=0$ , для траектории без паруса на витке  $n$  мы имеем:  $e_n=2n/25$ . Для витка с раскрытым парусом

$$E_n = \frac{25e_{n-1} + 1}{24} = \frac{2n-1}{24}.$$

Аппарат сделает 12 полных оборотов вокруг Солнца с периодически раскрывающимся парусом. 13-й виток уже не будет замкнутым, так как представит из себя гиперболу с эксцентриситетом  $E_{13}=25/24 \sim 1.04$ . Раскрыв парус в 13-й раз, аппарат покинет Солнечную систему.



В задаче можно учитывать эффект Пойнтинга-Робертсона, связанный с тормозящим ускорением от боковых фотонов на движущийся аппарат. Однако он будет очень мал, и уменьшение эксцентриситета на 13-м витке составит примерно 0.0002. Траектория все равно будет гиперболической.

Нужно также отметить, что с каждым новым витком у аппарата будет уменьшаться перигелийное расстояние. Однако, это не создаст проблем для его работы, так как расстояние в перигелии останется значительно больше радиуса Солнца. Чтобы доказать это, рассмотрим моменты перед раскрытием паруса в перигелии на  $i$ -том витке и запишем формулировку закона сохранения момента импульса (который, безусловно, выполняется для аппарата, так как сила фотонного давления центральная и не создает вращательного момента):

$$mV_i r_i = mV_0 a_0;$$

$$\sqrt{\frac{GM}{r_i}} (1 + e_i) \cdot r_i = \sqrt{\frac{GM}{a_0}} \cdot a_0.$$

Здесь  $m$  – масса аппарата. Отсюда можно записать выражение для перигелийного расстояния:

$$r_i = \frac{a_0}{1 + e_i}.$$

На всех участках витков со свернутым парусом эксцентриситет не превышает единицу, и перигелийные расстояния будут не меньше 0.5 а.е, то есть аппарат будет всегда дальше от Солнца, чем Меркурий.

Описанный маневр является возможным средством разгона тел с фотонными парусами в поле тяжести звезд. Его суть в чем-то аналогична взмаху крыла птицы и состоит в том, что парус раскрыт, когда аппарат удаляется от Солнца. Тем самым, фотоны сообщают ему ускорение по ходу движения и совершают положительную работу. На другой половине витка парус сворачивается, и фотоны не оказывают тормозящее действие.

# XI. 5 ТАЙМИНГ ПУЛЬСАРА

Е.Н. Фадеев

**?** Радиопульсар в некоторый момент времени имеет точно известный период ровно в 1 с. Сколько после этого потребуется времени, чтобы обнаружить, что период этого радиопульсара растет со скоростью  $10^{-15}$ ? Методы наблюдения позволяют определять время прихода импульса с точностью  $10^{-3}$  с. Считать пульсар неподвижным относительно наблюдателя.

**!** Радиопульсар – это вращающаяся нейтронная звезда, излучающая по принципу маяка: один раз за оборот луч, в котором распространяется излучение, попадает на Землю. Энергия вращения постепенно расходуется на излучение, вследствие чего вращение пульсара постепенно замедляется.

На первый взгляд кажется, что правильный ответ можно найти, разделив величину измеряемой задержки сигнала ( $10^{-3}$  секунды) на скорость роста периода пульсара ( $10^{-15}$ ). Получается  $10^{12}$  секунд, что составляет почти 32 тыс. лет. Но это промежуток, за который сам период увеличивается на  $10^{-3}$  секунды. Через такое время рост периода можно будет заметить, зарегистрировав всего два соседних импульса. В случае систематических наблюдений убедиться в замедлении пульсара можно будет существенно раньше.

Пусть  $P_0$  – период радиопульсара в начальный момент времени,  $\omega_0$  – угловая скорость вращения пульсара в момент открытия,  $\dot{\omega}$  и  $\dot{P}$  – скорость изменения периода и угловое ускорение соответственно,  $\varphi$  – угол поворота радиопульсара. Для этого угла можно записать уравнение:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\dot{\omega} t^2}{2}.$$

Поскольку мы считаем пульсар неподвижным относительно наблюдателя, разности времен испускания и получения двух импульсов равны. Поделив обе части уравнения на  $2\pi$ , мы получим его аналог, в котором вместо угла  $\varphi$  будет стоять число оборотов  $k$ , а вместо угловой скорости  $\omega$  и скорости ее изменения – частота  $\nu$  и скорость ее изменения:

$$k = \nu_0 t + \frac{\dot{\nu} t^2}{2}.$$

Нам интересны моменты времени, соответствующие полным оборотам и целым значениям  $k$ . Пусть  $k$  – число оборотов вокруг своей оси, совершенных пульсаром начиная с момента, которому соответствует угловая скорость  $\omega_0$ . Тогда для определения времени прихода  $k$ -го импульса надо решить квадратное уравнение

$$t^2 + 2t \frac{\nu_0}{\dot{\nu}} - 2 \frac{k}{\dot{\nu}} = 0.$$

Решением этого уравнения будет

$$t_{k1,2} = -\frac{v_0}{\dot{v}} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{\dot{v}}\right)^2 + \frac{2k}{\dot{v}}}.$$

Решение со знаком “–” отрицательно, и мы его не рассматриваем. Если бы пульсар не замедлялся, то время прихода  $k$ -го импульса определялось бы как

$$t_{k0} = \frac{k}{v_0}.$$

В итоге, временная задержка прихода  $k$ -го импульса составит:

$$\Delta t_k = t_{k1} - t_{k0} = -\frac{v_0}{\dot{v}} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{\dot{v}}\right)^2 + \frac{2k}{\dot{v}}} - \frac{k}{v_0}.$$

Это уравнение можно путем несложных преобразований свести к квадратному относительно  $k$ :

$$k^2 + 2v_0\Delta t_k \cdot k + (v_0\Delta t_k)^2 + 2\frac{v_0^3}{\dot{v}}\Delta t_k = 0.$$

Решив это уравнение, получаем

$$k = -v_0\Delta t_k \pm \sqrt{-2\frac{v_0^3}{\dot{v}}\Delta t_k}.$$

Знак “–” под корнем не должен смущать, поскольку пульсар тормозится, и величина  $\dot{v}$  отрицательна. Второе решение вновь не имеет физического смысла, поэтому мы его рассматривать не будем. Переходя от частот к периодам с учетом  $P_0 = v_0^{-1}$ , имеем:

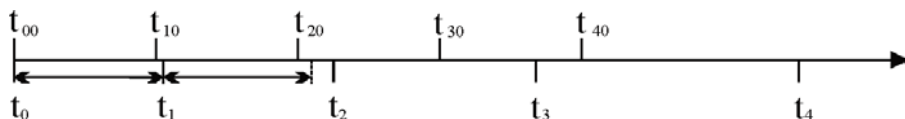
$$\dot{P} = \frac{P_1 - P_0}{\Delta t_1} = \frac{v_1^{-1} - v_0^{-1}}{\Delta t_1} = \frac{v_0 - v_1}{v_0 v_1 \Delta t_1} \approx -\frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \frac{1}{v_0^2} = -\frac{\dot{v}}{v_0^2}.$$

Для заданной величины временной задержки  $\Delta t_k$  получаем число  $k$ :

$$k = -\frac{\Delta t_k}{P_0} + \sqrt{2\frac{\Delta t_k}{P_0 \dot{P}}} \approx \sqrt{2\frac{\Delta t_k}{P_0 \dot{P}}} = 1.4 \cdot 10^6.$$

Таким образом, обнаружить изменение периода пульсара можно через  $1.4 \cdot 10^6$  импульсов, что составляет немногим более 16 дней.

Эту задачу можно решить и другими способами. Рассмотрим, например, как меняются моменты прихода импульсов из-за увеличения периода. Каждый раз новый импульс приходит чуть позже, чем ему следовало бы в случае постоянного периода. Вклад в разницу вносит задержка импульса не только в течение последнего периода, но и всего времени, накопленного в ходе наблюдений начиная с момента  $t_0$ . Именно поэтому мы замечаем изменение периода гораздо раньше, чем период сам изменится на требуемую величину.



Пусть, как и раньше,  $t_k$  обозначает время прихода  $k$ -го импульса. Будем считать  $t_0=0$ . Тогда первый импульс придет в момент времени

$$t_1 = P_0 + \Delta P_1,$$

второй импульс – в момент

$$t_2 = t_1 + (t_1 + \Delta P_2) = 2P_0 + 2\Delta P_1 + \Delta P_2,$$

третий импульс – в момент

$$t_3 = t_2 + (t_2 + \Delta P_3) = 3P_0 + 3\Delta P_1 + 2\Delta P_2 + \Delta P_3$$

и так далее. Величины  $\Delta P_k$  – это разницы периодов в моменты  $t_k$  и  $t_{k-1}$ . Строго говоря, они различны, но, в силу ничтожности различия в периодах в моменты приходов соседних импульсов, их можно считать равными. Тогда формула для момента прихода  $k$ -го импульса упрощается:

$$t_k = kP_0 + \Delta P \sum_{n=1}^k n = kP_0 + \frac{k+1}{2} k \Delta P \approx kP_0 + \frac{k^2}{2} \Delta P.$$

Задержка момента прихода есть

$$\Delta t_k = t_k - kP_0 = \frac{k^2}{2} \Delta P.$$

Задав требуемую задержку, получаем величину  $k$ :

$$k = \sqrt{\frac{2\Delta t_k}{\Delta P}} = \sqrt{\frac{2\Delta t_k}{P_0 \dot{P}}},$$

что совпадает с полученным ранее соотношением.

## XI. 6 ХОЛОДНОЕ ОБЛАКО

Н.Н. Шахворостова

**?** Межзвездное облако состоит из молекулярного водорода ( $H_2$ ) и пыли и имеет форму шара с однородным внутренним распределением массы. Блеск далеких звезд, расположенных за центром облака, ослаблен на  $1^m$ . При каком радиусе это облако начнет сжиматься под действием собственного тяготения, если его температура составляет 20К? Массовое соотношение газа и пыли в облаке постоянно и равно 100:1, черные пылинки имеют радиус 0.5 мкм, плотность 1 г/см<sup>3</sup> и ослабляют свет по законам геометрической оптики.

**!** Основу массы облака составляет газ, прозрачный для излучения. Ослабление света происходит на пылевых частицах. Пусть  $J_0$  и  $J$  – величины потока излучения, входящего в облако и выходящего из него. Если облако только поглощает излучение и не излучает само, то эти величины связаны уравнением

$$J = J_0 e^{-\tau},$$

## XXII Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

где  $\tau$  – оптическая толщина облака, которую можно трактовать как число частиц на пути луча света. Из закона Погсона известно, что

$$J = J_0 10^{0.4(m_0 - m)}.$$

Сравнивая эти выражения и принимая во внимание, что блеск звезд за облаком ослаблен на  $1^m$ , получаем, что среднее число частиц на пути света равно

$$\tau = \ln 2.512 \sim 1.$$

Обозначив радиус пылинок как  $r$ , а радиус облака через  $R$ , записываем выражение

$$2R n \pi r^2 = \tau.$$

Здесь  $n$  – концентрация пылевых частиц. Отсюда мы выражаем массовую плотность пыли в облаке  $\rho_D$  и полную плотность  $\rho$ :

$$\rho_D = n \cdot \frac{4}{3} \rho_0 \pi r^3; \quad \rho = K \rho_D = \frac{2K\tau\rho_0 r}{3R}.$$

Здесь  $\rho_0$  – плотность одной пылинки,  $K$  – соотношение массы газа и пыли в облаке (учитываем, что оно значительно больше единицы). Запишем формулу для круговой (первой космической) скорости на краю облака:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}} \cdot R = \sqrt{\frac{8\pi GK\tau\rho_0 r R}{9}}.$$

Коэффициент  $8/9$  близок к единице, и в дальнейших расчетах мы его опускаем. Облако перестанет быть устойчивым и начнет сжиматься, если характерные скорости частиц (молекул газа) станут меньше первой космической скорости. Среднеквадратичная скорость частицы равна

$$v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3\mathfrak{R}T}{\mu}}.$$

Здесь  $m$  – масса молекулы водорода,  $\mu$  – молярная масса,  $k$  – постоянная Больцмана,  $\mathfrak{R}$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – температура. Отсюда получаем выражение для радиуса:

$$R \geq \frac{3\mathfrak{R}T}{\pi G\mu K\tau\rho_0 r} \approx \frac{\mathfrak{R}T}{G\mu K\tau\rho_0 r} = 2.5 \cdot 10^{16} \text{ м} \approx 0.8 \text{ пк}.$$