# XXIV Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

# Смоленск, 2017 г.

---

# Практический тур

## IX.1 НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ МАРСА

*О.С. Угольников*

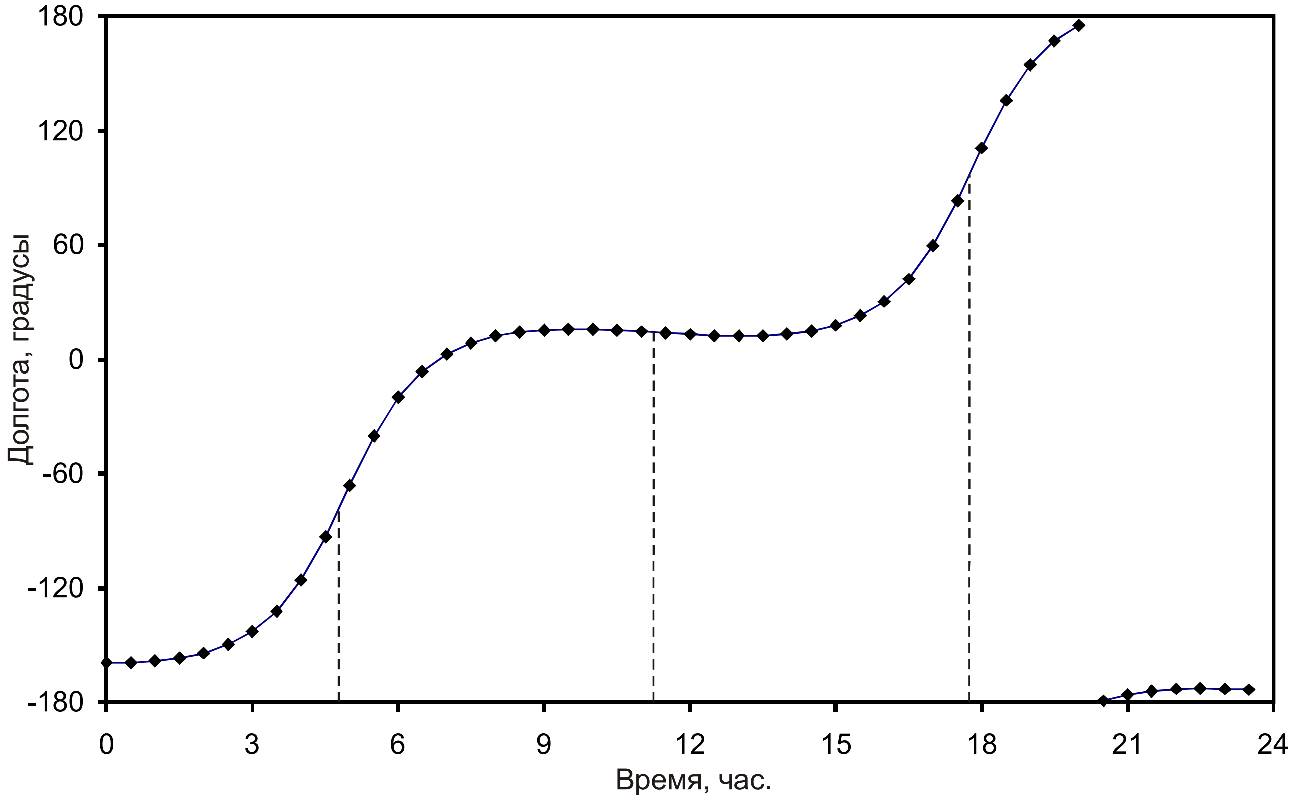
**Условие.** Орбитальная станция обращается вокруг Марса по экваториальной орбите с выключенными двигателями и каждые полчаса фотографирует поверхность планеты точно под собой (в надире). В таблице приведены моменты съемки по бортовым часам аппарата (Всемирное время на Земле) и марсианская долгота центра кадра. Определите наибольшее и наименьшее расстояние аппарата от центра Марса.

| Час (UT) | Долгота | Час (UT) | Долгота | Час (UT) | Долгота | Час (UT) | Долгота |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | –159.09 | 6.0 | –20.01 | 12.0 | 13.14 | 18.0 | 110.98 |
| 0.5 | –159.03 | 6.5 | –6.32 | 12.5 | 12.57 | 18.5 | 135.99 |
| 1.0 | –158.38 | 7.0 | 2.71 | 13.0 | 12.29 | 19.0 | 154.60 |
| 1.5 | –156.88 | 7.5 | 8.53 | 13.5 | 12.45 | 19.5 | 167.22 |
| 2.0 | –154.17 | 8.0 | 12.19 | 14.0 | 13.25 | 20.0 | 175.50 |
| 2.5 | –149.73 | 8.5 | 14.36 | 14.5 | 14.96 | 20.5 | –179.18 |
| 3.0 | –142.76 | 9.0 | 15.48 | 15.0 | 17.97 | 21.0 | –175.87 |
| 3.5 | –132.05 | 9.5 | 15.86 | 15.5 | 22.84 | 21.5 | –173.94 |
| 4.0 | –115.98 | 10.0 | 15.73 | 16.0 | 30.45 | 22.0 | –172.99 |
| 4.5 | –93.33 | 10.5 | 15.27 | 16.5 | 42.10 | 22.5 | –172.73 |
| 5.0 | –65.98 | 11.0 | 14.60 | 17.0 | 59.45 | 23.0 | –172.94 |
| 5.5 | –39.98 | 11.5 | 13.85 | 17.5 | 83.35 | 23.5 | –173.45 |

**Решение.** Съемка поверхности Марса производится с интервалом в 30 минут. Для начала мы должны отметить, что этот интервал времени существенно меньше орбитального периода аппарата. Действительно, даже если не учитывать наличие у Марса атмосферы, минимальное время облета Марса составляет

$$T_M = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}} \sim 1.7 \text{ ч.}$$

Следовательно, мы можем не рассматривать варианты совершения спутником целого оборота за время между двумя последовательными актами съемки. Приведенные в таблице данные можно анализировать напрямую, можно представить их в виде графика. Мы видим, что большую часть времени долгота точки Марса под спутником меняется медленно, но в некоторые периоды начинает быстро возрастать. Из этого можно сделать вывод, что спутник обращается по эллиптической орбите в ту же сторону, что и вращение Марса вокруг своей оси. Большую часть времени угловая скорость спутника сравнима с угловой скоростью Марса, и он даже может отставать от планеты, смещаясь над ее поверхностью на запад. Вблизи периария угловая скорость спутника заметно увеличивается, и он начинает обгонять осевое вращение Марса.




По приведенным данным можно оценить моменты прохождения периария, во время которых рост долготы происходил максимально быстро. Эти моменты соответствуют 4.75ч и 17.75ч. Из этого мы получаем величину орбитального периода *T*: 13.0 часов. Из III закона Кеплера определяем величину большой полуоси орбиты аппарата:

$$a = \left( \frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 13300 \text{ км.}$$

Эксцентриситет орбиты Марса, а вместе с ним и наибольшее и наименьшее расстояние проще всего найти, определив угловые скорости аппарата в периастрии и апоастрии. Взяв найденные интервалы, соответствующие периастрию (4.5-5.0 часов и 17.5-18.0 часов), мы видим, что долгота точки съемки меняется на 27.5°, то есть ее изменение $\Delta\lambda_P$ составляет 55.0° в час. Момент апоария соответствует середине временного отрезка между периариями, то есть времени 11.25 часов. Взяв интервал (11.0-11.5 час), мы видим, что долгота уменьшается на 0.75°, изменение $\Delta\lambda_A$ есть –1.5° в час. Чтобы определить сами угловые скорости, нужно учесть осевое вращение Марса с периодом *S* (24.623 часа).

$$\omega_P = \frac{360^O}{S} + \Delta\lambda_P = 69.6^O/\text{ч.}$$

$$\omega_{\text{A}} = \frac{360^{O}}{S} + \Delta\lambda_{A} = 13.1^{O}/\text{ч.}$$

Из II закона Кеплера мы знаем, что

$$\frac{\omega_{\text{P}}}{\omega_{\text{A}}} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{2}.$$

Из этого мы получаем

$$\frac{1+e}{1-e} = 2.3; \quad e \approx 0.4.$$

Минимальное и максимальное расстояние аппарата от центра Марса равны

$$d_{\text{MIN}} = a\,(1-e) \sim 8.0 \text{ тыс.км}; \; d_{\text{MAX}} = a\,(1+e) \sim 18.6 \text{ тыс.км}.$$

**Система оценивания (от одного члена жюри).** Для решения задачи необходимо правильно интерпретировать представленные в таблице данные, и получить из них величины большой полуоси и эксцентриситета орбиты космического аппарата.

**1 этап: 1 балл.**
Обоснование, что варианты совершения аппаратом целого оборота в период между съемками можно не рассматривать.
**2 этап: 2 балла.**
Правильное определение орбитального периода аппарата (возможна погрешность до 0.5 часа).
**3 этап: 1 балл.**
Определение величины большой полуоси орбиты аппарата.
**4 этап: 4 балла.**
Определение соотношения угловых скоростей аппарата в периарии и апоарии с учетом вращения самой планеты.
**5 этап: 2 балла.**
Вычисление эксцентриситета орбиты аппарата.
**6 этап: 2 балла.**
Определение максимального и минимального расстояния аппарата от центра Марса (по 1 баллу).

**Возможный вариант решения:** Участники олимпиады могут вычислить угловую скорость только в одной точке орбиты (например, в периарии) и из этого вычислять эксцентриситет. Этот способ существенно более сложный (сводится к кубическому уравнению), но при условии правильности выполнения он также оценивается полностью: 4 балла за вычисление угловой скорости (4 этап), 2 балла за вычисление эксцентриситета (5 этап), 2 балла за ответ (6 этап).

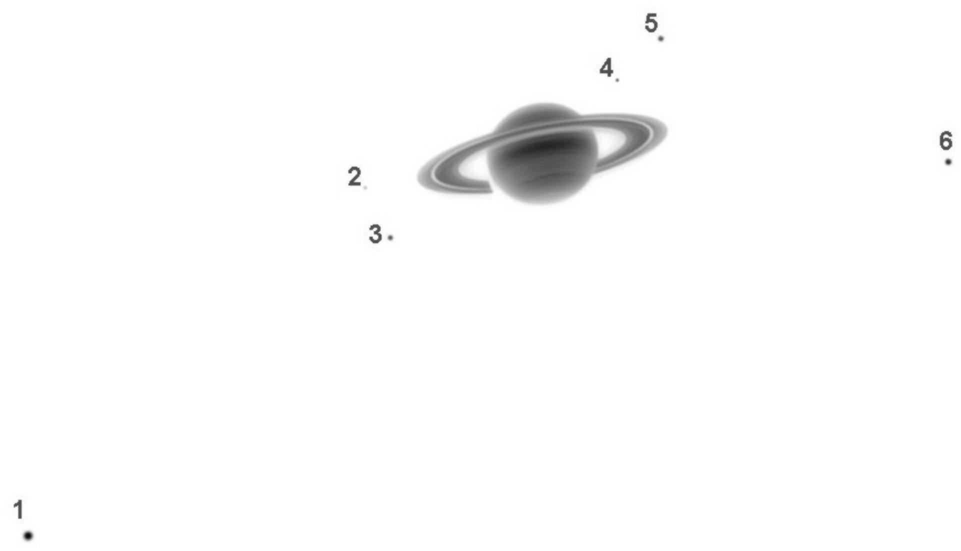
**Возможная ошибка при решении:** При вычислении угловой скорости аппарата может не учитываться осевое вращение Марса. В этом случае вне зависимости от результата, четвертый, пятый и шестой этапы решения не оцениваются, и суммарная оценка не превышает 4 баллов.

# IX.2 САТУРН СО СВИТОЙ

*А.Н. Акиньщиков*

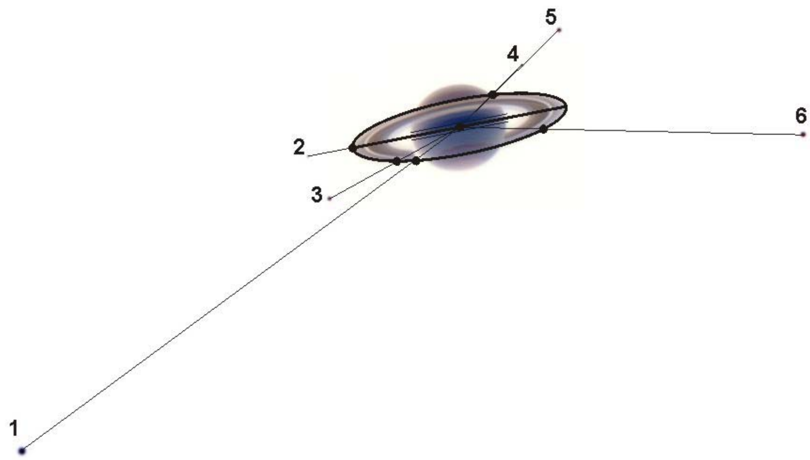
**Условие.** Перед Вами фотография Сатурна и некоторых его спутников (негатив), сделанная с Земли (автор – Рафаэль Дефавари). Используя наиболее точный, по Вашему мнению, метод, идентифицируйте спутники на фотографии. Укажите, какой из всех изображенных спутников в момент съемки находился ближе всех к Земле. Считайте, что все кольца и все спутники находятся в одной плоскости, орбиты спутников круговые. Данные о наиболее крупных спутниках Сатурна приведены в таблице.

| Спутник | Масса | Радиус | Плотность | Радиус орбиты | Период обращения | Геометрич. альбедо | Видимая звездная величина |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Мимас | $3.75\cdot10^{19}$ | 390 | 1.15 | 185590 | 0.942421 | 0.5 | ~11 |
| Энцелад | $1.08\cdot10^{20}$ | 250 | 1.61 | 237950 | 1.370218 | 0.99 | ~11 |
| Тефия | $7.55\cdot10^{20}$ | 530 | 1.21 | 294660 | 1.887802 | 0.9 | 10.2 |
| Диона | $1.05\cdot10^{21}$ | 560 | 1.43 | 377400 | 2.736915 | 0.7 | 10.4 |
| Рея | $2.49\cdot10^{21}$ | 765 | 1.33 | 527040 | 4.517500 | 0.7 | 9.7 |
| Титан | $1.35\cdot10^{23}$ | 2575 | 1.88 | 1221850 | 15.94542 | 0.21 | 8.2 |
| Япет | $1.88\cdot10^{21}$ | 730 | 1.21 | 3560800 | 79.33018 | 0.2 | ~11.0 |




**Решение.** Проще всего было бы отождествить спутники Сатурна по их видимой яркости, однако некоторые из них схожи по этому параметру. Кроме этого, яркость может неточно передаваться на фотографии. Правильней определить спутники по их положению относительно Сатурна. Хотя мы видим их в плоскости рисунка и изначально не знаем их текущего положения на орбите, мы можем определить их пространственное расстояние от Сатурна.

Учтем, что все спутники находятся на своих круговых орбитах в той же плоскости, что и кольца Сатурна. Кольца Сатурна также круглые и видны на фото как эллипс из-за эффекта проекции. Следовательно, все орбиты спутников будут иметь форму эллипсов, подобных эллипсу кольца. Мы можем определить радиус орбиты спутника $R_i$ по отношению к внешнему радиусу кольца $R_R$, соединив спутник с центром Сатурна и отметив точку, где эта линия пересечет внешнюю границу кольца.




В таблице приведены отношения $R_i/R_R$ для всех шести спутников. Далее мы можем вычислить отношение радиуса кольца к экваториальному радиусу Сатурна $R_R/R_0$, измерив большие полуоси соответствующих эллипсов (отношение около 2.1). Наконец, перемножив эти две величины и радиус Сатурна $R_0$, мы получаем пространственные расстояния спутников от центра Сатурна $R_i$. Вследствие ошибок измерений они отличаются от табличных, но отождествить спутники можно.

| № | $R_i/R_R$ | $R_i/R_0$ | $R_i/10^5$ км | Спутник |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10.2 | 21.3 | 12.9 | Титан |
| 2 | 1.4 | 2.9 | 1.8 | Мимас |
| 3 | 2.0 | 4.3 | 2.6 | Тефия |
| 4 | 1.9 | 4.0 | 2.4 | Энцелад |
| 5 | 3.1 | 6.4 | 3.9 | Диона |
| 6 | 4.1 | 8.6 | 5.2 | Рея |

Нам остается ответить на вопрос, какой из спутников ближе всех к Земле. По виду кольца и его тени можно сделать вывод, что верхние части эллипсов находятся в пространстве ближе к нам. Поэтому самым близким оказывается спутник 5 – Диона, расположенный выше всех на фотографии.

**Система оценивания (от одного члена жюри).**

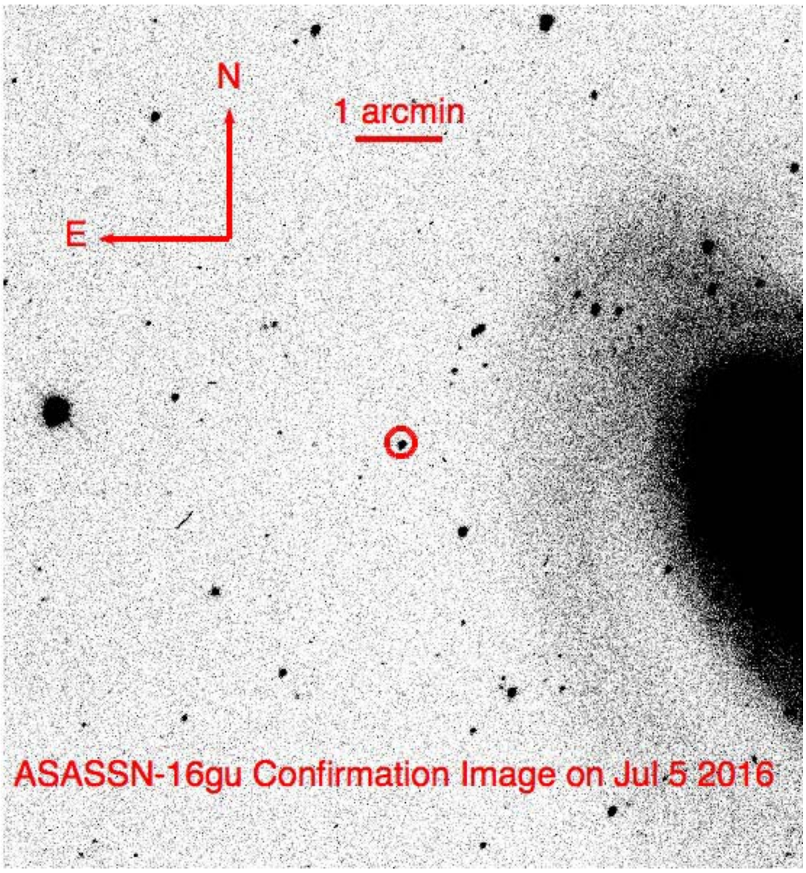
**1 этап: 4 балла.**
Правильное построение метода и вычисление расстояний от спутников до центра Сатурна, на основе точек пересечения направлений на спутники с кольцом. Участники не обязаны использовать внешний край кольца, хотя это наиболее точный метод.
**2 этап: 6 баллов.**
Отождествление спутников Сатурна, по 1 баллу за каждый спутник.
**3 этап: 2 балла.**
Определение ближайшего к Земле спутника, при наличии верного обоснования.

**Возможная ошибка при решении:** спутники отождествляются, исходя из их яркости или распределения в картинной плоскости. В этом случае за первый этап решения выставляется не более 1 балла.

# IX.3 «СВЕРХНОВАЯ» МАКЕМАКЕ

*Е.Н. Фадеев*

**Условие.** Астрономы из команды ASAS-SN, патрулирующие небо в поисках сверхновых звезд, обнаружили на снимке 5 июля 2016 года объект, которого не было на снимке от 26 июня 2016 года. В первом сообщении было объявлено, что найдена новая сверхновая в далекой галактике NGC 4725, но позже оказалось, что обнаруженный объект – это карликовая планета Макемаке. По предоставленной фотографии определите, за сколько дней до обнаружения Макемаке появилась в кадре? Считать, что во время наблюдений Макемаке была в противостоянии с Солнцем на расстоянии 51 а.е. от Земли.




**3. Решение.** Макемаке – далекий объект Солнечной системы. Как видно по расстоянию от Земли, скорость орбитального вращения Макемаке в 7 с лишним раз меньше, чем у Земли (в реальности, она еще меньше, так как сейчас Макемаке располагается близ афелия своей орбиты). Если карликовая планета находится в противостоянии, то Земля движется примерно перпендикулярно направлению на нее. Угловая скорость движения Макемаке по небу будет определяться, прежде всего, движением Земли (скорость $v_0$) и составит

$$\omega = v_0/L = 0.02° \text{ в день.}$$

Здесь $L$ – расстояние от Земли до Макемаке. На снимке 5 июля она находилась в центре кадра, в 4.5′ или (1/13)° от края. Такое угловое расстояние она пройдет примерно за 4 дня.

Так как Макемаке вступила в противостояние вблизи летнего солнцестояния, то за счет движения Земли она движется по небу попятным движением параллельно экватору, вдоль горизонтальной оси кадра. Собственная пространственная скорость Макемаке существенно меньше и на картину влияет мало.

**Система оценивания (от одного члена жюри).**

**1 этап: 6 баллов.**
Оценка угловой скорости Макемаке по небу. Ее можно проводить, считая саму планету неподвижной в пространстве (движение по небу только за счет орбитального движения Земли), можно пытаться учесть и движение самой Макемаке, сделав предположение о характере ее орбиты.
**2 этап: 3 балла.**
Определение размера поля зрения кадра.
**3 этап: 3 балла.**
Вычисление времени нахождения Макемаке в кадре. Если участник не учитывает, что Макемаке дошла только до середины кадра, и получает вдвое больший ответ – оценка уменьшается на 2 балла.

**Возможная ошибка при решении:** угловая скорость Макемаке по небу приравнивается к ее гелиоцентрической орбитальной угловой скорости (не учитывается движение Земли), которая меньше примерно в 7 раз. В этом случае за 1 этап выставляется 2 балла вместо 6 и 0 балл из 3 за третий этап, так как получающийся в этом случае ответ противоречит условию задачи, Макемаке наблюдалась бы в кадре 26 июня. Итоговая оценка не может превышать 5 баллов.

**Возможная ошибка при решении:** предположение, что Макемаке движется по кадру по диагонали с итоговым ответом 6 дней. Это не соответствует действительности, так как движение Макемаке в противостоянии не может образовывать большой угол с эклиптикой. В этом случае не засчитывается третий этап решения задачи, и общая оценка не превышает 9 баллов. Учет наклона экватора к эклиптике (23.5°) увеличивает ответ менее, чем на сутки, и на оценку не влияет.

# X/XI.1 ЗВЕЗДЫ-БЕГЛЕЦЫ

*О.С. Угольников*

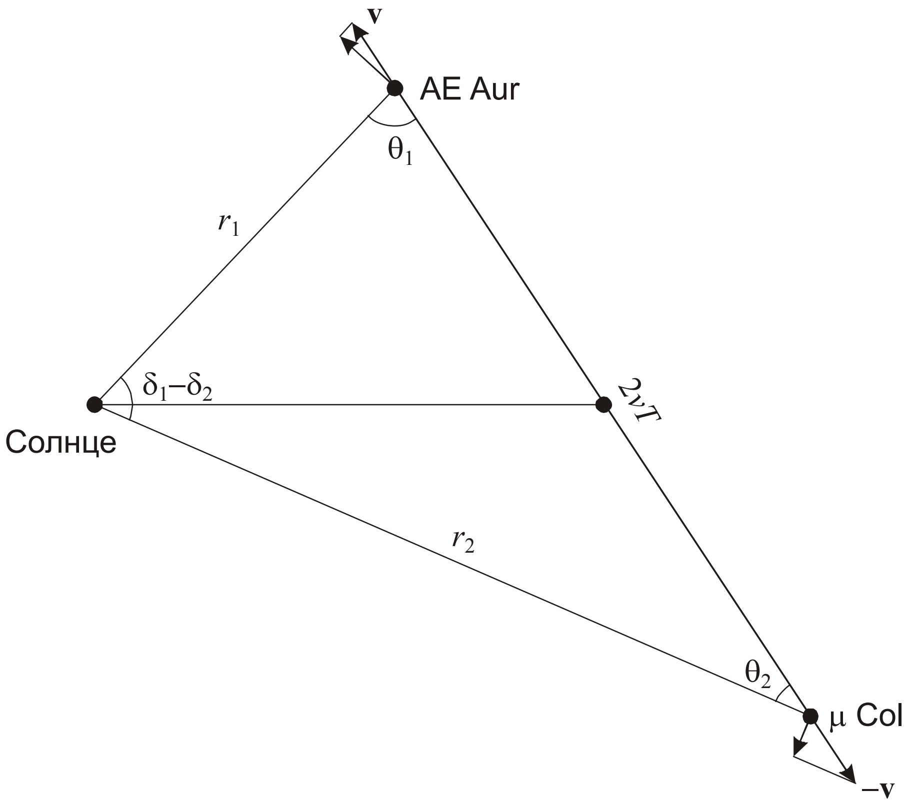
**Условие.** В таблице приведены координаты и данные о собственном движении двух звезд. Известно, что эти звезды образовались совместно, после чего разлетелись в противоположных направлениях с равными скоростями. Исходя из этого, определите, сколько времени прошло с момента их разлета. Разницей прямых восхождений, собственным движением звезд по прямому восхождению, а также их гравитационным взаимодействием (взаимным и с другими объектами) пренебречь. Считать, что Солнце неподвижно относительно центра масс системы из этих звезд. Что Вы можете сказать о месте образования звезд?

| Звезда | $\alpha$ | $\delta$ | $\mu\alpha$, 0.001″/год | $\mu\delta$, 0.001″/год |
|---|---|---|---|---|
| AE Возничего | 05.5ч | +34.3° | ~0 | +44.7 |
| $\mu$ Голубя | 05.5ч | –32.3° | ~0 | –22.2 |

**Решение.** В соответствии с условием задачи, звезды имеют сходное прямое восхождение и движутся на небе в противоположные стороны вдоль одного круга склонения. Самый простой, но при этом не вполне точный способ определить время с момента разлета звезд – предположить, что собственное движение за это время не менялось. Тогда решение находится элементарно:

$$\widetilde{T} = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\mu_2 - \mu_1} = \frac{1^O}{0.001''}\ \textit{лет} = 3.6\ \textit{млн лет}.$$

Однако, сделанное при этом предположение, вообще говоря, противоречит условию задачи. Очевидно, что в момент разлета звезды имели собственные движения, равные по модулю и противоположные по знаку. Как видно из таблицы, в настоящий момент это не так, следовательно, собственные движения успели измениться. Изобразим положение звезд на рисунке в плоскости, содержащей Солнце и линию, соединяющую звезды:




По условию задачи, звезды разлетаются в пространстве вдоль одной прямой со скоростями $v$ и $-v$ и к моменту наблюдений разошлись на расстояние $2vT$, где $T$ – возраст звезд. Обозначим через $r_{1,2}$ текущие расстояния до звезд. Собственные движения (угловые скорости) звезд равны

$$\mu_1 = \frac{v \sin\theta_1}{r_1}; \quad \mu_2 = -\frac{v \sin\theta_2}{r_2}.$$

Рассмотрим треугольник "Солнце – AE Aur – μ Col". Из теоремы синусов имеем:

$$\frac{2vT}{\sin(\delta_1 - \delta_2)} = \frac{r_1}{\sin\theta_2} = \frac{r_2}{\sin\theta_1}.$$

Подставим в последнюю формулу выражение для синусов углов из определения собственного движения:

$$\frac{2vT}{\sin(\delta_1 - \delta_2)} = -\frac{vr_1}{r_2\mu_2} = \frac{vr_2}{r_1\mu_1}.$$

Возведем в квадрат первое из трех равных выражений и перемножим два других:

$$\frac{4v^2T^2}{\sin^2(\delta_1 - \delta_2)} = -\frac{v^2}{\mu_1\mu_2}.$$

Отсюда получаем выражение для интервала времени с момента разлета звезд:

$$T = \frac{\sin(\delta_1 - \delta_2)}{2\sqrt{-\mu_1\mu_2}} = 3.0 \text{ } \textit{млн лет.}$$

Знак "–" под квадратным корнем не должен смущать, так как собственные движения звезд имеют разные знаки. Звезды очень молодые, что естественно, так как обе являются горячими сверхгигантами со светимостью в несколько десятков тысяч светимостей Солнца. По координатам мы можем видеть, что точка их рождения находится вблизи туманности Ориона. Данные две звезды являют собой классический пример так называемых "звезд-беглецов", получивших сильные противоположные импульсы в результате взаимодействия с другими звездами этой ассоциации, вероятнее всего – с компонентами двойной системы ι Ориона.

**Система оценивания (от одного члена жюри).**

**1 этап: 6 баллов.**
Правильная двумерная геометрическая картина взаимного расположения и движения двух звезд относительно Солнца, учет изменения их собственного движения с момента разлета.
**2 этап: 4 балла.**
Вычисление времени, прошедшего с момента разлета звезд.
**3 этап: 2 балла.**
Вывод о происхождении звезд в Туманности Ориона.

**Возможная ошибка при решении:** участники могут найти время с момента разлета по первой формуле решения, предполагая постоянство собственных движений. В этом случае первый этап решения не засчитывается, второй и третий оцениваются, исходя из точности выполнения. Максимальная оценка может составить 6 баллов.

**Возможная ошибка при решении:** участники отмечают, что скорости звезд не перпендикулярны направлению к наблюдателю, но время оценивают в модели постоянных собственных движений. В этом случае суммарная оценка за 1-2 этапы (при отсутствии ошибок) не превосходит 6 баллов.

# X.2 СУМЕРКИ НА ТИТАНЕ

*О.С. Угольников*

**Условие.** Перед Вами фотография, сделанная с борта АМС "Кассини" (негатив). На ней видны три спутника Сатурна – Титан, Мимас и Рея. Оцените по фотографии длительность сумерек (в земных часах) на экваторе Титана.

**2. Решение.** В условии задачи не сказано, на каком расстоянии от каждого из спутников находилась АМС "Кассини" в момент съемки, поэтому видимые поперечники спутников не соответствуют их реальным размерам. Тем не менее, мы можем сразу указать на фотографии Титан – наличие у него атмосферы приводит к большей толщине серпа и эффекту "удлинения рогов" серпа, которого нет у Реи (слева сверху) и Мимаса (внизу). Обратим внимание, что у Титана данный эффект значительно сильнее, чем у Венеры по наблюдениям с Земли, и вообще оказывается самым сильным среди тел Солнечной системы с атмосферами, что будет объяснено далее.

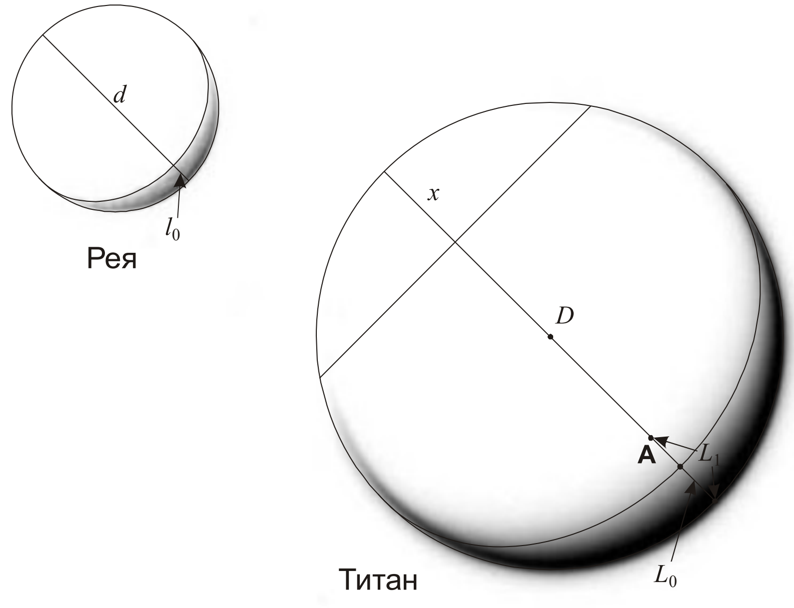
Так как Солнце располагается от точки съемки несравнимо дальше всех трех спутников, то при отсутствии атмосферы их фазы должны быть одинаковы, а рога серпов направлены в одну сторону. О форме серпа в этом случае лучше всего судить по спутнику Рея. По фотографии можно определить величину фазы Реи (см. рисунок):

$$F_0 = \frac{l_0}{d} \approx 0.1.$$

Если бы фаза Титана была такой же, видимая толщина составляла $L_0 = DF_0$ (показана на рисунке). В реальности серп имеет толщину $L_1$ и фазу

$$F = \frac{L_1}{D} \approx 0.2.$$

Очевидно, что фазу можно измерить лишь приближенно, однако, как мы увидим далее, более точные измерения для решения задачи и не требуются. Расстояние от аппарата до Реи и Титана много больше их размеров, поэтому мы можем считать, что с аппарата видна ровно половина поверхности этих спутников.




У Титана освещено не только дневное полушарие, но и сумеречное кольцо. Определим максимальное погружение Солнца под горизонт, при котором мы еще видим рассеянное в атмосфере излучение (см. рисунок). Этот угол можно найти по формуле:

$$\gamma_1 = \arccos\frac{R - L_1}{R} - \arccos\frac{R - L_0}{R} = \arccos(1 - 2F_1) - \arccos(1 - 2F_0) = 16^{\circ}.$$

Здесь $R$ – радиус Титана ($D/2$). Мы можем сразу отметить, что этот угол явно больше, чем у Земли, так как на нашей планете погружение Солнца под горизонт на 16° соответствует поздней стадии астрономических сумерек, во время которых освещенность несравнимо меньше, чем днем.

Другой способ оценки того же угла – по удлинению рогов серпа Титана. Мы можем измерить расстояние $x$ (см. рисунок сверху), которое оказывается равным $0.2D$ или $0.4R$. (при отсутствии атмосферы оно было бы равно радиусу $R$). Спроектировав Титан на плоскость, содержащую Солнце и аппарат (см. рисунок снизу), мы имеем:

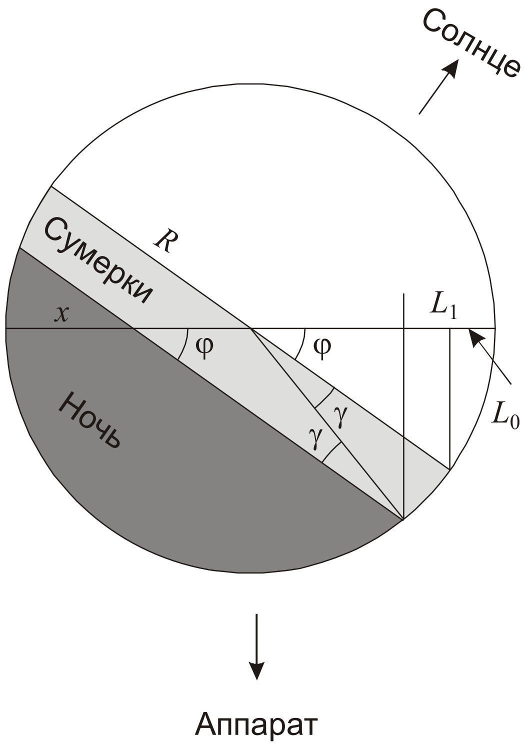
$$\frac{R - x}{\sin\gamma_2} = \frac{R}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sqrt{1-(1-2F_0)^2}}.$$

Отсюда

$$\gamma_2 = \arcsin\left(\sqrt{1-(1-2F_0)^2}\,\frac{R - x}{R}\right) = 21^{\circ}.$$

Углы не совпадают, что естественно, так как все расстояния измеряются приближенно. Будем для определенности считать угол $\gamma$ равным 18°.

На экваторе Титана во время равноденствия Солнце заходит перпендикулярно горизонту, и сумерки продолжаются, пока спутник поворачивается на этот угол $\gamma$. Период осевого вращения Титана $T$, как и у всех крупных спутников планет, синхронизован с орбитальным периодом и равен примерно 16 дней.




Синодический период (длительность солнечных суток) несколько больше из-за движения Сатурна по орбите, но так как он движется очень медленно, этой разницей можно пренебречь. Длительность сумерек во время равноденствия равна

$$t = T\frac{\gamma}{360^{\circ}} = 0.8 \text{ сут } \approx 19 \text{ час.}$$

Во время солнцестояний, когда склонение Солнца на Сатурне и Титане δ достигает 27°, длительность сумерек увеличивается на фактор (1/cos δ) и достигает 0.9 суток или 21.5 часа.

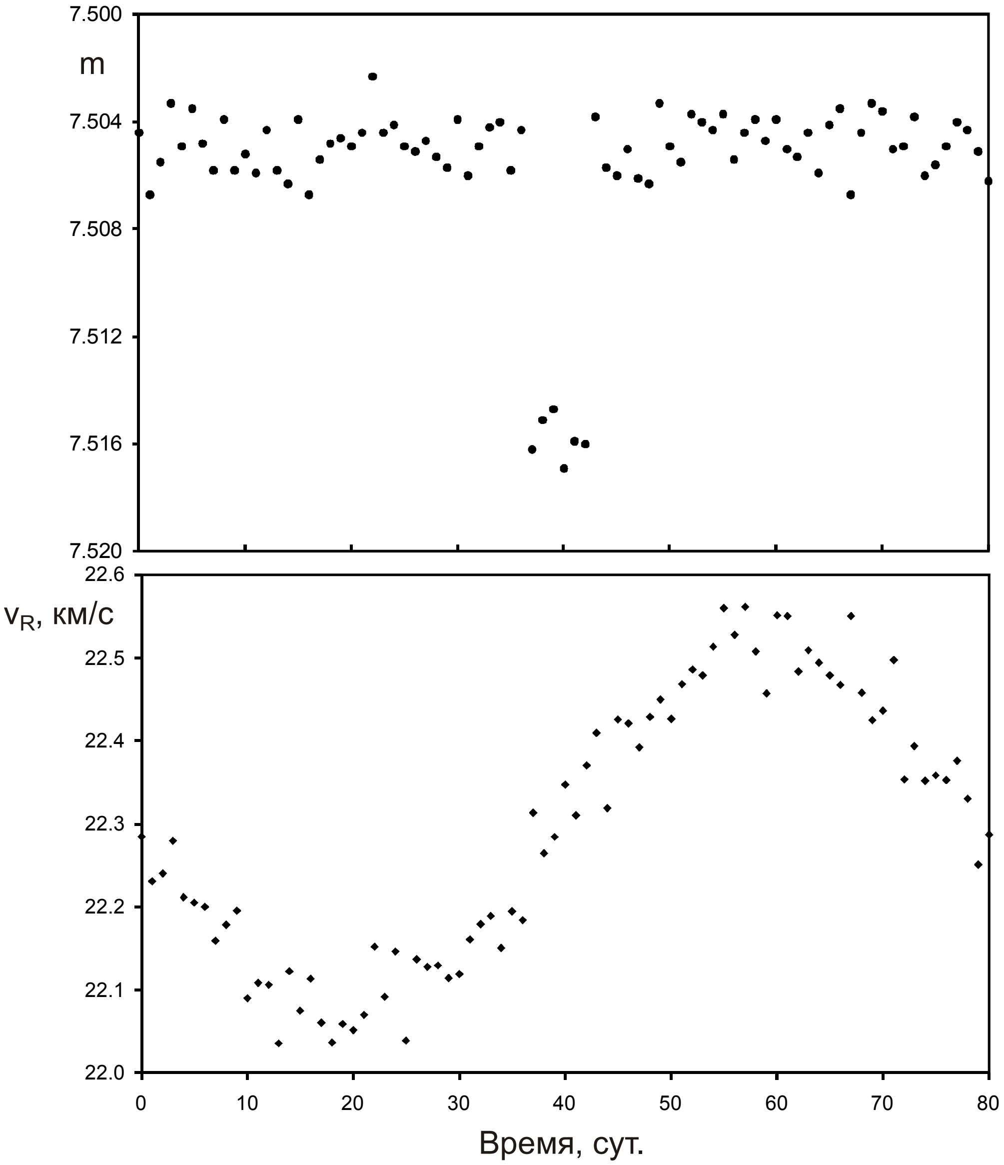
**Система оценивания (от одного члена жюри).**

**1 этап – 2 балла.**
Указание, какой из трех спутников – Титан, сделанное не на основе видимых размеров, на которые могло повлиять расположение космического аппарата, а оптического эффекта «удлинения рогов» либо видимого увеличения фазы.
**2 этап – 6 баллов.**
Определение угла погружения Солнца под горизонт, при котором еще продолжаются сумерки, и соответствующий участок на фотографии Титана еще остается освещенным. Это можно сделать любым из двух способов (увеличение фазы или удлинение рогов). Допускается погрешность до 5-6 градусов. Из данных 6 баллов три выставляется за качество геометрических измерений на фото, другие три – за точность вычислений.
**3 этап – 1 балл.**
Указание, что осевой период Титана равен орбитальному периоду. Участники могут вычислить синодический период Титана, который практически неотличим от осевого, возможно их прямое отождествление.
**4 этап – 2 балла.**
Вычисление длительности сумерек на экваторе Титана для элементарного случая равноденствий.
**5 этап – 1 балл.**
Учет случая солнцестояний.

# X/XI.3 ДАЛЕКАЯ ПЛАНЕТА

*О.С. Угольников*

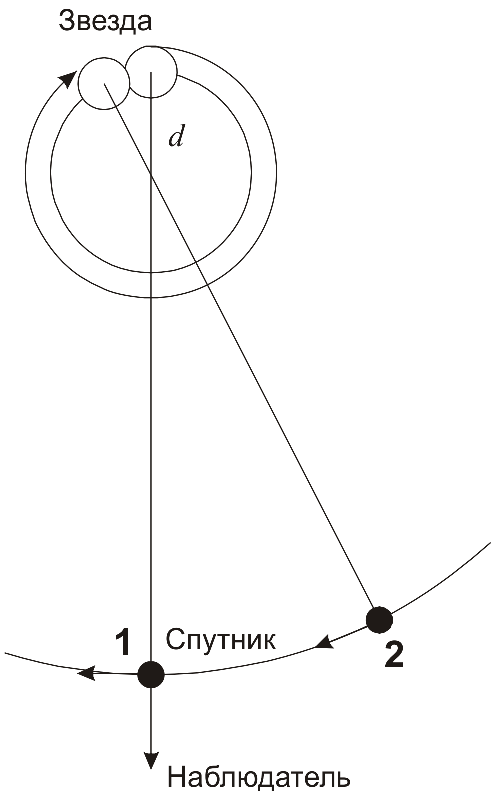
**Условие.** Около звезды с массой, равной массе Солнца, был обнаружен темный спутник. В некоторой обсерватории с интервалом ровно в 1 сутки производились одновременные измерения видимой звездной величины и гелиоцентрической лучевой скорости звезды, результаты представлены на графиках. Определите радиус звезды, массу и радиус спутника. Считать, что наблюдатель располагается в плоскости круговых орбит системы, а оба тела имеют сферическую форму. Других массивных тел в этой системе нет. Эффект потемнения звезды к краю не учитывать. Что из себя представляет эта звезда и чему равно расстояние до нее?




**Решение.** На первый взгляд, графики достаточно четко создают представление об этой системе. Наличие спутника приводит к двум эффектам – кратковременному падению блеска звезды в тот момент, когда темный спутник оказывается перед ней, а также синусоидальному изменению лучевой скорости звезды, связанному с ее движению относительно общего центра масс. Можно предположить, что орбитальный период составляет как раз 80 суток. Однако, более внимательный анализ показывает, что это не соответствует действительности.

Рассмотрим момент, соответствующий затмению звезды (момент времени 40 суток на графике), изображенный на рисунке цифрой 1. В это время оптическая звезда находится в наиболее удаленной от Земли точке орбиты. После затмения она должна начать приближаться к наблюдателю, что означает уменьшение ее лучевой скорости. Однако, последующие точки на кривой лучевой скорости, если не учитывать их погрешность, оказываются выше, то есть соответствуют удалению оптической звезды от наблюдателя.

Данное противоречие снимается, если вспомнить, что все наблюдения производились с интервалом ровно в 1 сутки. Коль скоро последующие за затмением (40 суток) измерения соответствуют большей лучевой скорости, на них система оказывается в предшествующей фазе (начало затмения или незадолго до него). Следовательно, за 1 сутки система почти успевает сделать $N$ целых оборотов, приближаясь уже к следующему затмению (случай $N=1$ показан на рисунке).




К моменту следующего наблюдения через время $t$ (1 сутки) система не успела завершить $(1/K)$ целого оборота, где $K=80$. Тогда орбитальный период выражается как:

$$T = \frac{t}{N - (1/\mathrm{K})} \approx \frac{t}{N}.$$

Целое число $N$ заранее неизвестно. Определим другие характерные параметры системы. Предположив, что масса спутника меньше массы звезды (в дальнейшем мы сможем это проверить), которая сама равна массе Солнца, из III закона мы получаем величину радиуса орбиты спутника:

$$a = (T, \textit{годы})^{2/3} = 3 \text{ млн км} / N^{2/3}.$$

Звездная величина вне затмений составляет $m_0 = 7.505$, во время затмений она уменьшается до $m_1 = 7.516$. Так как наблюдатель находится точно в плоскости орбиты системы, а яркость звезды однородна по диску, мы можем получить соотношение радиусов компонент:

$$m_0 - m_1 = 2.5\log\left(\frac{\pi R^2 - \pi r^2}{\pi R^2}\right) = 2.5\frac{\ln(1 - r^2 / R^2)}{ln10} = -\frac{2.5}{\ln 10}\frac{r^2}{R^2};$$

$$\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{\ln 10 \cdot (m_1 - m_0)}{2.5}} \approx \sqrt{0.92(m_1 - m_0)} = 0.1.$$

Спутник в 10 раз меньше звезды по радиусу. Далее, из $K=80$ измерений через равные интервалы времени $k=6$ пришлись на затмения. Следовательно, длительность затмения есть примерно $k/K$ от орбитального периода $T$. За весь период спутник пролетает путь $2\pi a$, а за время затмения – диаметр главной звезды (мы вновь считаем спутник много меньшим звезды как по размерам, так и по массе). Тогда мы получаем величину радиуса звезды:

$$\frac{2R}{2\pi a} = \frac{k}{K}; \quad R = \frac{\pi a k}{K} = \frac{700\ тыс.км}{N^{2/3}}.$$

Итак, если предположить, что за одни сутки система почти завершила один оборот, то радиус звезды получается равным радиусу Солнца. Учитывая, что по массе звезда также схожа с Солнцем, это представляется наиболее вероятным вариантом. Действительно, подстановка $N$=2 дает радиус в 0.63 радиуса Солнца. Подобных звезд с солнечной массой не существует, так как звезда солнечной массы не может иметь подобный радиус ни на каких стадиях своей эволюции. Даже редкие типы звезд - субкарлики - при солнечной массе имеют больший радиус. Такие же выводы можно сделать и для больших $N$. Единственный альтернативный вариант, который можно считать теоретически возможным – белый карлик с радиусом порядка радиуса Земли, и тогда $N$~1000. Хоть это и представляется крайне маловероятным для затменной системы, мы рассмотрим этот вариант наряду с основным в дальнейшем решении.

Амплитуда изменений лучевой скорости звезды $v$ (ее отклонение от среднего значения) составляет 0.2 км/с. Учитывая ориентацию орбиты, это есть сама орбитальная скорость звезды. Радиус орбиты звезды составляет

$$A = \frac{vT}{2\pi} = \frac{3000\ \text{км}}{N}.$$

Зная радиусы орбит звезды и спутника, мы получаем соотношение их масс:

$$\frac{m}{M} = \frac{A}{a} = \frac{3000\ км}{N} \cdot \frac{N^{2/3}}{3\ млн\, км} = \frac{0.001}{N^{1/3}}.$$

Если вспомнить о варианте белого карлика ($N$~1000), то спутник будет представлять собой тело с массой $10^{-4}$ массы Солнца. При этом его радиус в 10 раз меньше радиуса звезды, то есть около 600 км! В настоящее время таких плотных маломассивных объектов во Вселенной не найдено, более того, непонятно, как они могли бы появиться. Поэтому правдоподобным остается лишь вариант $N$=1, при котором звезда оказывается копией Солнца, а ее спутник в 10 раз меньше по размеру и в 1000 раз меньше по массе. Он очень похож на планету Юпитер. Можно показать, что несмотря на близость к звезде, он будет устойчивым к приливным силам, которые будут более чем в 10 раз слабее, чем это требуется для разрыва планеты.

Нам остается найти расстояние до системы. Учитывая, что звезда похожа на Солнце (абсолютная величина $+4.7^m$), а ее видимый блеск равен $+7.5^m$, мы можем заключить, что система отстоит от нас на 35 пк.

**Система оценивания (от одного члена жюри).**

**1 этап: 4 балла.**
Ключевой момент решения – вывод о возможных значениях орбитального периода. При выводе, что период равен 80 суткам, весь этап не засчитывается (0 баллов). Если в качестве единственного возможного периода берутся 1 сутки (без рассмотрения возможности других целых *N*), из этих 4 баллов выставляется 3 балла, остальные этапы решения (кроме возможного анализа типа звезд для разных *N*) оцениваются в полной мере, даже если они рассматриваются только для *N*=1.
**2 этап: 1 балл.**
Вычисление соотношения радиусов, исходя из глубины минимумов блеска.
**3 этап: 1 балл.**
Выражение для радиуса звезды, исходя из длительности затмений (в явном виде либо учет по ходу последующих вычислений).
**4 этап: 2 балла.**
Выражение для массы планеты через амплитуду лучевой скорости звезды. Если вместо амплитуды берется сама лучевая скорость (22 км/с), данный этап не засчитывается, ровно как и последующие, так как они приводят к неестественно большой массе планеты.
**5 этап: 2 балла.**
Анализ, какие из чисел *N* могут иметь физический смысл. Оценивается только для тех решений, где предположена возможность разных чисел *N*. Необходимо сделать вывод, что значения *N*>1 не соответствуют ни нормальным звездам, ни белым карликам (из-за неестественных свойств планеты). Если участник олимпиады допускает вариант *N*=2 как соответствующий субкарликам, эта ошибка считается незначительной и не влияет на оценку.
**6 этап: 1 балл.**
Вывод о типе звезды. Выставляется только в случае правильного ответа (Солнце), полученного на основе правильного анализа случая *N*=1.
**7 этап: 1 балл.**
Определение расстояния до системы. Оценивается только для правильного и обоснованного на предыдущих этапах вывода, что звезда аналогична Солнцу по своим свойствам.

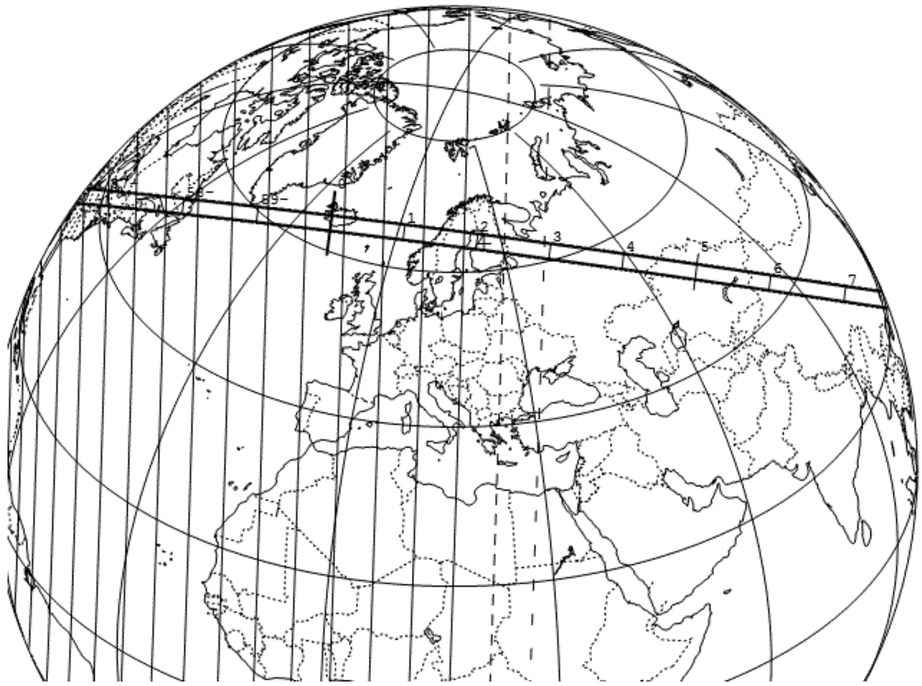
**Возможная ошибка участника:** Предположение, что орбитальный период планеты составляет 80 дней. Оно приводит к большому радиусу как звезды (20 радиусов Солнца), так и планеты (2 радиуса Солнца!). При подобном решении не засчитывается первый этап (0 баллов). Этапы 2-4 засчитываются при условии корректности расчетов (сумма – 4 балла). Этап 5 в этом решении отсутствует, этап 6 в задаче не засчитывается, так как он приводит к абсурдному радиусу планеты. 7 этап правильно выполнить невозможно, так как неизвестна светимость звезды. Общая оценка не может превышать 4 баллов.

**Возможная ошибка участника:** рассматривается только вариант N=1 с получением правильного ответа (звезда типа Солнца). В этом случае за первый этап выставляется 3 балла, этапы 2-4 засчитываются полностью (при условии правильности выполнения). Этап 5 при таком решении отсутствует, этапы 6 и 7 – корректны. Общая оценка не может превышать 9 баллов.

# XI.2 ГРЯДУЩЕЕ ПОКРЫТИЕ

*О.С. Угольников*

**Условие.** Перед Вами карта видимости покрытия звезды TYC 2428-01094-1 (видимая величина $11.5^m$) астероидом Каллиопа 24 марта 2017 года с 16ч57м до 17ч08м по Всемирному времени, видимого на территории России (моменты времени в минутах указаны на карте). Земля изображена, как она наблюдается со стороны астероида. Дневная часть поверхности Земли заштрихована сплошными линиями, сумеречная – пунктирными линиями. Координаты звезды: $\alpha$ = 6ч17.6м, $\delta$ = +34°39′. Астероид принадлежит главному поясу. Считая его орбиту круговой, определите расстояние от Земли до астероида в момент покрытия.




**2. Решение.** Покрытие звезды астероидом наблюдается через 4 дня после весеннего равноденствия. За это время Солнце сместилось в своем видимом движении примерно на 4° (16 минут) к востоку от точки весеннего равноденствия вдоль эклиптики. По координатам мы видим, что звезда и астероид отстоят примерно на то же расстояние к востоку от точки летнего солнцестояния и при этом находятся чуть выше эклиптики. Получается, что астероид располагается в восточной квадратуре, в 90° от Солнца и примерно в 11° к северу от точки летнего солнцестояния. К выводу о квадратуре также можно прийти, заметив, что с астероида видна половина освещенной части поверхности Земли.

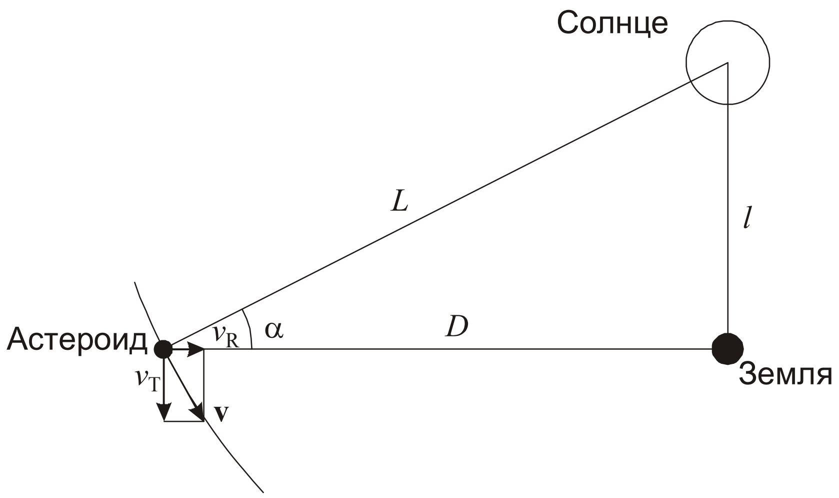
Если изобразить Землю в плоскости, перпендикулярной плоскостям экватора и эклиптики, то астероид и звезда также окажутся вблизи плоскости этого рисунка. Радиус-вектор орбиты Земли перпендикулярен плоскости рисунка, Солнце в нем располагается за Землей. В своем орбитальном движении Земля движется практически от астероида.


Так как звезда располагается от Земли несопоставимо дальше, чем астероид, движение его тени (области видимости покрытия) происходит с той же скоростью, что и геоцентрическое движение астероида. Из предложенной карты мы можем определить компоненты этой скорости в двух взаимно-перпендикулярных направлениях. Отметив положения центра тени на двух хорошо заметных удаленных делениях (например, 16ч59м и 17ч07м), получаем, что в горизонтальном направлении за восемь минут (480 секунд) астероид проходит расстояние, равное 0.64 от диаметра Земли или 8100 км. Геоцентрическая скорость астероида $v_T$ в этом направлении равна 16.9 км/с. Это направление перпендикулярно плоскости рисунка выше, и полученная скорость отражает движение астероида вокруг Солнца, так как Земля движется в плоскости рисунка.

В перпендикулярном направлении геоцентрическое движение астероида направлено на юг, а его скорость составляет 0.085 диаметра Земли или 1080 км за 8 минут. Соответствующая скорость равна 2.3 км/с. Скорость Земли в этом направлении составляет

$$u_V = u \sin(\delta - \varepsilon) = 5.9 \text{ км/с}$$

и направлена на север. Мы получаем, что вертикальная проекция гелиоцентрической скорости астероида $v_V$ составляет всего 3.6 км/с, что существенно меньше проекции $v_T$. Мы можем пренебречь проекцией $v_V$ и считать, что астероид в проекции рисунка движется горизонтально. Изобразим теперь ситуацию в проекции на плоскость, перпендикулярную первому рисунку и содержащую Солнце, Землю и астероид.




Обозначим радиусы орбит Земли и астероида как $l$ и $L$, а угловое расстояние между Солнцем и Землей как $\alpha$. Очевидно, что $\sin\alpha = l/L$. Орбитальная скорость астероида равна

$$v = \frac{v_T}{\cos\alpha} = u\sqrt{\frac{l}{L}} = u\sqrt{\sin\alpha}.$$

Здесь $u$ – орбитальная скорость Земли. Отсюда получаем:

$$\frac{v_T}{u} = \cos\alpha\sqrt{\sin\alpha} = \sqrt{\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)};$$
$$\sin^3\alpha - \sin\alpha + (v_T/u)^2 = 0.$$

У этого кубического уравнения, вообще говоря, будет три корня, два из которых имеют физический смысл ($0 < \sin\alpha < 1$). Чтобы решить это уравнение наиболее простым способом, и при этом сразу найти единственный нужный корень, учтем, что астероид принадлежит главному поясу, и мы примерно знаем отношение $l/L$ (около 1/3). Будем считать это число малым и введем обозначения: $\sin\alpha = x$, $(v_T/u)^2 = C$:

$$x^3 - x + C = 0.$$

Предположим поначалу, что число $x^3$ очень мало, и определим приближенное решение:

$$x_0 = C = 0.32,$$

что само по себе близко к сделанному выше предположению (1/3). Введя обозначение $x=x_0+\delta x$ и считая величину $\delta x$ малой, имеем:

$$x_0^3 + 3x_0^2\delta x - x - \delta x + C = C^3 + 3C^2\delta x - C - \delta x + C = C^3 + (3C^2 - 1)\delta x = 0;$$
$$x = C + \delta x = C + \frac{C^3}{1-3C^2} = \frac{C-2C^3}{1-3C^2} = 0.37.$$

Данное решение кубического уравнения можно также получить методом последовательных приближений с учетом малой величины $x^3$. В этом случае, приближенное решение на ($N$+1) шаге равно

$$x_{N+1} = x_N^3 + C.$$

Начальное приближение берется в таком же виде: $x_0 = C = 0.32$. Цепочка приближений даст тот же ответ $x = 0.37$. Он отличается от точного лишь в третьем знаке после запятой. Нам остается найти расстояние между Землей и астероидом:

$$D = \frac{l}{\mathrm{tg}\,\alpha} = l\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} = 2.5 \text{ а.е.},$$

что опять же близко к истинному значению, несмотря на все сделанные предположения. В реальности, орбита Каллиопы слегка вытянута, и в момент покрытия астероид располагается ближе к точке перигелия. Тем не менее, расстояние составляет 2.54 а.е., мало отличаясь от полученного в ходе решения.

**2. Система оценивания (от одного члена жюри).**

**1 этап: 2 балла.**
Вывод, что астероид находится вблизи квадратуры либо вычисление его углового расстояния от Солнца на небе.
**2 этап: 3 балла.**
Определение геоцентрической скорости астероида (две компоненты либо модуль и угол). Если находится только горизонтальная скорость в пренебрежении углом наклона, из этих 3 баллов выставляется 2, остальные этапы решения оцениваются в полной мере. Допускаются погрешности в пределах 0.3-0.4 км/с.
**3 этап: 3 балла.**
Выражение для гелиоцентрической орбитальной скорости астероида. При этом участники могут указать, что она лежит в плоскости "Солнце-Земля-астероид", пренебрегая компонентой $v_V$, а могут проводить полный трехмерный анализ.
**4 этап: 4 балла.**
Вычисление расстояния между Землей и астероидом.

**Возможная ошибка участника:** Полученная тангенциальная скорость астероида сразу приравнивается к его орбитальной скорости, пренебрегая углом $\alpha$ (это эквивалентно нулевому приближению решения кубического уравнения) с ответом 2.8-2.9 а.е. В этом случае за третий этап при правильных вычислениях выставляется только 1 балл, за 4 этап – также 1 балл. Максимальная оценка составляет 7 баллов.