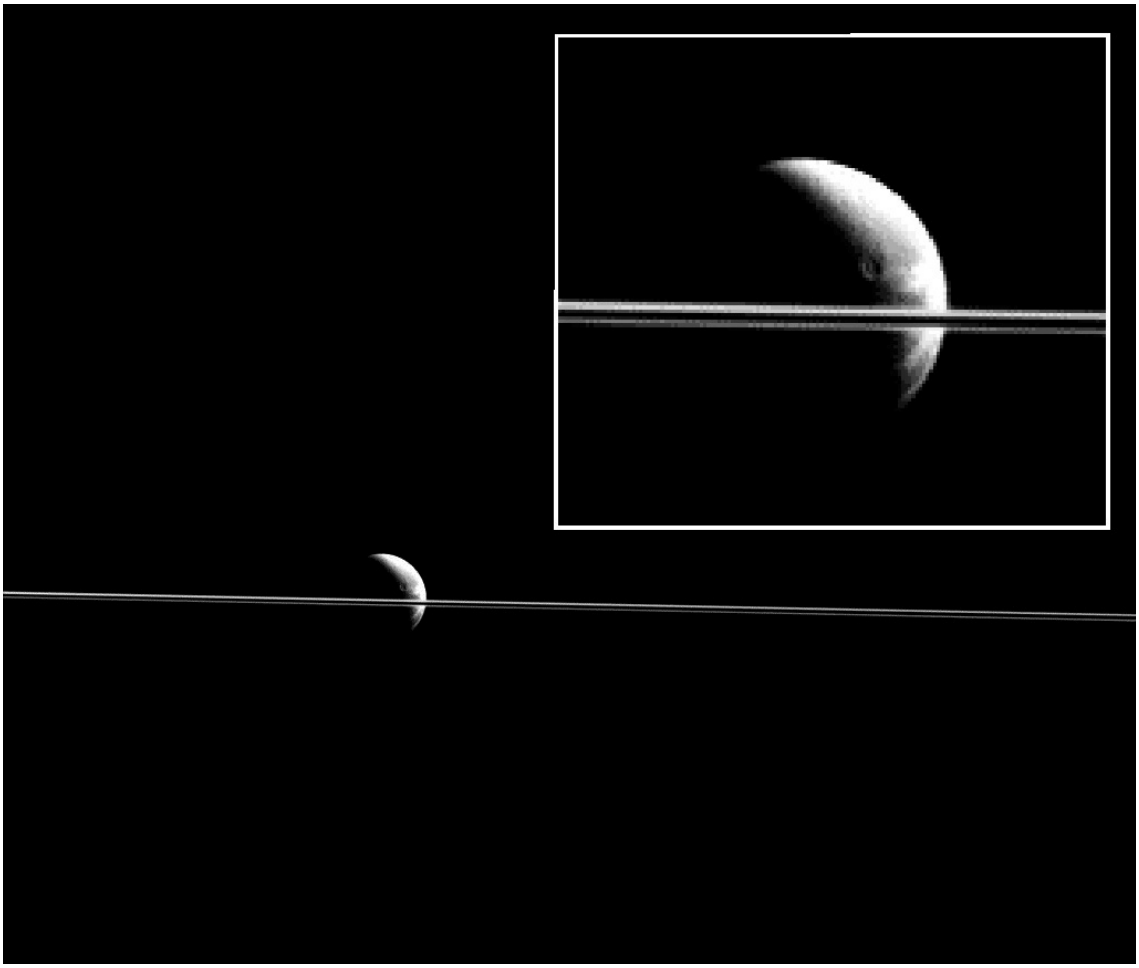
X/XI.7 КОСМИЧЕСКАЯ НОТА

М.И. Волобуева

7. Условие. Перед Вами снимок колец Сатурна и его спутника Дионы, сделанный автоматической межпланетной станцией «Кассини» 25 декабря 2015 года, находившейся тогда в плоскости колец Сатурна. Северный полюс мира для Сатурна находится сверху от фото. Известно, что вскоре после этого на Сатурне произошло летнее солнцестояние. Определите его дату. Орбиту Сатурна считайте круговой. Оцените точность полученного результата.



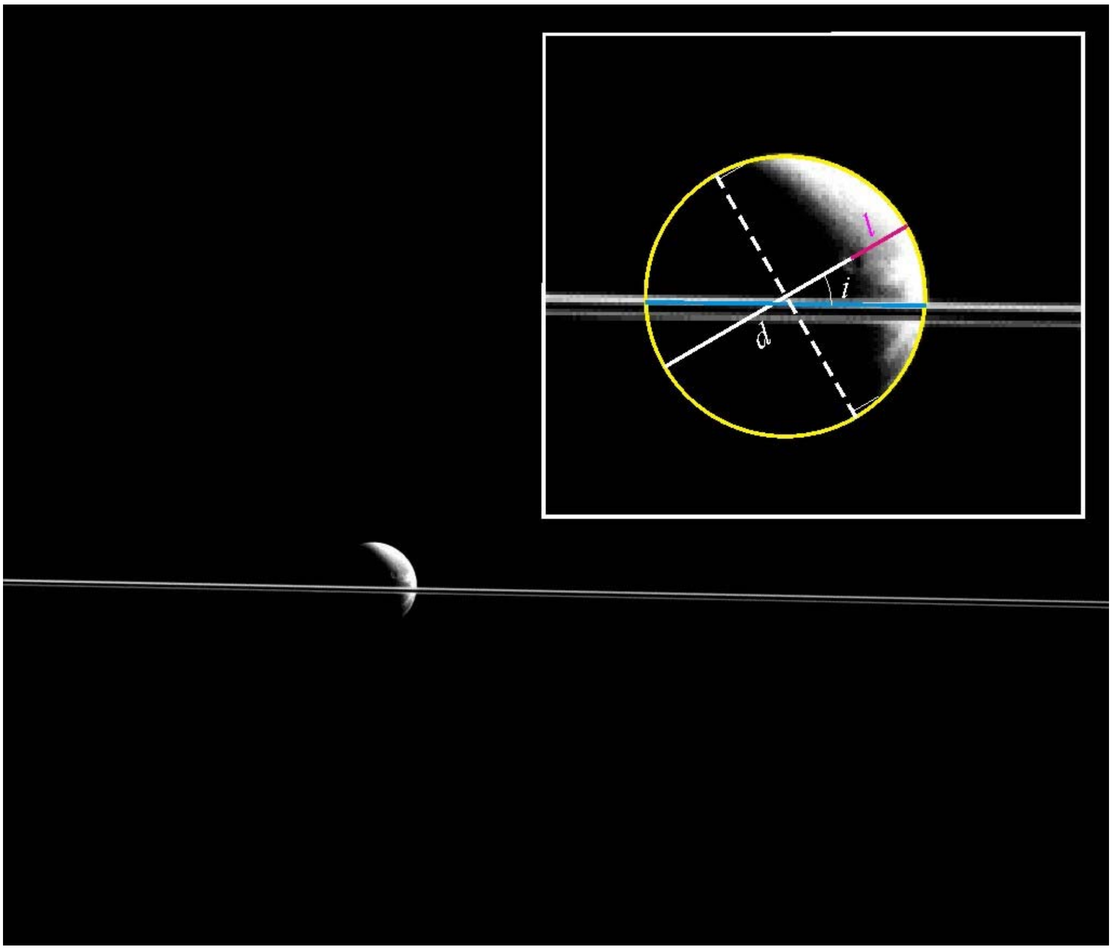
7. Решение. Как известно, кольца Сатурна находятся в плоскости его экватора. Поэтому по фазе Дионы и наклону ее серпа к плоскости колец можно определить склонение Солнца в сатурнианской экваториальной системе координат. Фаза Дионы равна отношению толщины серпа к диаметру спутника:

$$F = \frac{l}{d} = 0.23.$$

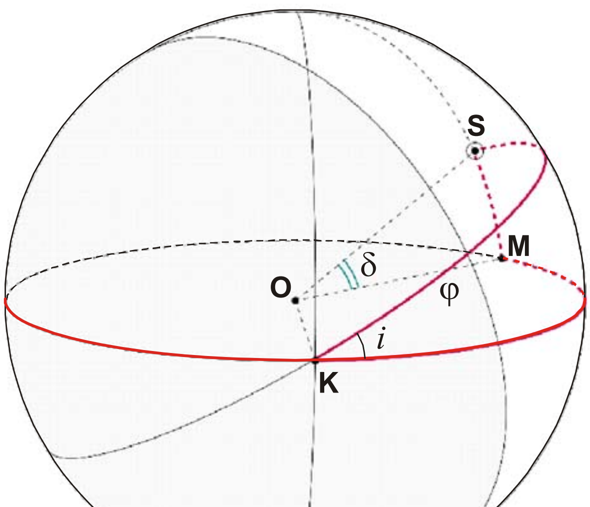
Фазовый угол равен

$$\varphi = \arccos\,(2F - 1) = 123°.$$

Непосредственным измерениями можно получить, что серп Дионы отклонен от перпендикуляра к плоскости колец Сатурна на угол $i = 31°$.



Рассмотрим небесную сферу, в центре которой находится Диона. Для простоты будем считать, что Диона находится в точности в плоскости колец Сатурна, поэтому экватор нашей сферы будет соответствовать экватору в сатурнианской системе координат. Отметим на экваторе точку **K**, соответствующую направлению на станцию «Кассини», и точку **S** выше экватора, соответствующую направлению на Солнце. Линия, опущенная из точки **S** перпендикулярно экватору, пересекает его в точке **M**.



Рассмотрим сферический треугольник **MSK**. Нас интересует дуга **SM**, которая по определению равна искомому склонению Солнца δ. При этом длина дуги **SK** есть не что иное, как величина фазового угла φ. Также нетрудно догадаться, что угол **K** равен углу наклона серпа i. Учитывая, что угол **M** равен 90°, из теоремы синусов получаем:

$$\delta = \arcsin(\sin\varphi \cdot \sin i) = 25.6°.$$

Склонение Солнца на Сатурне меняется по закону, близкому к синусоидальному, с амплитудой ε = 26.73° и периодом T = 29.46 лет:

$$\delta = \varepsilon \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right),$$

где t – время, прошедшее с момента весеннего равноденствия. По условию, фотография сделана незадолго до летнего солнцестояния. Доля сатурнианского года, прошедшая с момента весеннего равноденствия, равна

$$\mu = \frac{t}{T} = \frac{1}{2\pi}\arcsin\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right) \approx 0.20.$$

До летнего солнцестояния осталось $0.25 - \mu = 0.05$ сатурнианского года или 1.5 земных года. Таким образом, летнее солнцестояние произошло примерно в середине 2017 года (точная дата солнцестояния – 26 мая 2017 года).

Оценим погрешность полученного результата. Точность измерения фазы по фотографии зависит от качества печати и масштаба изображения, и, по-видимому, составляет около 0.02. Точность измерения угла наклона терминатора примем равной цене деления транспортира, 1°.

Теперь рассчитаем ответ для двух экстремальных наборов измерений (F=0.21, i=30° и F=0.24, i=32°). В первом случае мы получаем δ=24.0° и t = 2.1 года, а для второго случая мы имеем δ=27.3°>ε. Отсюда можно сделать вывод, что точность определения промежутка времени не лучше 0.5-1 года, и при неаккуратных измерениях ответ может не быть получен. Ситуацию осложняет то, фотография сделана близко к солнцестоянию, когда склонение Солнца изменяется медленно, что увеличивает влияние погрешностей измерений на итоговый результат.

7. Система оценивания. Решение задания разбивается на несколько этапов. Первые два этапа связаны с измерением фазы Дионы и наклона направления ее серпа к плоскости колец Сатурна.

Этап 1 - 1 балл. Измерение фазы Дионы.
Этап засчитывается при результате измерений от 0.21 до 0.25. При результате от 0.19 и 0.21 и от 0.25 до 0.27 может быть поставлено 0.5 балла, которые учитываются при дальнейшем определении оценки.

Этап 2 - 1 балл. Измерение угла наклона направления серпа Дионы к плоскости колец Сатурна.
Аналогично, измерение угла наклона оценивается в 1 балл, если оно дает результат от 30° до 32° и в условные 0.5 балла при результатах от 29° до 30° и от 32° до 33°. Если при суммировании оценок за первые два этапа получается дробная величина, она округляется в пользу участника олимпиады. Погрешность в вычислении фазы и угла наклона не влияет на

оценку за следующие этапы решений, если только они не ведут к заведомо абсурдному ответу (например, $\delta>\varepsilon$, см. далее).

Этап 3 - 1 балл. Вычисление фазового угла Дионы.
Вместо этого угла может быть определено его дополнение до 180°, что должно быть корректно описано). Балл выставляется в случае правильной формулы и правильного численного значения, определяемого измеренной фазой.

Этап 4 - 3 балла. Вычисление склонения Солнца.
Этап распределяется на три составляющий (рисунок или правильное представление картины – 1 балл, применение теоремы синусов – 1 балл, ответ – 1 балл). Получение ответа $\delta>\varepsilon$ как следствие погрешности измерений не является основанием для снижения оценок, если это правильно интерпретируется и анализируется. Если же этот ответ далее используется как адекватный, оценка ***за все решение задачи*** обнуляется.

При выполнении первых четырех этапов участник олимпиады может исходить из того, что угол наклона серпа и есть склонение Солнца. Это неверно, так как Диона располагается не в 90° от Солнца. При таком предположении суммарная оценка за все четыре этапа не превышает 1 балл.

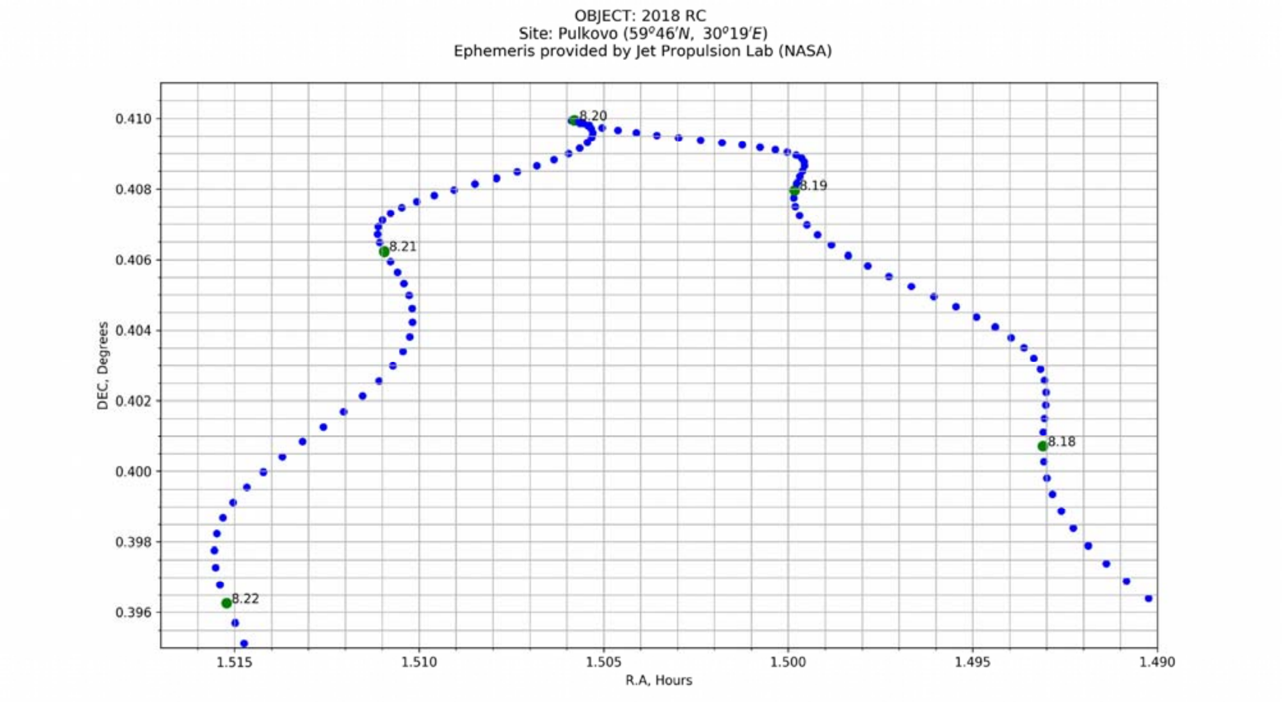
Этап 5 - 4 балла. Вычисление времени, оставшегося до солнцестояния.
2 балла выставляется за верный принцип вычисления времени, и 2 балла – за ответ в интервале от 0 до 2.5 лет. Этот этап также засчитывается в том случае, если участник получил величину склонения Солнца $\delta>\varepsilon$, интерпретировал это как следствие погрешности расчетов и сделал вывод, что искомое время близко к нулю. Если же таких выводов не делается, то в случае $\delta>\varepsilon$ данный этап не засчитывается. Этап и ***все решение*** не засчитывается, если искомое время оказывается большим, чем 0.25 от орбитального периода Сатурна (около 7 лет).

Этап 6 - 2 балла. Оценка точности.
Этап можно производить разными способами. За этот этап выставляется 2 балла – 1 балл при правильных подходах к оценке точности и 1 балл при правильном выводе (точность не лучше 0.5 года).

IX/X.8 ПОПУТЧИК ЗЕМЛИ

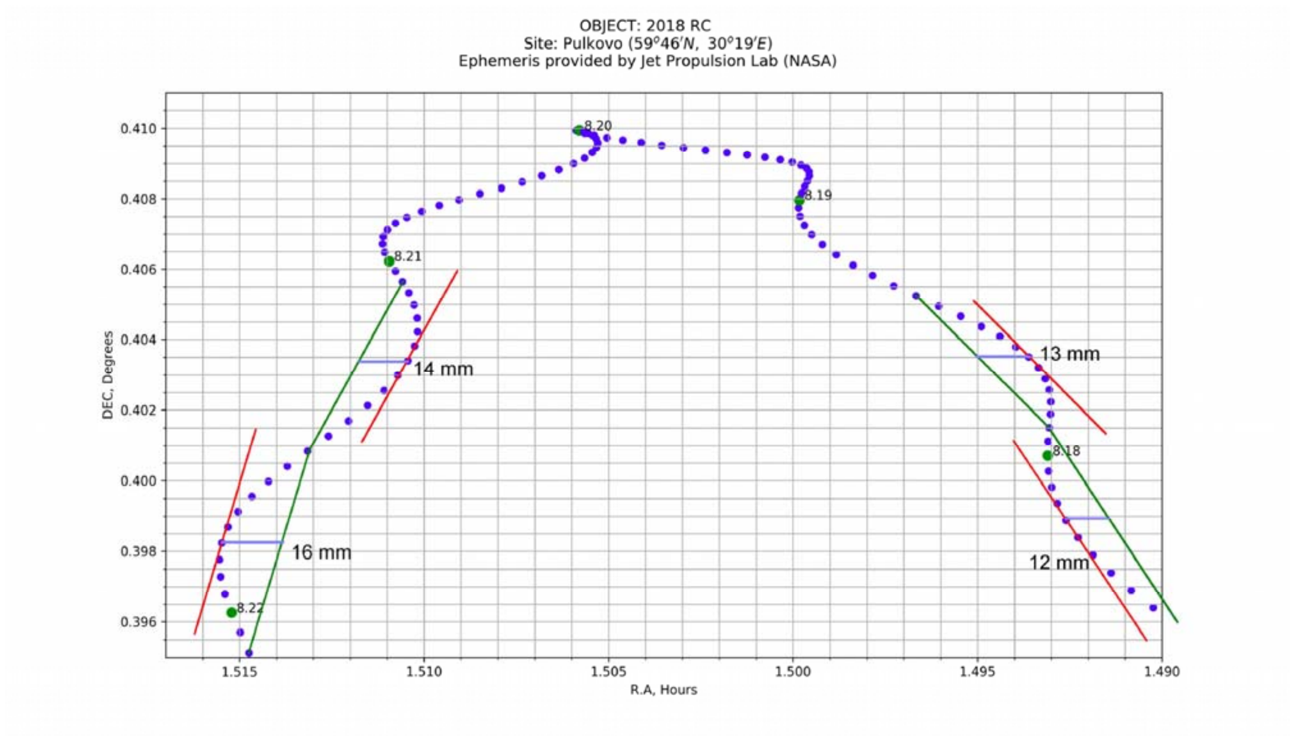
К.И. Васильев

8. Условие. Перед Вами карта в экваториальных координатах, на которой указаны положения астероида 2018 RC. Масштаб карты по прямому восхождению и склонению неодинаков. Известно, что 9 сентября 2018 года этот астероид сблизился с Землей на минимальное расстояние в 220 тыс. км. Положения астероида на небе рассчитаны для Пулковской обсерватории и нанесены с шагом в 1 час; подписи соответствуют началу суток по Всемирному времени. Даты указаны в формате "месяц.день" (8.20 означает 20 августа). Определите, на каком расстоянии от Земли объект находился в полночь по Всемирному времени 20 августа.



8. Решение. По рисунку мы видим, что 20 августа астероид совершил поворот в своем пути по небу в геоцентрической системе координат. Но представленный путь – не геоцентрический, а рассчитанный для конкретного пункта наблюдения, траектория астероида искажена суточным параллаксом: на криволинейное движение наложены периодические колебания. Так как астероид располагается вблизи небесного экватора (это мы видим по величинам склонения), параллактическое смещение происходит по прямому восхождению, вдоль небесной параллели.

Измеряя суточный параллакс, можно определить расстояние до объекта. Для этого мысленно проведем неискаженную параллаксом траекторию и выберем наименее искривленные ее участки: вблизи 18 и 22 августа. Затем выберем на этих участках по пять точек, разделенных шестичасовыми интервалами, следующим образом: две точки, отстоящие друг от друга на 12 часов, должны соответствовать двум максимальным отклонениям от воображаемой средней кривой, а три другие точки, также разделенные 12 часами – лежать как можно ближе к ней.



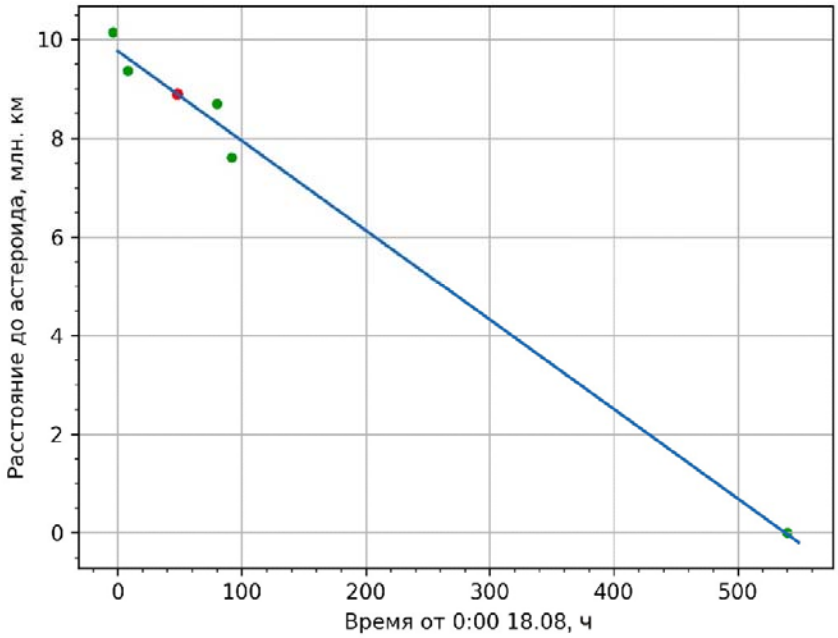
Далее для каждой даты проведем отрезки через средние точки (обозначены зеленым) и параллельные им отрезки через соответствующие крайние точки (обозначены красным). Затем измерим расстояния между отрезками (все измерения приведены для карты, напечатанной в формате А4) и, определив масштаб картинки по оси прямых восхождений (10^{-4} ч/мм или 5.4″/мм), переведем их в угловые величины, а затем и в расстояния до астероида.

Приведем пример расчетов: 17 августа параллактическое смещение составляет 12 мм на карте или 64.8″ на небе. В требуемый в условии задачи момент t_0, 20 августа, параллактическое смещение определить трудно, так как астероид разворачивался в своем пути среди звезд. Но мы можем заметить, что параллактическое смещение π составляло 13 мм в 8ч по Всемирному времени 18 августа и 14 мм в 8ч по Всемирному времени 21 августа (t_2). Так как точность определения параллактического смещения не превосходит 1 мм, мы можем считать, что 20 августа в полночь оно составляло π_A=13.5 мм на карте и 73″ на небе.

Параллактическое смещение вызвано суточным движением Пулковской обсерватории, которое происходит по окружности радиусом $R\cos\varphi$ = 3200 км. Здесь R – радиус Земли, широта Пулковской обсерватории. Отсюда мы находим расстояние до астероида:

$$L = R\cos\varphi \,/\, \sin \pi_A = 9 \text{ млн км.}$$

Строго говоря, мы можем использовать все четыре значения параллакса, которые измеряются по карте, получить по ним величины расстояния, а также считать, что астероид приближается к Земле с постоянной скоростью в преддверии тесного сближения 9 сентября (расстояние при этом сближении можно считать нулевым). Хотя, сам факт неравномерного движения астероида по небу (без учета параллакса) уже указывает на неточность этой модели. Тогда мы можем построить график изменения расстояния до астероида со временем:



Этот график дает то же расстояние до астероида в искомый момент (строгий анализ по методу наименьших квадратов дает величину 8.9 млн км). Согласно эфемеридам, расстояние до астероида в требуемый момент (0ч UTC 20 августа) составляло 8.97 млн. км.

8. Система оценивания.

Этап 1 - 6 баллов. Вычисление суточного параллакса.
Это должно быть сделано по крайней мере для двух моментов времени, до и после полуночи 20 августа. При этом точность измерений должна быть не хуже 1 мм (5″ на небе). Если используется более двух отсчетов по времени с более сложной методикой интерполяции (например, по методу наименьших квадратов) - при правильном исполнении оценка не изменяется. Однако, в случае вычисления параллакса только для одного момента - оценка за этап понижается до 2 баллов, следующий оценивается в полной мере.

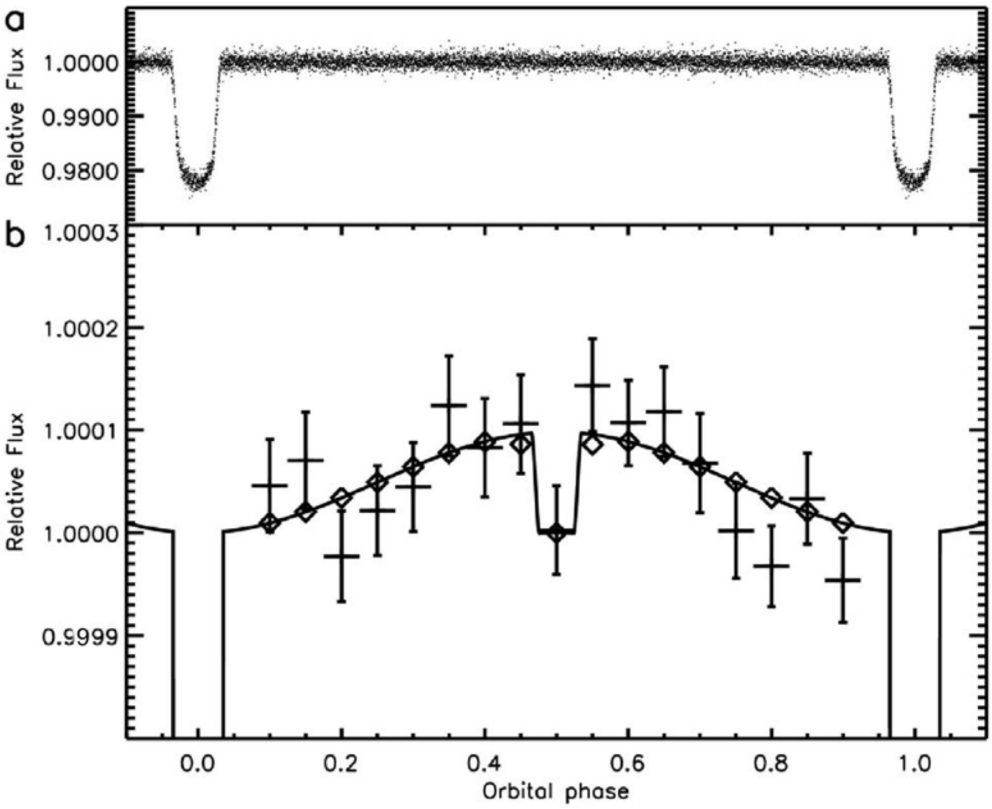
Этап 2 - 6 баллов. Вычисление расстояния до астероида.
Оценка должна иметь погрешность не более 0.5 млн км. При ошибке от 0.5 до 1 млн км оценка уменьшается до 4 баллов. Если участник не учитывает эффект широты Пулковской обсерватории и в итоге завышает расстояние в два раза - за этап выставляется 2 балла.

Вероятная ошибка при решении:
Петлеобразное движение астероида интерпретируется не как эффект суточного параллакса, а как-либо по-другому (например, притяжением невидимого спутника, атмосферной рефракцией). Общая оценка за все решение не может превышать 2 баллов.

IX/X/XI.9 ЭКЗОАЛЬБЕДО

О.С. Угольников

9. Условие. На графике показано изменение видимой яркости затменной системы HD 189733 из звезды с планетой (статья Snellen I.A.G., de Mooij E.J.W., Albrecht S., Nature 459, 543, 2009) в двух масштабах. Виден как главный, так и вторичный минимум. Исходя из этого, оцените альбедо планеты и наклон ее орбиты к лучу зрения. Орбиту планеты считать круговой, потемнением звезды к краю пренебречь.

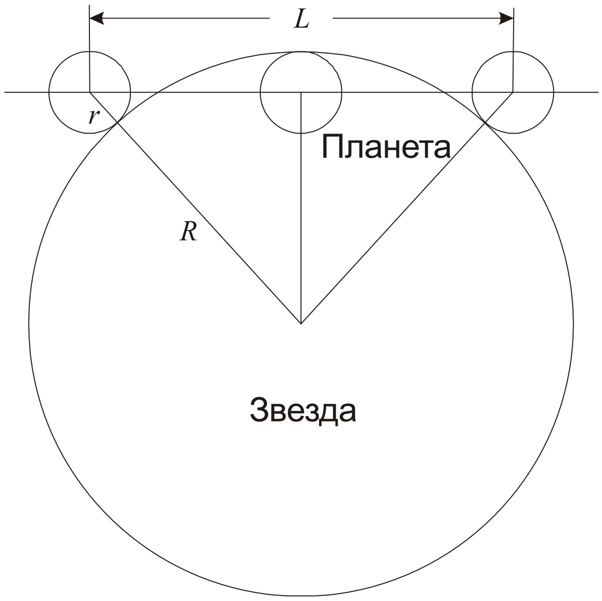


9. Решение. По нижнему графику мы видим, что в момент затмения звездой планеты (орбитальная фаза 0.5) общая звездная величина система такая же, как перед началом или после окончания главного минимума, когда планета имеет малую фазу и не отражает свет звезды. Из этого мы можем сделать вывод, что затмения в системе полные или близки к полным. В то же время, основной минимум практически не имеет плато, характерное для полной фазы (особенно, центральной). Поэтому, учитывая оценочный характер задачи, мы можем считать, что затмения в системе полные и касательные, то есть диски планеты и звезды во время середины затмения касаются друг друга изнутри.

Обозначим радиусы звезды и планеты как R и r. По верхнему графику мы видим, что потемнение в главном минимуме η=$\Delta J/J$=0.023. В пренебрежении потемнением диска звезды к краю имеем

$$\eta = \frac{r^2}{R^2}; \quad r = R\sqrt{\eta} = 0.15R.$$

Определим теперь, какой путь относительно звезды преодолевает планета во время основного затмения (с частными фазами). По рисунку мы видим, что этот путь составляет



$$L = 2\sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 4\sqrt{Rr} = 4R\eta^{1/4} \approx 1.6R.$$

По графику мы видим, что затмение охватывает интервал орбитальных фаз $\pm f$, где $f \approx 0.03$. Отношение этого интервала к полному орбитальному циклу (единичный интервал фаз) есть отношение пути L к длине круговой орбиты планеты:

$$2f = \frac{L}{2\pi a}.$$

Здесь a – радиус орбиты планеты, который мы можем выразить следующим образом:

$$a = \frac{L}{4\pi f} = \frac{R\eta^{1/4}}{\pi f} \approx 4R.$$

Полученное соотношение позволяет ответить на вопросы условия задачи. Исходя из касательного затмения, получаем оценку угла наклона плоскости орбиты к лучу зрения:

$$i = \arcsin\frac{R-r}{a} = \arcsin\frac{(1-\sqrt{\eta})\pi f}{\eta^{1/4}} = 12^{\circ}.$$

Обозначив светимость звезды через B, а сферическое альбедо планеты через A, запишем выражение для светимости планеты:

$$b = \frac{B}{4\pi a^2} \cdot A \cdot \pi r^2.$$

Для наибольшего правдоподобия будем считать, что планета отражает свет неравномерно, и в направлении звезды отражается вдвое больше света, чем в среднем по небесной сфере. Тогда видимая яркость звезды и планеты на Земле (на расстоянии D) будут равны

$$J = \frac{B}{4\pi D^2}; \quad j = \frac{b}{2\pi D^2} = B\frac{Ar^2}{2a^2}.$$

По графику мы видим, что отношение $\kappa = j/J$ составляет 10^{-4}. Мы получаем оценку альбедо планеты:

$$A = \frac{2\kappa a^2}{r^2} = \frac{2\kappa}{\pi^2 f^2 \sqrt{\eta}} = 0.15.$$

Предположение равномерного отражения света планетой во все стороны приведет нас к вдвое большему значению альбедо - около 0.3.

Отметим, что реальное альбедо планеты, в соответствии с данными упомянутой в условии статьи, составляет 0.20 или менее. Также звезда характеризуется заметным потемнением диска к краю, которое замывает эффект плато на кривой блеска, возникающее при полном вступлении планеты на диск звезды. В решении задачи мы это не учитывали, поэтому получили несколько больший угол наклона орбиты к лучу зрения (12°), чем на самом деле (около 5°).

9. Система оценивания.

Этап 1 - 4 балла: Обоснованный вывод о характере затмений.
Участники олимпиады должны установить, что затмения в системе полные и касательные (точнее говоря, близки к таковым с учетом точности предоставленных данных). Однако сам по себе такой вывод без обоснований оценивается только в 1 балл. Для получения полной оценки участники должны указать два экспериментальных факта - отсутствие "плато" у главного минимума и сходство блеска при вторичном затмении и вблизи первичного минимума. Если их этих двух фактов указан только один (любой), то оценка за первый этап составляет 2 балла.

В случае вывода о полном затмении (без указания на касание) первый этап не засчитывается (0 баллов). Если же делается вывод о том, что затмение близко к касательному, но может быть как полным, так и частным (вследствие низкой точности измерения вторичного минимума), то при наличии обоснований и двух экспериментальных фактов этап засчитывается полностью.

Этап 2 - 1 балл. Определение соотношения радиусов планеты и звезды.
Этап засчитывается при значениях отношения радиусов от 0.14 до 0.16. Участник может считать, что затмение могло быть частным (с большой фазой), и тогда полученное значение есть оценка снизу. Это соответствует действительности, и в таком случае этап также засчитывается.

Этап 3 - 2 балла. Определение соотношения размеров звезды (или планеты) и радиуса орбиты планеты.
Правильными могут считаться величины от a=3.5R до a=4.5R. Опять же, это может быть указано, как оценка снизу. Если при этом делается предположение, что затмения центральные, то участник получает L=2R и далее a~5R. В этом случае этап также засчитывается.

Этап 4 - 2 балла. Вычисление наклонения орбиты.
Ответ (i=0), соответствующий центральным затмениям, не оценивается. Также не оцениваются ответы с углами наклона орбиты к лучу зрения, больше 20°, так как в этом случае затмения бы не наблюдались. 2 балла выставляется при диапазоне углов от 10° до 15°, при условии правильного построения метода и учета касательного характера затмений. Жюри необходимо обратить внимание, что вместо угла наклона к лучу зрения участники могут определять угол наклона к картинной плоскости (дополнение до 90°), что также оценивается.

Этап 5 - 3 балла. Вычисление альбедо планеты.

При вычислении альбедо участник может предполагать как равномерное, так и неравномерное отражение света планетой во все стороны. Ошибка, связанная с неправильным учетом касательного характера затмения, на оценку за определение альбедо не влияет.

Возможное неверное решение: альбедо планеты находится как отношение ее видимой яркости (0.0001 от яркости звезды) и закрытого участка звезды во время прохождения планеты (0.023 от яркости звезды). В этом случае альбедо получается равным около 0.5%. Эта величина может быть еще умножена на 2π или 4π, что не меняет оценку. Оценка составляет 0 баллов за все решение, если нет корректного вычисления угла наклона орбиты. Если же он найден, то оценка определяется степенью выполнения первых четырех этапов решения.